

DOI 10.15507/2079-6900.27.202502.185-228

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 512.53

## Ранги планарности полугрупповых многообразий, порожденных полугруппами четвертого порядка

Д. В. Соломатин

ФГБОУ ВО «ОмГПУ» (г. Омск, Российская Федерация)

**Аннотация.** В данной статье проводится классификация многообразий, порожденных полугруппами четвертого порядка, по их рангам планарности. Цель исследования заключается в установлении полного перечня возможных значений рангов планарности и выявлении основных факторов, определяющих возможность плоской укладки графов Кэли свободных полугрупп рассматриваемых многообразий. Применяются методы теории графов и алгебры тождеств, используя инновационные алгоритмические подходы для проверки равенств посредством автоматизированных систем доказательства Prover9 и Mace4. Существующие плоские укладки для графов Кэли рассматриваемых полугрупп представлены на рисунках. В случае отсутствия планарности указывается конкретный обнаруженный запрещенный минор: полный граф пятого порядка или полный двудольный граф. Особое внимание уделяется статистической обработке полученных результатов методом главных компонент и построению иерархической кластеризации. На рисунках приведены иерархические деревья, факторные плоскости, корреляционные круги, столбцевые диаграммы разложения общей инерции по координатным осям. Хотя и ранее планарность графа Кэли свободной полугруппы многообразия интуитивно связывалась со степенью сложности определяющих тождеств, в данной работе эта зависимость впервые получает строгое количественное выражение, приведенное в таблицах. В рамках исследования вводятся вспомогательные параметры, что позволяет значительно повысить объяснительную силу модели и разделить многообразия на группы по топологическим характеристикам. В результате анализа установлено, что ведущими факторами, влияющими на значение рангов, являются параметры, отражающие разности позиций символа «z» в тождествах базисного набора.

**Ключевые слова:** граф Кэли, идемпотентные и неидемпотентные полугруппы, перестановочные и неперестановочные полугруппы, полугрупповые многообразия, ранги планарности, метод главных компонент

**Для цитирования:** Соломатин Д. В. Ранги планарности полугрупповых многообразий, порожденных полугруппами четвертого порядка // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2025. Т. 27, № 2. С. 185–228. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202502.185-228

*Об авторах:*

**Соломатин Денис Владимирович**, к.ф.-м.н., доцент кафедры математики и методики обучения математике, ФГБОУ ВО «ОмГПУ» (644099, Россия, г. Омск, наб. Тухачевского, д. 14), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9356-9890>, [solomatin\\_dv@omgpu.ru](mailto:solomatin_dv@omgpu.ru)



MSC2020 20M07

# Planarity ranks of semigroup varieties generated by semigroups of order four

D. V. Solomatin

*Omsk State Pedagogical University (Omsk, Russian Federation)*

**Abstract.** This paper classifies semigroup varieties generated by fourth-order semigroups according to their planarity ranks. The aim of the study is to establish a complete list of possible values of planarity ranks and to identify the main factors determining the possibility of planar stacking of Cayley graphs of free semigroups of the considered varieties. Methods from graph theory and algebras of identities are applied, using innovative algorithmic approaches to verify equality via the automated proof systems Prover9 and Mace4. The existing flat graph stackings for the Cayley graphs of the semigroups under consideration are shown in the figures. If there is no planarity, the particular forbidden minor discovered is indicated: a complete fifth-order graph or a complete bipartite graph containing three vertices in each of the parts. Special attention is paid to the statistical processing of the obtained results by the principal components analyse and the construction of hierarchical clustering. The figures show hierarchical trees, factor planes, correlation circles, and column diagrams of general inertia decomposition along coordinate axes. Although the planarity of the Cayley graph for a free semigroup of a manifold was previously intuitively associated with the complexity degree of the defining identities, in this paper this dependence is for the first time given a rigorous quantitative expression, depicted in tables. Within the framework of the study, auxiliary parameters are introduced, which allows to significantly increase the explanatory power of the model and divide manifolds into groups according to topological characteristics. As a result of the analysis it is established that the leading factors influencing the value of ranks are the parameters reflecting the differences of positions of the symbol «z» in the basis identities.

