

МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.27.202503.287-301

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 514.7

Системы итерированных функций, аттракторы которых являются канторовыми множествами

А. В. Багаев, Д. М. Ганеева

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
(г. Нижний Новгород, Российская Федерация)*

Аннотация. В настоящей работе рассматриваются классические системы итерированных функций (СИФ), состоящие из конечного числа сжимающих отображений полного метрического пространства. Основная цель — исследовать класс СИФ, аттракторы которых являются канторовыми множествами, то есть совершенными вполне несвязными множествами. Важными представителями такого класса являются вполне несвязные СИФ, введенные Барнсли. Нами предложены другие определения вполне несвязной СИФ и доказана их эквивалентность определению Барнсли. Получены достаточные условия, при которых СИФ является вполне несвязной. Показано, что инъективность отображений из СИФ влечет совершенность аттрактора и его несчетность. Доказано, что если отображения из СИФ являются инъективными, а сумма их коэффициентов сжатия меньше единицы, то аттрактор является канторовым множеством. В общем случае, эти условия не гарантируют вполне несвязность СИФ. Между тем показано, что если СИФ состоит из двух инъективных отображений, сумма коэффициентов сжатия которых меньше единицы, то СИФ является вполне несвязной. Построены примеры аттракторов СИФ, демонстрирующие, что условия доказанных теорем имеют только достаточный характер и не являются необходимыми.

Ключевые слова: система итерированных функций, аттрактор, канторово множество, адресное пространство, адресная функция

Для цитирования: Багаев А. В., Ганеева Д. М. Системы итерированных функций, аттракторы которых являются канторовыми множествами // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2025. Т. 27, № 3. С. 287–301. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202503.287-301

Об авторах:

Багаев Андрей Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5155-4175>, abagaev@hse.ru

Ганеева Диана Маратовна, стажер-исследователь международной лаборатории динамических систем и приложений, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: <http://orcid.org/0009-0001-4679-9335>, dganeeva@hse.ru



MSC2020 28A80

Iterated function systems whose attractors are Cantor sets

A. V. Bagaev, D. M. Ganeeva*HSE University (Nizhny Novgorod, Russian Federation)*

Abstract. In this paper we consider classical iterated function systems (IFS) consisting of a finite number of contracting mappings for a complete metric space. The main goal is to study the class of IFSs whose attractors are Cantor sets, i.e. perfect totally disconnected sets. Important representatives of this class are totally disconnected IFSs introduced by Barnsley. We have proposed other definitions of a totally disconnected IFS and proved their equivalence to the Barnsley definition. Sufficient conditions for IFS to be totally disconnected are obtained.

It is shown that injectivity of mappings from an IFS implies the perfection of the attractor and its uncountability. Also it is proved that if the mappings from an IFS are injective and the sum of their contraction coefficients is less than one, then the attractor is a Cantor set. In general case, these conditions do not guarantee totally disconnectedness of an IFS.

Meanwhile, it is shown that if an IFS consists of two injective mappings and the sum of their contraction coefficients is less than one, then the IFS is totally disconnected. Examples of IFS attractors are constructed, demonstrating that conditions of the proven theorems are only sufficient but not necessary.

Keywords: iterated function system, attractor, Cantor set, address space, address function

For citation: A. V. Bagaev, D. M. Ganeeva. Iterated function systems whose attractors are Cantor sets. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 27:3(2025), 287–301. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202503.287-301

About the authors:

Andrey V. Bagaev, Associate Professor, Department of Fundamental Mathematics, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), Ph.D. (Phys.-Math.), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5155-4175>, abagaev@hse.ru

Diana M. Ganeeva, Research Assistant of International laboratory of Dynamical Systems and Applications, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0009-0001-4679-9335>, dganeeva@hse.ru

1. Введение

Понятие системы итерированных функций (СИФ) было впервые предложено Хатчинсоном [1] в 1981 году и позже всесторонне изучалось Барнсли [2] и др. СИФ играет важную роль в теории фракталов, а также находит применение в физике, инженерных науках, медицине, биологии, экономике и др. [3–5].

Системой итерированных функций (СИФ) на полном метрическом пространстве X называется конечный набор сжимающих отображений $S = \{f_1, \dots, f_k\}$, заданных на

X . Согласно теореме Хатчинсона [1] для любой СИФ $S = \{f_1, \dots, f_k\}$ на X существует единственное непустое компактное подмножество $\mathcal{A} \subset X$, инвариантное относительно S , то есть $f_1(\mathcal{A}) \cup \dots \cup f_k(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Множество $\mathcal{A}$ называется аттрактором СИФ S . Аттрактор $\mathcal{A}$ СИФ S может представлять собой как «простое» множество, так и иметь сложную структуру и являться фракталом. Поэтому теория систем итерированных функций является одним из важных инструментов построения фракталов.

Существуют многочисленные обобщения понятия СИФ, касающиеся либо условий, налагаемых на функции, составляющие систему, либо на базовое пространство [6–8].

Поскольку совокупность G всевозможных композиций отображений из S является полугруппой, то любая СИФ S определяет полугрупповую динамическую систему (G, X) . Как известно из работы [9], аттрактор $\mathcal{A}$ СИФ S является глобальным аттрактором и единственным минимальным множеством динамической системы (G, X) . Таким образом, теория СИФ и их аттракторов может рассматриваться как одно из направлений в теории полугрупповых динамических систем.

В данной работе исследуется СИФ, аттракторы которых являются канторовыми множествами. Напомним, что совершенное вполне несвязное подмножество топологического пространства называется канторовым множеством.

Важным классом таких СИФ служат вполне несвязные СИФ. Понятие вполне несвязной СИФ предложено Барнсли [2]. В своем определении он использовал понятия адресного пространства и адресной функции.

Особый интерес к вполне несвязным СИФ связан с тем, что на аттракторе таких СИФ достаточно просто определяется преобразование, называемое сдвигом, которое обладает свойством хаотичности [2].

Мы предлагаем два других определения вполне несвязной СИФ, не использующие понятия адресного пространства и адресной функции, и доказываем, что они эквивалентны определению Барнсли (Теорема 2.1).

Применяя наш подход, мы получили достаточные условия, при которых СИФ является вполне несвязной (Теорема 3.1, Теорема 3.2).

Хатчинсон [1] показал, что аттрактор $\mathcal{A}$ СИФ S , для которой сумма коэффициентов сжатия всех отображений из S меньше 1, является вполне несвязным. Данное условие не влечет совершенность аттрактора.