**Keywords:** Cayley graph, idempotent and non-idempotent semigroups, permutable and non-permutable semigroups, semigroup varieties, planarity ranks, principal component analysis

**For citation:** *D. V. Solomatin. Planarity ranks of semigroup varieties generated by semigroups of order four. Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 27:2(2025), 185–228. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202502.185-228*

*About the authors:*

**Denis V. Solomatin**, Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, Department of Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Omsk State Pedagogical University (14 Tukhachevsky Emb., Omsk 644099, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9356-9890>, [solomatin\\_dv@omgpu.ru](mailto:solomatin_dv@omgpu.ru)

## 1. Введение

Тематика настоящей статьи берет своё начало с представленной Л.М. Мартыновым развёрнутой мотивации к изучению понятия ранга планарности для полугрупповых многообразий [1]. Напомним, что рангом планарности полугруппового многообразия

называется наибольшее количество образующих свободной полугруппы данного многообразия, относительно которых граф Кэли этой полугруппы планарен. Исторически первая полная классификация полугрупповых многообразий по рангам планарности была построена в классе многообразий коммутативных моноидов [2]. Сравнительно недавно была завершена классификация многообразий порожденных полугруппами третьего порядка [3]. Продолжая исследования в направлении увеличения порядка порождающих полугрупп зададимся вопросом классификации многообразий порожденных полугруппами четвертого порядка с целью получения в дальнейшем возможного обобщения на полугруппы произвольного порядка.

Изучение многообразий полугрупп, порожденных полугруппами четвертого порядка, важно по ряду объективных причин. Полугруппы четвертого порядка являются одними из самых простых нетривиальных алгебраических структур. Изучая их, мы получаем представление о фундаментальных свойствах и поведении более сложных полугрупп и алгебраических систем. Многообразия полугрупп определяются наборами тождеств или уравнений, которым должны удовлетворять элементы полугрупп. Исследование полугрупп четвертого порядка помогает в выявлении и понимании этих эквациональных базисов, которые могут применяться к более крупным и сложным полугруппам. Изучение подмногообразий, порожденных полугруппами четвертого порядка, способствует более широкому пониманию решеточной структуры многообразий полугрупп. Это включает в себя выявление того, как различные подмногообразия соотносятся друг с другом и как они вписываются в общую классификацию полугрупп. Знания, полученные при изучении полугрупп порядка четыре, могут иметь применение в других областях математики, таких как теория групп, теория колец и даже теоретическая информатика. Сосредоточившись на полугруппах порядка четыре, попробуем заложить прочную основу для изучения более сложных алгебраических структур и их приложений.

Полугруппы четвертого порядка включают ряд разнообразных структур, таких как коммутативные и некоммутиативные полугруппы, регулярные и нерегулярные полугруппы, идемпотентные и неидемпотентные полугруппы. Вопросы планарности графов Кэли полугрупп некоторых из перечисленных классов всесторонне изучались и ранее, например, в серии работ [4–6]. Подобное разнообразие делает рассматриваемые полугруппы идеальными объектами для понимания того, как различные структурные свойства влияют на поведение и классификацию многообразий полугрупп по рангам планарности. Изучение этих небольших полугрупп помогает в разработке подробной системы классификации, так как понимая все возможные полугруппы заданного порядка, можно классифицировать их в различные разновидности, эти классификации послужат основой для понимания более сложных полугрупп и их взаимосвязей. Малые полугруппы, такие как полугруппы четвертого порядка, поддаются вычислениям, что позволяет исследователям использовать алгоритмические методы для исчерпывающего изучения их свойств. Этот вычислительный подход помогает формулировать гипотезы и доказывать теоремы методами математической статистики, которые невозможно реализовать вручную. Полугруппы могут моделировать различные процессы реального мира, такие как конечные автоматы в информатике, биологические процессы и экономические системы. Полугруппы четвертого порядка предоставляют простые, но нетривиальные модели для таких явлений. Понимание этих моделей может привести к пониманию более сложных систем, где полугруппы более высокого порядка имеют более сложные взаимосвязи. Кроме того, изучение полугрупп пересекается с другими областями математики, такими как теория колец, теория решеток и топология.

Полугруппы четвертого порядка часто служат фундаментальными примерами в этих связях. Например, понимание многообразий, порожденных этими полугруппами, может пролить свет на структуру определенных колец или топологию алгебраических многообразий.

В качестве дополнительной мотивации к изучению графов Кэли свободных полугрупп многообразий полугрупп, порожденных полугруппами четвертого порядка, осуществим краткий обзор передовых статей в русле обозначенной тематики. Работа [7] предоставляет глубокий анализ регулярности графов Кэли, полученных из полугрупп, что имеет решающее значение при изучении устойчивости структурных свойств графов. Авторы детально описывают алгоритмические подходы для классификации и доказательства регулярности, что позволяет использовать их методы в приложениях. Соотношение между регулярностью и топологическими ограничениями (например, через критерии раскраски или ограничения числа граней) становится особенно значимым в случае конечных алгебраических систем, таких как полугруппы четвёртого порядка. В работе [8] предложен подход, основанный на анализе графов, сформированных по принципу пересечения мощностей в циклических группах. Несмотря на очевидные различия между группами и полугруппами, применённые методы позволяют выявить пересекающиеся подструктуры, что используется при изучении многообразий, полученных из конечных полугрупп. Сопоставляя эти подходы с рассматриваемой темой, можно заметить, что комбинация циклических свойств и пересечений влияет на возможность планарного представления.

Авторы исследования [9] вводят понятие направленных сильно регулярных графов Кэли, построенных на основе дициклических групп. Такой взгляд расширяет традиционные рамки симметричных конструкций, демонстрируя, что даже при наличии направления в рёбрах сохраняются определённые регулярные свойства. При рассмотрении конечных полугрупп идеи данной работы позволяют провести параллели и заимствовать методы для анализа графа свободной полугруппы многообразия. Для оценки планарности часто обращаются к раскраске графов. В этом контексте статья [10] становится особенно ценной. Авторы показывают, как минимальная раскраска графов Кэли может служить индикатором топологической сложности, а установленные ими критерии позволяют оценить, насколько близка данная структура к планарной. Эти результаты напрямую перекликаются с поставленной нами задачей определения рангов планарности, поскольку позволяют установить количественные границы и условия для существования планарного графа.

Ещё один важный вклад в аргументацию исследований графов полугрупп вносит работа [11], в которой приводится характеристика конечно-простых диграфов, ассоциированных с полугруппами. Такой анализ позволяет выделить фундаментальные компоненты, ответственные за топологические свойства графа. Применённые методы декомпозиции и структурного анализа позволяют перенести их на изучение многообразий порожденных полугруппами четвёртого порядка, где простота структуры становится одним из ключевых критериев планарности. Работа [12] содержит вариацию на тему графов Кэли для циклических групп составного порядка. Исходя из результатов данной работы, можно утверждать, что даже небольшое изменение на базе стандартного графового представления способно существенно сказаться на топологических свойствах полученной структуры. Этот пример демонстрирует, как аналогичные модификации могут быть применены для изучения влияния композиционных свойств полугрупп четвёртого порядка на ранги планарности их многообразий.