Нами доказано (Теорема 5.1), что аттрактор $\mathcal{A}$ СИФ S , состоящей из отображений, инъективных на $\mathcal{A}$, является совершенным и несчетным множеством.

Применяя результат Хатчинсона и Теорему 5.1, мы получили достаточные условия, при которых аттрактор $\mathcal{A}$ СИФ S является канторовым множеством (Теорема 5.2). Нужно отметить, что при этих условиях СИФ S , вообще говоря, не является вполне несвязной. Однако, в случае СИФ, состоящей из двух отображений, выполнение условий из Теоремы 5.2 гарантируют, что СИФ является вполне несвязной (Теорема 4.1).

В разделе 6 приведены примеры, иллюстрирующие содержание работы.

2. Эквивалентные подходы к понятию вполне несвязной СИФ

Пусть $\mathcal{A}$ — аттрактор СИФ $S = \{f_1, \dots, f_k\}$, заданной на полном метрическом пространстве X , $\Sigma = \{1, \dots, k\}$, $k > 1$. Напомним определения адресного пространства и адресной функции для СИФ S ([2]).

Адресным пространством Ω называется метрическое пространство всех последова-

тельностью $\sigma = \{\sigma_n\}$ чисел из Σ с метрикой ρ , определяемой формулой

$$\rho(\sigma, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sigma_n - \omega_n|}{(k+1)^n},$$

где $\sigma = \{\sigma_n\}$; $\omega = \{\omega_n\} \in \Omega$. Как известно из работы [2], адресное пространство (Ω, ρ) является несчетным совершенным вполне несвязным компактным пространством. Таким образом, адресное пространство Ω является канторовым множеством.

Адресной функцией для СИФ S называется отображение $\varphi: \Omega \rightarrow \mathcal{A}$, заданное формулой

$$\varphi(\sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{\sigma_1} \circ \dots \circ f_{\sigma_n}(x),$$

где $\sigma = \{\sigma_n\} \in \Omega$; $x \in \mathcal{A}$. Отображение φ определено корректно (не зависит от выбора точки $x \in \mathcal{A}$), является непрерывным и сюръективным (см., например, [2, с. 127], Теорема 1).

Любой элемент из множества $\varphi^{-1}(x)$ называется адресом точки $x \in \mathcal{A}$. Вообще говоря, точка $x \in \mathcal{A}$ может иметь несколько адресов.

Определение 2.1 ([2]). Если каждая точка аттрактора $\mathcal{A}$ СИФ S имеет только один адрес (то есть адресная функция φ инъективна), то СИФ S называется вполне несвязной.

Для вполне несвязных СИФ адресная функция $\varphi: \Omega \rightarrow \mathcal{A}$ биективна. Так как биективное непрерывное отображение компактного пространства в хаусдорфово пространство — гомеоморфизм, то аттрактор $\mathcal{A}$ вполне несвязной СИФ S является канторовым множеством.

Дадим два других определения вполне несвязной СИФ, не использующее понятия адресного пространства и адресной функции.

Определение 2.2. Система итерированных функций S с аттрактором $\mathcal{A}$ называется вполне несвязной, если:

- 1) $f_i|_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ инъективно $\forall i \in \Sigma$;
- 2) $f_i(\mathcal{A}) \cap f_j(\mathcal{A}) = \emptyset \forall i, j \in \Sigma, i \neq j$.

Для произвольного множества $B \subset X$ положим $B_{i_1 i_2 \dots i_p} = f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \dots \circ f_{i_p}(B)$ $\forall (i_1, i_2, \dots, i_p) \in \Sigma^p$.

Определение 2.3. Система итерированных функций S с аттрактором $\mathcal{A}$ называется вполне несвязной, если

$$\mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_p} \cap \mathcal{A}_{j_1 j_2 \dots j_p} = \emptyset$$

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall (i_1, i_2, \dots, i_p), (j_1, j_2, \dots, j_p) \in \Sigma^p, (i_1, i_2, \dots, i_p) \neq (j_1, j_2, \dots, j_p).$$

Теорема 2.1. Определения вполне несвязной СИФ, приведенные выше, эквивалентны.

Доказательство. Доказательство эквивалентности определений вполне несвязной СИФ проведем по следующей схеме:

$$\text{Определение 2.1} \Rightarrow \text{Определение 2.2} \Rightarrow \text{Определение 2.3} \Rightarrow \text{Определение 2.1}.$$

Пусть СИФ $S = \{f_1, \dots, f_k\}$ является вполне несвязной в смысле Определения 2.1. Предположим, что отображение $f_j|_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ не является инъективным, то есть существуют такие $x, y \in \mathcal{A}$, $x \neq y$, что $f_j(x) = f_j(y) = z$. Далее для адреса $\sigma = \{\sigma_n\} \in \Omega$ будем также использовать обозначение $\sigma = \sigma_1\sigma_2\dots$. Определим отображение $\tau_j: \Omega \rightarrow \Omega$ формулой $\tau_j(\sigma_1\sigma_2\dots) = j\sigma_1\sigma_2\dots \forall \sigma = \sigma_1\sigma_2\dots \in \Omega$. Из работы [2], имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\tau_j} & \Omega \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \mathcal{A} & \xrightarrow{f_j} & \mathcal{A}. \end{array} \quad (2.1)$$

Так как адресная функция биективна, то адреса $\sigma = \varphi^{-1}(x)$ и $\omega = \varphi^{-1}(y)$ различные. Тогда в силу коммутативности диаграммы (2.1) имеем

$$z = f_j(x) = f_j \circ \varphi(\sigma) = \varphi \circ \tau_j(\sigma) = \varphi(j\sigma_1\sigma_2\dots),$$

$$z = f_j(y) = f_j \circ \varphi(\omega) = \varphi \circ \tau_j(\omega) = \varphi(j\omega_1\omega_2\dots).$$

Поскольку $\sigma \neq \omega$, то точка z имеет два различных адреса $j\sigma_1\sigma_2\dots$ и $j\omega_1\omega_2\dots$, что противоречит биективности адресной функции. Следовательно, сужения $f_j|_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ являются инъективными отображениями $\forall j \in \Sigma$.