Интересный подход к анализу плоских графов реализуется в [13], где рассматри-

вается гипотеза Руднефа в четырёхмерном пространстве. Несмотря на то, что тема исследования затрагивает вопросы многомерной геометрии, методы экспериментальной математики, применённые авторами, дают ценное представление о том, как пространственные соображения могут быть интегрированы в анализ планарных структур. Переход от четырёхмерного случая к изучению плоских полугрупп позволяет выработать новые гипотезы относительно соотношения размерности и топологической простоты графа. Наконец, статья [14] демонстрирует, как геометрическое моделирование с использованием конфигураций соприкасающихся прямоугольников может оказаться мощным инструментом для анализа дискретных структур. Подход, основанный на визуализации касания и пространственного расположения объектов, позволяет количественно оценивать критерии планарности, что натолкнуло нас на мысль о статистической интерпретации рангов планарности многообразий, возникающих из конечных полугрупп. Здесь геометрическая интуиция становится дополнением строгому алгебраическому анализу.

Таким образом, интеграция всех этих работ позволяет создать прочный теоретический фундамент исследования рангов планарности многообразий полугрупп, порождённых полугруппами четвёртого порядка. Объединение результатов по анализу структур графов, методам раскраски, алгоритмическим подходам к определению регулярности и геометрической интерпретации сложных дискретных объектов способствует формированию всесторонней методологии. Такой мультидисциплинарный подход не только расширяет теоретическую базу нашей работы, но и открывает перспективы для дальнейших эмпирических исследований и разработок новых методов в абстрактной алгебре и дискретной математике.

Резюмируя сказанное приходим к выводу: находясь в русле актуальной международной тематики полугруппы четвертого порядка доступны студентам и начинающим исследователям, что делает их прекрасными учебными пособиями. Их графы Кэли доставляют конкретные примеры, иллюстрирующие абстрактные концепции в теории полугрупп и алгебре. Работа с этими небольшими структурами помогает развить интуицию и фундаментальные знания, которые необходимы для изучения более сложных тем в математике. Разрабатывать новые и совершенствовать существующие алгоритмы для классификации и анализа полугрупп можно тестируя их на полугруппах четвертого порядка. Затем эти алгоритмы распространяются на полугруппы более высоких порядков, ибо на основе глубокого понимания свойств и особенностей малых полугрупп, нередко так формируются идеи, применимые к более широким классам алгебраических структур. Наконец, изучение полугрупп четвертого порядка часто приводит к формулированию новых гипотез и открытых проблем, решение которых способствует новым математическим открытиям.

## **2. Основные определения теории планарных графов Кэли, обозначения и вспомогательные результаты о конечно базированных многообразиях, порождённых полугруппами четвертого порядка**

Напомним некоторые определения и теоремы из теории графов и теории полугрупп используемые в контексте систематических исследований рангов планарности полугрупповых многообразий [15].

**Определение 2.1.** *Плоским графом называется обыкновенный граф, каждой*

вершине которого поставлена в соответствие точка плоскости, а рёбрам – непрерывные плоские линии без самопересечений, не имеющие общих точек кроме возможно общих вершин.

**Определение 2.2.** Два графа называются изоморфными друг другу тогда и только тогда, когда существует биективное отображение множества вершин одного графа на множество вершин другого графа сохраняющее отношение смежности вершин.

**Определение 2.3.** Всякий граф изоморфный плоскому называется планарным.

**Определение 2.4.** Два графа называются гомеоморфными друг другу, если они могут быть получены из одного и того же графа путём подразделения его рёбер.

**Теорема 2.1.** Граф является планарным тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа гомеоморфного полному графу  $K_5$ , содержащему 5 вершин, или полному двудольному графу  $K_{3,3}$ , содержащему по 3 вершины в каждой из долей.

**Определение 2.5.** Графом Кэли полугруппы  $S$  относительно множества образующих её элементов  $X$  называем ориентированный мультиграф  $\text{Caу}(S, X)$  с помеченными ребрами, множество вершин которого совпадает с  $S$ , а ребро начинающееся в вершине  $a$  и заканчивающееся в вершине  $b$  помечено элементом  $x \in X$  тогда и только тогда, когда в полугруппе  $S$  имеет место равенство  $ax = b$ . Левый граф Кэли  $\text{LCaу}(S, X)$  определяется двойственным образом путём замены равенства  $ax = b$  равенством  $xa = b$ .