Предположим, что существуют такие $j, l \in \Sigma$, $j \neq l$, что $f_j(\mathcal{A}) \cap f_l(\mathcal{A}) \neq \emptyset$. Тогда найдутся такие $x, y \in \mathcal{A}$, что $f_j(x) = f_l(y) = z$. Пусть $\sigma = \varphi^{-1}(x)$ и $\omega = \varphi^{-1}(y)$ — адреса точек x и y соответственно. Коммутативность диаграммы (2.1) влечет

$$z = f_j(x) = f_j \circ \varphi(\sigma) = \varphi \circ \tau_j(\sigma) = \varphi(j\sigma_1\sigma_2\dots),$$

$$z = f_l(x) = f_l \circ \varphi(\omega) = \varphi \circ \tau_l(\omega) = \varphi(l\omega_1\omega_2\dots).$$

Поскольку $j \neq l$, то точка z имеет два различных адреса $j\sigma_1\sigma_2\dots$ и $l\omega_1\omega_2\dots$, что противоречит биективности адресной функции. Следовательно, имеем $f_j(\mathcal{A}) \cap f_l(\mathcal{A}) = \emptyset \forall j, l \in \Sigma, j \neq l$.

Итак, доказано, что Определение 2.1 влечет Определение 2.2.

Пусть теперь СИФ S удовлетворяет условиям 1) и 2) Определения 2.2. Докажем индукцией по m , что $\mathcal{A}_{\sigma_1\dots\sigma_m} \cap \mathcal{A}_{\omega_1\dots\omega_m} = \emptyset$ для разных наборов $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$, $(\omega_1, \dots, \omega_m) \in \Sigma^m$. В силу условия 2) Определения 2.2 имеем $\mathcal{A}_{\sigma_1} \cap \mathcal{A}_{\omega_1} = \emptyset$ для $\sigma_1 \neq \omega_1$.

Пусть $\mathcal{A}_{\sigma_1\dots\sigma_m} \cap \mathcal{A}_{\omega_1\dots\omega_m} = \emptyset$ для любых двух разных наборов из Σ^m . Рассмотрим пересечение $\mathcal{A}_{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{m+1}} \cap \mathcal{A}_{\omega_1\omega_2\dots\omega_{m+1}}$. Если $\sigma_1 = \omega_1$, то наборы $(\sigma_2, \dots, \sigma_{m+1})$ и $(\omega_2, \dots, \omega_{m+1})$ из Σ^m различны и по предположению индукции пересечение $\mathcal{A}_{\sigma_2\dots\sigma_{m+1}} \cap \mathcal{A}_{\omega_2\dots\omega_{m+1}} = \emptyset$, следовательно, в силу инъективности отображения $f_{\sigma_1}|_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{m+1}} \cap \mathcal{A}_{\omega_1\omega_2\dots\omega_{m+1}} &= f_{\sigma_1}(\mathcal{A}_{\sigma_2\dots\sigma_{m+1}}) \cap f_{\sigma_1}(\mathcal{A}_{\omega_2\dots\omega_{m+1}}) = \\ &= f_{\sigma_1}(\mathcal{A}_{\sigma_2\dots\sigma_{m+1}} \cap \mathcal{A}_{\omega_2\dots\omega_{m+1}}) = f_{\sigma_1}(\emptyset) = \emptyset. \end{aligned}$$

Пусть $\sigma_1 \neq \omega_1$. Поскольку $\mathcal{A}_{\sigma_2\dots\sigma_{m+1}} \subset \mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_{\omega_2\dots\omega_{m+1}} \subset \mathcal{A}$, то в силу условия 2) Определения 2.2 имеем

$$\mathcal{A}_{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{m+1}} \cap \mathcal{A}_{\omega_1\omega_2\dots\omega_{m+1}} = f_{\sigma_1}(\mathcal{A}_{\sigma_2\dots\sigma_{m+1}}) \cap f_{\omega_1}(\mathcal{A}_{\omega_2\dots\omega_{m+1}}) = \emptyset.$$

Таким образом, $\mathcal{A}_{\sigma_1 \dots \sigma_m} \cap \mathcal{A}_{\omega_1 \dots \omega_m} = \emptyset$ для разных наборов $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$, $(\omega_1, \dots, \omega_m) \in \Sigma^m$ и для всех $m \in \mathbb{N}$, то есть из Определения 2.2 следует Определение 2.3.

Покажем, что из условия Определения 2.3 следует инъективность адресной функции φ . Предположим противное: пусть существуют такие $\sigma, \omega \in \Omega$ и $m \in \mathbb{N}$, что $\varphi(\sigma) = \varphi(\omega) = x$ и $\sigma_1 = \omega_1, \dots, \sigma_{m-1} = \omega_{m-1}$, $\sigma_m \neq \omega_m$. В силу коммутативности диаграммы (2.1) имеем

$$x = \varphi(\sigma) = \varphi \circ \tau_{\sigma_1} \circ \dots \circ \tau_{\sigma_m}(\sigma_{m+1}\sigma_{m+2}\dots) = f_{\sigma_1} \circ \dots \circ f_{\sigma_m} \circ \varphi(\sigma_{m+1}\sigma_{m+2}\dots) \in \mathcal{A}_{\sigma_1 \dots \sigma_m},$$

$$x = \varphi(\omega) = \varphi \circ \tau_{\omega_1} \circ \dots \circ \tau_{\omega_m}(\omega_{m+1}\omega_{m+2}\dots) = f_{\omega_1} \circ \dots \circ f_{\omega_m} \circ \varphi(\omega_{m+1}\omega_{m+2}\dots) \in \mathcal{A}_{\omega_1 \dots \omega_m}.$$

Таким образом, $x \in \mathcal{A}_{\sigma_1 \dots \sigma_m} \cap \mathcal{A}_{\omega_1 \dots \omega_m}$, то есть $\mathcal{A}_{\sigma_1 \dots \sigma_m} \cap \mathcal{A}_{\omega_1 \dots \omega_m} \neq \emptyset$. Поскольку $\sigma_m \neq \omega_m$, то $(\sigma_1, \dots, \sigma_m) \neq (\omega_1, \dots, \omega_m)$ и по условию Определения 2.3 имеем $\mathcal{A}_{\sigma_1 \dots \sigma_m} \cap \mathcal{A}_{\omega_1 \dots \omega_m} = \emptyset$. Противоречие показывает, что $\sigma_m = \omega_m \forall m \in \mathbb{N}$, то есть $\sigma = \omega$ и адресная функция φ является инъективной.

Итак, показано, что из Определения 2.3 вытекает Определение 2.1, что завершает доказательство Теоремы 2.1. $\square$

Замечание 2.1. Как показывают Примеры 6.1 и 6.5, вполне несвязность аттрактора $\mathcal{A}$ СИФ S не влечет, вообще говоря, вполне несвязность СИФ S .

3. Достаточные условия, при которых СИФ является вполне несвязной

Пусть $S = \{f_1, \dots, f_k\}$ — СИФ, заданная на полном метрическом пространстве X , $k > 1$. Обозначим через $\mathcal{K}$ семейство всех непустых компактных подмножеств в X . Поскольку X — полное метрическое пространство, то $\mathcal{K}$, наделенное метрикой Хаусдорфа d_H , также является полным метрическим пространством. Отображение $F: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$, заданное равенством

$$F(B) = f_1(B) \cup \dots \cup f_k(B) \quad \forall B \in \mathcal{K},$$

определено корректно и называется отображением Хатчинсона. Согласно теореме Хатчинсона [1] отображение F является сжимающим и поэтому по теореме о неподвижной точке для сжимающего отображения в полном метрическом пространстве существует единственное непустое компактное множество $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$, удовлетворяющее равенству $F(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ или

$$f_1(\mathcal{A}) \cup \dots \cup f_k(\mathcal{A}) = \mathcal{A}.$$

Таким образом, для любой СИФ S существует единственный аттрактор $\mathcal{A}$. Более того, для любого компактного множества $B \in \mathcal{K}$ последовательность компактных подмножеств $\{F^n(B)\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится в метрическом пространстве $(\mathcal{K}, d_H)$ к $\mathcal{A}$.

Теорема 3.1. Пусть СИФ $S = \{f_1, \dots, f_k\}$ задана на полном метрическом пространстве X , $k > 1$, B — такое непустое компактное подмножество в X , что

- 1) $f_i(B) \subset B \forall i \in \Sigma = \{1, \dots, k\}$;
- 2) $f_i|_B: B \rightarrow B$ инъективно $\forall i \in \Sigma$;
- 3) $f_i(B) \cap f_j(B) = \emptyset \forall i, j \in \Sigma, i \neq j$.

Тогда СИФ S является вполне несвязной, а ее аттрактор $\mathcal{A}$ — канторовым множеством в B .

Доказательство. Пусть, как и ранее, $F: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ — отображение Хатчинсона для СИФ S . Положим $A_n = F^n(B) \forall n \in \mathbb{N}$. В силу условия 1) выполнено включение $F(B) \subset B$, следовательно, имеем монотонную последовательность вложенных компактных подмножеств в X :

$$B \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$$

По теореме Хатчинсона [1]

$$\mathcal{A} = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n,$$

причем $\mathcal{A} \subset B$.

Согласно условию 2) сужения $f_j|_B: B \rightarrow B$ инъективны $\forall j \in \Sigma$, поэтому сужения $f_j|_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ также инъективны.

В силу условия 3) имеем $f_j(B) \cap f_l(B) = \emptyset \forall j, l \in \Sigma, j \neq l$. Поскольку $\mathcal{A} \subset B$, то $f_j(\mathcal{A}) \cap f_l(\mathcal{A}) = \emptyset \forall j \neq l, j, l \in \Sigma$.

Таким образом, для СИФ S выполнены условия Определения 2.2. Как замечалось ранее, аттрактор $\mathcal{A}$ вполне несвязной СИФ S является канторовым множеством. $\square$

Замечание 3.1. Ранее [9], Теорема 7.2) первым автором получены достаточные условия, при которых аттрактор СИФ является канторовым множеством. В Теореме 3.1 формулируется более сильное утверждение, чем в Теореме 7.2 [9], и доказывается, что СИФ S вполне несвязна. Благодаря Теореме 2.1 условие биективности отображений $f_i \in S$ на всем X , требуемое в Теореме 7.2 [9], заменено на более слабое условие инъективности сужений $f_i|_B$ и, кроме того, существенно сокращено доказательство.

Теорема 3.2. Пусть СИФ $S = \{f_1, \dots, f_k\}$ задана на полном метрическом пространстве X , $k > 1$, B — такое непустое компактное подмножество в X , что

$$1) f_i(B) \subset B \forall i \in \Sigma;$$

$$2) B_{i_1 i_2 \dots i_p} \cap B_{j_1 j_2 \dots j_p} = \emptyset \forall p \in \mathbb{N}, \forall (i_1, i_2, \dots, i_p), (j_1, j_2, \dots, j_p) \in \Sigma^p, (i_1, i_2, \dots, i_p) \neq (j_1, j_2, \dots, j_p).$$

Тогда СИФ S является вполне несвязной, а ее аттрактор $\mathcal{A}$ — канторовым множеством в B .

Доказательство. Пусть $A_n = F^n(B) \forall n \in \mathbb{N}$, где, как и ранее, $F: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ — отображение Хатчинсона для СИФ S . В силу условия 1) имеем $F(B) \subset B$, откуда получаем монотонную последовательность вложенных компактных подмножеств в X :

$$B \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$$

В силу теоремы Хатчинсона [1]

$$\mathcal{A} = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Отметим, что $\mathcal{A} \subset B$. Отсюда имеем включение

$$\mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_p} \subset B_{i_1 i_2 \dots i_p} \quad \forall (i_1, i_2, \dots, i_p) \in \Sigma^p, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Поэтому благодаря условию 2) Теоремы 3.2

$$\mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_p} \cap \mathcal{A}_{j_1 j_2 \dots j_p} = \emptyset$$

для всех $p \in \mathbb{N}$ и всех различных наборов $(i_1, i_2, \dots, i_p), (j_1, j_2, \dots, j_p) \in \Sigma^p$. Таким образом, для СИФ S выполнено условие Определения 2.3. Следовательно, СИФ S вполне несвязна, а ее аттрактор $\mathcal{A}$ является канторовым множеством. $\square$

4. Вполне несвязные СИФ, состоящие из двух отображений

Рассмотрим случай, когда СИФ состоит из двух сжимающих отображений. Докажем сначала следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 4.1. Пусть $\mathcal{A}$ — аттрактор СИФ $S = \{f_1, f_2\}$, λ_i — коэффициент сжатия отображения f_i , $i = 1, 2$. Если $\lambda_1 + \lambda_2 < 1$ и неподвижные точки отображений f_1 и f_2 различны, то $f_1(\mathcal{A}) \cap f_2(\mathcal{A}) = \emptyset$.