**Определение 2.6.** Основой [левого] графа Кэли полугруппы  $S$  относительно множества образующих её элементов  $X$  называем обыкновенный граф  $\text{SCaу}(S, X)$  [ $\text{SLCaу}(S, X)$ ] полученный из исходного  $\text{Caу}(S, X)$  [ $\text{LCaу}(S, X)$ ] удалением меток, петель, направленности рёбер и заменой кратных дуг одним ребром соединяющим те же вершины.

**Определение 2.7.** Говорим, что полугруппа  $S$  допускает планарный [левый] граф Кэли, если относительно некоторого минимального множества неразложимых образующих  $X$  граф  $\text{SCaу}(S, X)$  [ $\text{SLCaу}(S, X)$ ] имеет плоскую укладку.

**Определение 2.8.** Рангом планарности многообразия  $\text{var}\{\sigma\}$  заданного системой тождеств  $\sigma$  называется такое натуральное число  $r_\pi(\text{var}\{\sigma\}) = n$ , что свободная  $n$ -порожденная полугруппа многообразия  $\text{var}\{\sigma\}$ , обозначаемая в дальнейшем как  $F_n(\text{var}\{\sigma\})$ , допускает планарный граф Кэли относительно  $n$ -элементного множества образующих, но относительно  $(n + 1)$ -элементного множества образующих свободная  $(n + 1)$ -порожденная полугруппа  $F_{n+1}(\text{var}\{\sigma\})$  многообразия  $\text{var}\{\sigma\}$  уже не допускает планарного графа Кэли. В случае, когда для нетривиального полугруппового многообразия  $\text{var}\{\sigma\}$  такого натурального  $n$  не существует говорим, что это многообразие имеет бесконечный ранг планарности и пишем  $r_\pi(\text{var}\{\sigma\}) = \infty$ .

**Определение 2.9.** Системе тождеств  $\sigma$  поставим в соответствие двойственную систему  $\overleftarrow{\sigma}$  всякое тождество которой сформировано из тождеств  $u = v$  системы  $\sigma$  путём написания слов  $u$  и  $v$  в обратной последовательности букв.

**Определение 2.10.** Многообразия (эквациональный класс) универсальных алгебр называется конечно базлируемым, если существует конечное подмножество тождеств многообразия, из которого следуют все остальные тождества.

**Определение 2.11.** Алгебра называется конечно базлируемой, если многообразия, которое она порождает, конечно базлируемо.

В работе [16] перечислены все конечно базлируемые многообразия, порожденные полугруппами четвертого порядка.

**Лемма 2.1.** [16]. Все возможные конечные базисы из тождеств от двух переменных для полугрупповых многообразий, порожденных полугруппами четвертого порядка с точностью до изоморфизма и с точностью до антиизоморфизма перечислены ниже. Первые девять формируют базисы тождеств многообразий, порожденных не идемпотентными и не перестановочными полугруппами четвертого порядка:

- m1)  $S(4, 4)$  и  $S(6, 17)$  имеют базис  $\{xux = x^2y = xy^2 = xy\}$ ;
- m2)  $S(4, 11)$  имеет базис  $\{x^2y = xy, xy^2 = xuy\}$ ;
- m3)  $S(4, 21)$  имеет базис  $\{x^2 = x^3, xux = x^2yx = xy^2x = xuyx^2 = xuyx = x^2y^2 = yxy\}$ ;
- m4)  $S(4, 22)$  имеет базис  $\{x^2 = x^3, xux = x^2yx = xy^2x = xuyx^2 = xuyx = yxy\}$ ;
- m5)  $S(4, 23)$  имеет базис  $\{x^2 = x^3, xux = yx^2, x^2y^2 = y^2x^2\}$ ;
- m6)  $S(4, 25)$  имеет базис  $\{xy = xy^2, xux = x^2y\}$ ;
- m7)  $S(5, 2)$  имеет базис  $\{x^2 = x^3, xux = x^2y\}$ ;
- m8)  $S(6, 23)$  имеет базис  $\{x = x^3, xux = x^2y\}$ ;
- m9)  $S(6, 25)$  имеет базис  $\{x = x^3, xux^2 = xy, xy^2x = xuyx\}$ .

Далее запишем конечные базисы тождеств для многообразий, порожденных остальными 116 полугруппами четвертого порядка.

*Коммутативные:*

- m10)  $S(5, 9)$ ,  $S(5, 12)$ ,  $S(5, 18)$ ,  $S(6, 8)$  и  $S(6, 11)$  имеют базис  $\{xy = yx, x = x^2\}$ ;
- m11)  $S(7, 25)$  имеет базис  $\{xy = yx, xy^2 = x\}$ ;
- m12)  $S(5, 14)$ ,  $S(6, 13)$ ,  $S(6, 18)$ ,  $S(7, 8)$ ,  $S(7, 10)$ ,  $S(7, 12)$  и  $S(7, 18)$  имеют базис  $\{xy = yx, x = x^3\}$ ;
- m13)  $S(6, 24)$  и  $S(7, 22)$  имеют базис  $\{xy = yx, x = x^4\}$ ;
- m14)  $S(8, 1)$  имеют базис  $\{xy = yx, xy^4 = x\}$ .
- m15)  $S(3, 3)$ ,  $S(3, 21)$ ,  $S(3, 24)$ ,  $S(3, 25)$ ,  $S(5, 11)$ ,  $S(6, 2)$ ,  $S(6, 4)$  и  $S(6, 10)$  имеют базис  $\{xy = yx, xy^2 = xy\}$ ;
- m16)  $S(3, 10)$  имеет базис  $\{xy = yx, xyz = x^2\}$ ;
- m17)  $S(3, 1)$  имеет базис  $\{xy = yx, xy^2 = xy, x^2 = y^2\}$ ;
- m18)  $S(3, 13)$ ,  $S(4, 15)$ ,  $S(4, 17)$ ,  $S(4, 19)$ ,  $S(4, 20)$ ,  $S(5, 5)$ ,  $S(5, 6)$  и  $S(6, 7)$  имеют базис  $\{xy = yx, x^2 = x^3\}$ ;
- m19)  $S(4, 3)$ ,  $S(6, 16)$ ,  $S(6, 21)$ ,  $S(7, 5)$ ,  $S(7, 9)$  и  $S(7, 15)$  с базисом  $\{xy=yx, xy^3=xy\}$ ;
- m20)  $S(7, 3)$ ,  $S(7, 13)$  и  $S(7, 23)$  имеют базис  $\{xy = yx, x^2 = y^2, xy^3 = xy\}$ ;
- m21)  $S(5, 8)$ ,  $S(7, 7)$  и  $S(7, 17)$  имеют базис  $\{xy = yx, x^2 = x^4\}$ ;
- m22)  $S(7, 21)$  и  $S(7, 24)$  имеют базис  $\{xy = yx, xyz^3 = xy\}$ ;
- m23)  $S(3, 17)$  и  $S(6, 3)$  имеют базис  $\{xy = yx, xyz^2 = xyz\}$ ;
- m24)  $S(3, 11)$  и  $S(3, 16)$  имеют базис  $\{xy = yx, xyz = x^3\}$ ;
- m25)  $S(4, 18)$  имеет базис  $\{xy = yx, x^3 = x^4\}$ ;
- m26)  $S(3, 2)$  и  $S(3, 20)$  имеют базис  $\{xy = yx, x^3 = y^3, xyz^3 = xyz\}$ ;
- m27)  $S(7, 4)$  и  $S(7, 14)$  имеют базис  $\{xy = yx, xy^2 = xz^2, xyz^3 = xyz\}$ ;
- m28)  $S(3, 12)$  имеет базис  $\{xy = yx, x^2y = xy^2, xyzw = x^4\}$ .