Доказательство. Пусть $\lambda = \text{diam} \mathcal{A}$ — диаметр множества $\mathcal{A}$. Поскольку неподвижные точки x_1 и x_2 отображений f_1 и f_2 принадлежат аттрактору $\mathcal{A}$, а по условию x_1 и x_2 различны, то $\lambda > 0$. Положим $\mathcal{A}_i = f_i(\mathcal{A})$, $i = 1, 2$. Тогда

$$\text{diam} \mathcal{A}_i \leq \lambda_i \text{diam} \mathcal{A} = \lambda_i \lambda, \quad i = 1, 2.$$

Так как по определению аттрактора $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$, по условию $\lambda_1 + \lambda_2 < 1$ и $\lambda > 0$, то имеет место цепочка неравенств

$$\text{diam} \mathcal{A}_1 + \text{diam} \mathcal{A}_2 \leq \lambda_1 \lambda + \lambda_2 \lambda = (\lambda_1 + \lambda_2) \lambda < \lambda = \text{diam} \mathcal{A} = \text{diam}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2). \quad (4.1)$$

Известно следующее неравенство

$$\text{diam}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) \leq \text{diam} \mathcal{A}_1 + \text{diam} \mathcal{A}_2 + d(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2), \quad (4.2)$$

где $d(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = \inf\{d(x, y) \mid x \in \mathcal{A}_1, y \in \mathcal{A}_2\}$ — расстояние между $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. Из (4.1) и (4.2) получаем, что $d(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) > 0$. Отсюда $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset$. Действительно, если бы $z \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$, то

$$d(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = \inf\{d(x, y) \mid x \in \mathcal{A}_1, y \in \mathcal{A}_2\} = d(z, z) = 0,$$

но по доказанному $d(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) > 0$. Итак, $f_1(\mathcal{A}) \cap f_2(\mathcal{A}) = \emptyset$. $\square$

Теорема 4.1. Пусть $\mathcal{A}$ — аттрактор СИФ $S = \{f_1, f_2\}$, λ_i — коэффициент сжатия отображения f_i , $i = 1, 2$, причем:

- 1) неподвижные точки отображений f_1 и f_2 различны;
- 2) $\lambda_1 + \lambda_2 < 1$;
- 3) $f_i|_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ инъективно, $i = 1, 2$.

Тогда СИФ S вполне несвязна, а ее аттрактор A — канторово множество.

Доказательство. В силу условий 1) и 2) согласно Лемме 4.1 выполнено равенство $f_1(A) \cap f_2(A) = \emptyset$. По условию 3) отображения $f_1|_A$ и $f_2|_A$ инъективны. Таким образом, для СИФ S выполнены оба условия Определения 2.2, поэтому СИФ S является вполне несвязной, а ее аттрактор A — канторово множество. $\square$

Замечание 4.1. Если условие 1) в Теореме 4.1 не выполнено, то аттрактор A СИФ $S = \{f_1, f_2\}$ состоит из общей неподвижной точки отображений f_1 и f_2 .

Замечание 4.2. В Теореме 4.1 (как и в Теореме 5.1, Теореме 5.2) условие инъективности сужений $f_i|_A$ на аттрактор A отображений из S можно заменить на более жесткое условие инъективности отображений из S на всем пространстве X .

Замечание 4.3. Условие $f_1(A) \cap f_2(A) = \emptyset$ не гарантирует ни инъективности отображений f_1 и f_2 , ни неравенства $\lambda_1 + \lambda_2 < 1$, а условие $\lambda_1 + \lambda_2 \geq 1$ не влечет $f_1(A) \cap f_2(A) \neq \emptyset$ (см. Пример 6.2).

Замечание 4.4. Как показано в Примере 6.3, если СИФ $S = \{f_1, f_2\}$ является вполне несвязной, а аттрактор A — канторовым множеством, из этого, вообще говоря, не следует, что $\lambda_1 + \lambda_2 < 1$. Таким образом, условие 2) Теоремы 4.1 является только достаточным.

Замечание 4.5. Как известно из [1, с. 727] (Утверждение 9), если $\lambda_1 + \lambda_2 < 1$, то аттрактор A является вполне несвязным множеством. Пример 6.1 показывает, что A в этом случае необязательно канторово множество, а СИФ S вполне несвязна. Таким образом, в Теореме 4.1 нельзя отказаться от условия 3).

С другой стороны, если A — связное множество, состоящее более чем из одной точки, то $\lambda_1 + \lambda_2 \geq 1$. В обратную сторону, это утверждение неверно (см. Пример 6.2).

Следствие 4.1. Пусть аттрактор A СИФ $S = \{f_1, f_2\}$ не является связным множеством, а отображения $f_1|_A$ и $f_2|_A$ инъективны. Тогда СИФ S вполне несвязна, а аттрактор A — канторово множество.

Доказательство. Согласно Теореме 2.5 из [11] если для аттрактора A СИФ $S = \{f_1, f_2\}$ выполнено условие $f_1(A) \cap f_2(A) \neq \emptyset$, то A является связным множеством. Так как A не является связным, то $f_1(A) \cap f_2(A) = \emptyset$. По условию Следствия 4.1 отображения $f_1|_A$ и $f_2|_A$ инъективны. Таким образом, выполнены условия Определения 2.2 и СИФ S является вполне несвязной, а ее аттрактор A — канторово множество. $\square$

5. Достаточные условия, при которых аттрактор является канторовым множеством

Воспользуемся следующим утверждением.

Теорема 5.1. Пусть каждое отображение из СИФ $S = \{f_1, \dots, f_k\}$, $k > 1$, является инъективным на аттракторе A , и неподвижные точки хотя бы двух отображений из системы S различны, G — полугруппа, порожденная всевозможными композициями отображений из S . Тогда:

- 1) $\mathcal{A}$ — совершенное множество;
- 2) $\mathcal{A}$ является несчетным множеством;
- 3) полугруппа G не имеет замкнутых орбит;
- 4) $\mathcal{A}$ не является орбитой никакой своей точки.

Доказательство. 1) Предположим противное: пусть аттрактор $\mathcal{A}$ имеет изолированную точку $x \in \mathcal{A}$. Как известно [1] (см. также [2]), $\mathcal{A}$ совпадает с замыканием множества всех неподвижных точек отображений из полугруппы G , порожденной S . Поскольку точка $x \in \mathcal{A}$ — изолированная, то найдется такое $g \in G$, что $g(x) = x$.

По условию неподвижные точки хотя бы двух отображений из системы S различны. Это означает, что в $\mathcal{A}$ найдется точка y , отличная от x . Поскольку $g \in G$ — сжимающее отображение как композиция сжимающих отображений из S , то $d(g(x), g(y)) \leq \lambda d(x, y)$, где $\lambda \in [0, 1)$. Отметим, что из инъективности отображений из S на аттракторе $\mathcal{A}$ вытекает, что $\lambda > 0$. Отсюда имеем $d(x, g^n(y)) = d(g^n(x), g^n(y)) \leq \lambda^n d(x, y)$ и $y_n = g^n(y) \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$. Так как x — изолированная точка множества $\mathcal{A}$, то существует такая окрестность $U \subset X$ точки x , что $U \cap \mathcal{A} = \{x\}$. В силу сходимости $y_n \in \mathcal{A}$ к x , начиная с некоторого номера, $y_n \in U$. Обозначим через $N \in \mathbb{N}$ наименьший из таких номеров. В силу равенства $U \cap \mathcal{A} = \{x\}$ получаем $y_n = x$ для всех $n \geq N$. Тогда $y_{N-1} \notin U$ и $y_{N-1} \neq x$, при этом $g(y_{N-1}) = y_N = x = g(x)$. Но g является инъективным отображением как композиция инъективных отображений из S . Противоречие показывает, что аттрактор $\mathcal{A}$ не имеет изолированных точек. Кроме того, поскольку $\mathcal{A}$ — замкнутое множество, то $\mathcal{A}$ — совершенное множество.

2) Как доказано выше, $\mathcal{A}$ не имеет изолированных точек. Следовательно, для всех $x \in \mathcal{A}$ множество $\{x\}$ является нигде не плотным множеством в $\mathcal{A}$. Так как $\mathcal{A}$ компактно, то метрическое пространство $\mathcal{A}$ полно. Согласно теореме Бэра полное метрическое пространство нельзя представить в виде счетного объединения нигде не плотных подмножеств. Поэтому $\mathcal{A}$ не может быть счетным.

3) Полугруппа G представляет собой всевозможные композиции отображений из конечного множества S , поэтому как G , так и любая орбита $G.x$, $x \in X$, являются не более чем счетными множествами. Согласно Теореме 5.1 из [9] $\mathcal{A} = \overline{G.x} \forall x \in \mathcal{A}$ и $\mathcal{A} \subset \overline{G.x} \forall x \in X \setminus \mathcal{A}$. Предположим, что существует замкнутая орбита $G.x$. Если $x \in \mathcal{A}$, то $\mathcal{A} = G.x$ и аттрактор $\mathcal{A}$ был бы счетным, что невозможно по доказанному в 2). Если $x \in X \setminus \mathcal{A}$, то $\mathcal{A} \subset G.x$ и из счетности орбиты $G.x$ вытекала бы счетность аттрактора $\mathcal{A}$, чего не может быть в силу 2). Таким образом, полугруппа G не имеет замкнутых орбит. В частности, $\mathcal{A} \neq G.x \forall x \in \mathcal{A}$, то есть 4) также доказано. $\square$

Следствие 5.1. Пусть G — полугруппа, порожденная всевозможными композициями отображений из СИФ $S = \{f_1, \dots, f_k\}$, $k > 1$, и неподвижные точки хотя бы двух отображений из системы S различны. Если аттрактор $\mathcal{A}$ СИФ S удовлетворяет одному из условий: 1) $\mathcal{A}$ имеет изолированную точку; 2) $\mathcal{A}$ — конечное или счетное множество; 3) $\mathcal{A}$ совпадает с орбитой одной из своих точек, то хотя бы одно отображение из S не является инъективным на $\mathcal{A}$.

Замечание 5.1. Как показывает Пример 6.2, если $\mathcal{A}$ — совершенное множество, то отображения из СИФ не обязаны быть инъективными на $\mathcal{A}$. Таким образом, условие инъективности отображений из СИФ в Теореме 5.1 является только достаточным.

Теорема 5.2. Пусть $\mathcal{A}$ — аттрактор СИФ $S = \{f_1, \dots, f_k\}$, $k > 1$, λ_i — коэффициент сжатия отображения f_i , $i \in \Sigma = \{1, \dots, k\}$. Если:

- 1) неподвижные точки хотя бы двух отображений из системы S различны;
- 2) $f_i|_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ инъективно $\forall i \in \Sigma$;
- 3) $\sum_{i=1}^k \lambda_i < 1$,

то аттрактор $\mathcal{A}$ является канторовым множеством.

Доказательство. Поскольку выполнены условия Теоремы 5.1, то аттрактор $\mathcal{A}$ является совершенным множеством. Согласно [1, с. 727] (Утверждение 9) из условия 3) Теоремы 5.2 вытекает, что аттрактор $\mathcal{A}$ — вполне несвязное множество. Таким образом, $\mathcal{A}$ является канторовым множеством. $\square$

Замечание 5.2. Как показывает Пример 6.4, если СИФ $S = \{f_1, \dots, f_k\}$, $k > 1$, является вполне несвязной, а аттрактор $\mathcal{A}$ — канторовым множеством, из этого, вообще говоря, не следует, что $\sum_{i=1}^k \lambda_i < 1$. Таким образом, условие 3) Теоремы 5.2 является только достаточным.

Замечание 5.3. Как показывает Пример 6.5, условия 1)–3) Теоремы 5.2 не гарантируют, что СИФ S будет вполне несвязной, а если аттрактор $\mathcal{A}$ СИФ S — канторово множество, то из этого, вообще говоря, не следует, что $f_i(\mathcal{A}) \cap f_j(\mathcal{A}) = \emptyset$ $\forall i \neq j$, а, следовательно, не вытекает вполне несвязность СИФ S .

6. Примеры

Пример 6.1. Пусть СИФ $S = \{f_1, f_2\}$ задана на вещественной прямой $\mathbb{R}$ отображениями $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, где $f_1(x) = \frac{x}{2}$, $f_2(x) = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Аттрактор $\mathcal{A}$ СИФ S представляет собой счетное вполне несвязное компактное множество

$$\mathcal{A} = \{0, 1, \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}\}.$$

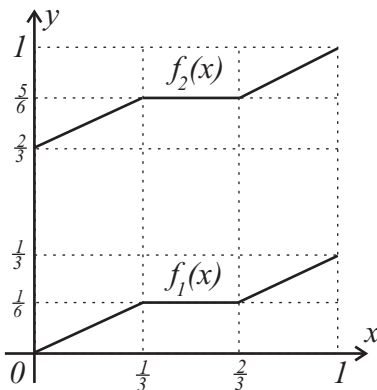
Поскольку $\mathcal{A}$ счетное, то СИФ S не является вполне несвязной. Таким образом, вполне несвязность аттрактора $\mathcal{A}$ СИФ S не означает вполне несвязность СИФ S , а условие $\lambda_1 + \lambda_2 < 1$ не влечет за собой того, что аттрактор $\mathcal{A}$ является канторовым множеством.