*Перестановочные:*

m29)  $S(3, 18)$  имеет базис  $\{xyz = xzy, xyz = yxz, xyz = xy^2\}$ ;

m30)  $S(3, 4)$  имеет базис  $\{xyz = xzy, xyz = yxz, xyz = x^2\}$ ;

m31)  $S(3, 5)$  имеет базис  $\{xyz = xzy, xyz = yxz, xyz = x^3\}$ ;

m32)  $S(7, 2)$  имеет базис  $\{xy = x\}$ ;

m33)  $S(5, 10), S(5, 13), S(5, 16), S(5, 17), S(5, 20), S(5, 22), S(5, 23), S(6, 9), S(6, 12)$

и  $S(6, 15)$  имеют базис  $\{xyz = xzy, x = x^2\}$ ;

m34)  $S(7, 20)$  имеет базис  $\{xyz = xzy, xy^2 = x\}$ ;

m35)  $S(5, 25)$  и  $S(7, 11)$  имеют базис  $\{xyz = xzy, x = x^3\}$ ;

m36)  $S(3, 9), S(4, 12)$  и  $S(4, 14)$  имеют базис  $\{xy = x^2\}$ ;

m37)  $S(3, 23), S(4, 1), S(4, 13), S(5, 19)$  и  $S(6, 6)$  имеют базис  $\{xyz = xzy, x^2y = xy, xy^2 = xy\}$ ;

m38)  $S(4, 9)^{\text{op}}, S(4, 24)$  и  $S(5, 3)$  имеют базис  $\{xyz = xzy, xy^2 = xy\}$ ;

m39)  $S(5, 1)$  и  $S(5, 7)$  имеют базис  $\{xyz = xzy, x^2 = x^3\}$ ;

m40)  $S(3, 19)$  имеет базис  $\{xyz = xzy, xyz = x^3\}$ ;

m41)  $S(3, 15)$  и  $S(4, 16)$  имеют базис  $\{xyz = yxz, x^2 = x^3, x^2y^2 = y^2x^2\}$ ;

m42)  $S(3, 6), S(3, 7), S(3, 8), S(3, 22), S(4, 2), S(4, 6), S(4, 7)$  и  $S(6, 5)$  имеют базис  $\{xyz = yxz, x^2y = xy, xy^2 = yx^2\}$ ;

m43)  $S(4, 10), S(7, 6)$  и  $S(7, 16)^{\text{op}}$  имеют базис  $\{xyz = yxz, x^2y^2 = y^2x^2, x^3y = xy, xy^3 = yx^3\}$ ;

m44)  $S(7, 19)$  имеет базис  $\{xyz = xz, x = x^2\}$ ;

m45)  $S(5, 24)$  имеет базис  $\{xyxz = x^2yz, xyzy = xzy^2, x = x^2\}$ ;

m46)  $S(4, 5)$  и  $S(4, 8)$  с базисом  $\{xyxz = x^2yz, xyzy = xzy^2, x^2y = xy, xyz^2 = xzy^2\}$ ;

m47)  $S(3, 14)$  имеет базис  $\{xy^2z = xyz, yxy = yxy, x^2 = x^3\}$ ;

m48)  $S(5, 4)$  имеет базис  $\{xy^2 = xy, x^2y = x^2\}$ .

*Идемпотентные неперестановочные:*

m49)  $S(5, 15), S(5, 21), S(6, 1), S(6, 14), S(6, 19), S(6, 20)$  и  $S(7, 1)$  имеют базис  $\{yxx = xy, x = x^2\}$ ;

m50)  $S(6, 22)$  имеет базис  $\{yxxz = xyz, x = x^2\}$ .