Пример 6.2. Пусть отображения $f_i: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $i = 1, 2$, задаются равенствами

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \in \left[0, \frac{1}{3}\right); \\ \frac{1}{6}, & x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right); \\ \frac{3x-1}{6}, & x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right], \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} \frac{3x+4}{6}, & x \in \left[0, \frac{1}{3}\right); \\ \frac{5}{6}, & x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right); \\ \frac{x+1}{2}, & x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]. \end{cases}$$

Графики функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ представлены на Рис. 6.1.

Тогда аттрактор $\mathcal{A}$ СИФ $S = \{f_1, f_2\}$ представляет собой два отрезка: $\mathcal{A} = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Действительно, $f_1(\mathcal{A}) = \left[0, \frac{1}{3}\right]$, $f_2(\mathcal{A}) = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, откуда $f_1(\mathcal{A}) \cup f_2(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

Рис. 6.1. Графики функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ Fig. 6.1. Graphs of functions $f_1(x)$, $f_2(x)$

Отметим, что $f_1(\mathcal{A}) \cap f_2(\mathcal{A}) = \emptyset$. Следовательно, условие $f_1(\mathcal{A}) \cap f_2(\mathcal{A}) = \emptyset$ не гарантирует того, что S — вполне несвязная СИФ, а аттрактор $\mathcal{A}$ — вполне несвязное множество.

Поскольку $f_1(\frac{1}{3}) = f_1(\frac{2}{3}) = \frac{1}{6}$, $f_2(\frac{1}{3}) = f_2(\frac{2}{3}) = \frac{5}{6}$, то отображения $f_1|_{\mathcal{A}}$ и $f_2|_{\mathcal{A}}$ не являются инъективными. Таким образом, совершенность аттрактора $\mathcal{A}$ не влечет инъективности отображений $f_1|_{\mathcal{A}}$ и $f_2|_{\mathcal{A}}$.

Так как коэффициенты сжатия λ_1 и λ_2 отображений f_1 и f_2 равны $1/2$, то $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Следовательно, из равенства $f_1(\mathcal{A}) \cap f_2(\mathcal{A}) = \emptyset$ не вытекает $\lambda_1 + \lambda_2 < 1$.

Как известно ([11], Теорема 2.5), если для аттрактора $\mathcal{A}$ СИФ $S = \{f_1, f_2\}$ выполнено условие $f_1(\mathcal{A}) \cap f_2(\mathcal{A}) \neq \emptyset$, то $\mathcal{A}$ является связным множеством. Поэтому данный пример также показывает, что альтернатива быть аттрактору $\mathcal{A}$ СИФ $S = \{f_1, f_2\}$ связным или вполне несвязным множеством имеет место при условии инъективности отображений $f_1|_{\mathcal{A}}$ и $f_2|_{\mathcal{A}}$ и в общем случае неверна.

Пример 6.3. Определим отображения $f_j: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $j = 1, 2$, по формулам

$$f_1(z) = \lambda iz, \quad f_2(z) = \lambda i(z - 1) + 1, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \lambda \in (0, 1).$$

Неподвижными точками преобразований f_1 и f_2 являются точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1$ соответственно. Отображение f_j представляет собой композицию поворота плоскости против часовой стрелки на угол $\pi/2$ вокруг точки z_j и сжатия с коэффициентом λ и центром в z_j , $j = 1, 2$.

Как показано в [9] (Пример 8.3), при $\lambda \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ аттрактор $\mathcal{A}$ СИФ $S = \{f_1, f_2\}$ представляет собой прямоугольник P_λ с вершинами в точках

$$z_A = \frac{1}{1 - \lambda^2}, \quad z_B = \frac{\lambda i}{1 - \lambda^2}, \quad z_C = \frac{-\lambda^2}{1 - \lambda^2}, \quad z_D = 1 - \frac{\lambda i}{1 - \lambda^2},$$

а при $\lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}$ — канторово множество в прямоугольнике P_λ .

Отметим, что при $\lambda \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ сумма коэффициентов сжатия отображений f_1 и f_2 удовлетворяет неравенству $\lambda + \lambda \geq 1$, при этом аттрактор $\mathcal{A}$ — канторово множество. Итак, условие $\lambda_1 + \lambda_2 < 1$ в Теореме 4.1 является только достаточным, но не необходимым.

Пример 6.4. Пусть точки A_i , $i = 1, \dots, 6$, являются вершинами правильного шестиугольника P на плоскости $\mathbb{R}^2$, $f_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i = 1, \dots, 6$, — гомотетия с коэффициентом λ_i и центром в точке A_i . Известно ([12], Пример 3.1), что при $\lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_6 = \frac{1}{4}$, $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_5 = \frac{3}{10}$ аттрактор $\mathcal{A}$ СИФ $S = \{f_1, \dots, f_6\}$ является канторовым множеством в P , при этом $\sum_{i=1}^6 \lambda_i = \frac{33}{20} > 1$. Таким образом, условие 3) в Теореме 5.2 является только достаточным.

Пусть теперь $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/3$, $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 3/40$. Поскольку $\sum_{i=1}^6 \lambda_i = \frac{29}{30} < 1$ и все f_i из S инъективны, то согласно Теореме 5.2 аттрактор $\mathcal{A}$ является канторовым множеством. Отметим, что в этом случае $f_1(A_3) = f_2(A_6) \in \mathcal{A}$, откуда $f_1(\mathcal{A}) \cap f_2(\mathcal{A}) \neq \emptyset$, следовательно, S не является вполне несвязной.

Пример 6.5. Пусть отображения СИФ $S = \{f_1, f_2, f_3\}$ заданы формулами:

$$f_1(x, y) = \left(\frac{y}{3}, \frac{x}{3}\right), \quad f_2(x, y) = (\lambda_2(x-3) + 3, \lambda_2 y), \quad f_3(x, y) = (\lambda_3 x, \lambda_3(y-1) + 1),$$

где $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda_2 + \lambda_3 < 2/3$, $\lambda_2, \lambda_3 > 0$. Поскольку $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 1$ и отображения из S инъективны, то по Теореме 5.2 аттрактор $\mathcal{A}$ СИФ S является канторовым множеством (см. Рис. 6.2). Точки $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 1)$ лежат в аттракторе $\mathcal{A}$ как неподвижные точки отображений из S . Так как $f_1(3, 0) = f_3(0, 1) = (0, 1)$, то $(0, 1) \in f_1(\mathcal{A}) \cap f_3(\mathcal{A}) \neq \emptyset$. Следовательно, СИФ S не является вполне несвязной (см. Определение 2.2).

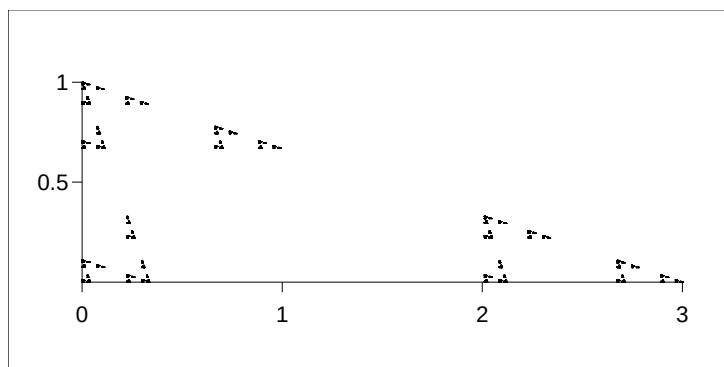


Рис. 6.2. Аттрактор $\mathcal{A}$ — канторово множество при $\lambda_2 = \lambda_3 = 0.33$

Fig. 6.2. The attractor $\mathcal{A}$ is a Cantor set in the case $\lambda_2 = \lambda_3 = 0.33$

Заметим, что этот пример можно обобщить для СИФ, состоящей из k отображений, где $k > 3$.

Таким образом, если аттрактор $\mathcal{A}$ СИФ S , состоящей из более чем двух отображений, является канторовым множеством, то из этого, вообще говоря, не следует вполне несвязность СИФ S .

Финансирование. Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hutchinson J. E. Fractals and Self-Similarity. *Indiana University Mathematics Journal*. 1981. Vol. 30, no. 5. P. 713–747
2. Barnsley M. F. Fractals everywhere. Boston: Academic Press, 1988. 394 p.
3. Swishchuk A., Islam S. Random dynamical systems in finance. New York: CRC Press, 2016. 357 p. DOI: 10.1201/b14989
4. Acemoğlu D., Como G., Fagnani F., Ozdaglar A. Opinion fluctuations and disagreement in social networks. *Mathematics of Operations Research*. 2012. Vol. 38, no. 1. P. 1–27. DOI: 10.1287/moor.1120.0570
5. Gaspard P. Iterated function systems for DNA replication *Phys. Rev. E*. 2017. Vol. 96. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.042403
6. Lesniak K., Snigireva N., Strobin F. Weakly contractive iterated function systems and beyond: a manual. *Journal of Difference Equations and Applications*. 2020. Vol. 26, no. 8. P. 1114–1173. DOI: 10.1080/10236198.2020.1760258
7. Khumalo M., Nazir T., Makhoshi V. Generalized iterated function system for common attractors in partial metric spaces *AIMS Mathematics*. 2022. Vol. 7, no. 7. P. 13074–13103. DOI: 10.3934/math.2022723
8. Abraham I. The Invariant Measure for a Countable Generalized Iterated Function System *Mediterr. J. Math.* 2024. Vol. 21. DOI: 10.1007/s00009-024-02751-9
9. Багаев А. В. Аттракторы полугрупп, порожденных конечным семейством сжимающих преобразований полного метрического пространства // *Журнал Среднево́лжского математического общества*. 2024. Т. 26, № 4. С. 359–375. DOI: 10.15507/2079-6900.26.202404.359-375
10. Falconer K. J. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. New York: John Wiley and Sons, 2014. 400 p.
11. Yamaguti M., Hata M., Kigami J. Translations of Mathematical Monographs. Mathematics of Fractals. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. Vol. 167. 96 p. DOI: 10.1090/mmono/167
12. Багаев А. В. Об одном классе самоаффинных множеств на плоскости, заданных шестью гомотетиями // *Журнал Среднево́лжского математического общества*. 2023. Т. 25, № 1. С. 519–530. DOI: 10.15507/2079-6900.25.202301.519-530

*Поступила 13.06.2025; доработана после рецензирования 10.08.2025;
принята к публикации 27.08.2025*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. J. E. Hutchinson, “Fractals and self-similarity”, *Indiana Univ. Math. J.*, **30** (1981), 713–747.
2. M. F. Barnsley, *Fractals everywhere*, Academic Press, Boston, 1988, 394 p.
3. A. Swishchuk, S. Islam, *Random dynamical systems in finance*, CRC Press, New York, 2012 DOI: 10.1201/b14989, 357 p.
4. D. Acemoğlu, G. Como, F. Fagnani, A. Ozdaglar, “Opinion fluctuations and disagreement in social networks”, *Mathematics of Operations Research*, **38**:1 (2013), 1–27. DOI: 10.1287/moor.1120.0570
5. P. Gaspard, “Iterated function systems for DNA replication”, *Phys. Rev. E.*, **96** (2017). DOI: 10.1103/PhysRevE.96.042403
6. K. Lesniak, N. Snigireva, F. Strobini, “Weakly contractive iterated function systems and beyond: a manual”, *Journal of Difference Equations and Applications*, **26** (2020), 1114–1173. DOI: 10.1080/10236198.2020.1760258
7. M. Khumalo, T. Nazir, V. Makhoshi, “Generalized iterated function system for common attractors in partial metric spaces”, *J. AIMS Mathematics*, **7** (2022), 13074–13103. DOI: 10.3934/math.2022723
8. I. Abraham, “The Invariant Measure for a Countable Generalized Iterated Function System”, *Mediterr. J. Math.*, **21** (2024). DOI: 10.1007/s00009-024-02751-9
9. A. V. Bagaev, “Attractors of semigroups generated by a finite family of contraction transformations of a complete metric space”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **26** (2024), 359–375 (In Russ.). DOI: 10.15507/2079-6900.26.202404.359-375
10. K. J. Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley and Sons, New York, 2014, 368 p.
11. M. Yamaguti, M. Hata, J. Kigami, *Mathematics of Fractals*, American Mathematical Society, Providence, 1997 DOI: 10.1090/mmono/167, 90 p.
12. A. V. Bagaev, “On a class of self-affine sets on the plane given by six homotheties”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **25** (2023), 519–530 (In Russ.). DOI: 10.15507/2079-6900.25.202301.519-530

Submitted 13.06.2025; Revised 10.08.2025; Accepted 27.08.2025

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.