### 3. Классификация многообразий порожденных полугруппами четвертого порядка по рангам планарности

**Теорема 3.1.** Ранги планарности полугрупповых многообразий порожденных полугруппами четвертого порядка равны 1, 2, 3, 4 или  $\infty$ . При этом для порожденных не идемпотентными и не перестановочными полугруппами четвертого порядка имеют место равенства:

$$r_{\pi}(\text{var}\{m1\}) = \infty, r_{\pi}(\text{var}\{\overleftarrow{m1}\}) = 2, r_{\pi}(\text{var}\{m2\}) = \infty, r_{\pi}(\text{var}\{\overleftarrow{m2}\}) = 2,$$

$$r_{\pi}(\text{var}\{m3\}) = 2, r_{\pi}(\text{var}\{\overleftarrow{m3}\}) = 2, r_{\pi}(\text{var}\{m4\}) = 2, r_{\pi}(\text{var}\{\overleftarrow{m4}\}) = 2,$$

$$r_{\pi}(\text{var}\{m5\}) = 2, r_{\pi}(\text{var}\{\overleftarrow{m5}\}) = 2, r_{\pi}(\text{var}\{m6\}) = \infty, r_{\pi}(\text{var}\{\overleftarrow{m6}\}) = 2,$$

$$r_{\pi}(\text{var}\{m7\}) = 3, r_{\pi}(\text{var}\{\overleftarrow{m7}\}) = 2, r_{\pi}(\text{var}\{m8\}) = 3, r_{\pi}(\text{var}\{\overleftarrow{m8}\}) = 1,$$

$$r_{\pi}(\text{var}\{m9\}) = 3, r_{\pi}(\text{var}\{\overleftarrow{m9}\}) = 2;$$

для коммутативных:

$$r_{\pi}(\text{var}\{m10\}) = r_{\pi}(\text{var}\{\overleftarrow{m10}\}) = 3, r_{\pi}(\text{var}\{m11\}) = r_{\pi}(\text{var}\{\overleftarrow{m11}\}) = 3,$$

$$\begin{aligned}
r_\pi(\text{var}\{m12\}) &= r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m12}\}) = 2, & r_\pi(\text{var}\{m13\}) &= r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m13}\}) = 1, \\
r_\pi(\text{var}\{m14\}) &= r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m14}\}) = 1, & r_\pi(\text{var}\{m15\}) &= r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m15}\}) = 3, \\
r_\pi(\text{var}\{m16\}) &= r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m16}\}) = 3, & r_\pi(\text{var}\{m17\}) &= r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m17}\}) = \infty, \\
r_\pi(\text{var}\{m18\}) &= r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m18}\}) = 2, & r_\pi(\text{var}\{m19\}) &= r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m19}\}) = 2, \\
r_\pi(\text{var}\{m20\}) &= r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m20}\}) = 2, & r_\pi(\text{var}\{m21\}) &= r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m21}\}) = 2, \\
r_\pi(\text{var}\{m22\}) &= r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m22}\}) = 1, & r_\pi(\text{var}\{m23\}) &= r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m23}\}) = 2, \\
r_\pi(\text{var}\{m24\}) &= r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m24}\}) = 3, & r_\pi(\text{var}\{m25\}) &= r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m25}\}) = 2, \\
r_\pi(\text{var}\{m26\}) &= r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m26}\}) = 3, & r_\pi(\text{var}\{m27\}) &= r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m27}\}) = 2, \\
r_\pi(\text{var}\{m28\}) &= r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m28}\}) = 2;
\end{aligned}$$

для перестановочных:

$$\begin{aligned}
r_\pi(\text{var}\{m29\}) &= \infty, & r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m29}\}) &= \infty, & r_\pi(\text{var}\{m30\}) &= \infty, & r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m30}\}) &= \infty, \\
r_\pi(\text{var}\{m31\}) &= \infty, & r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m31}\}) &= \infty, & r_\pi(\text{var}\{m32\}) &= \infty, & r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m32}\}) &= 4, \\
r_\pi(\text{var}\{m33\}) &= 4, & r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m33}\}) &= 3, & r_\pi(\text{var}\{m34\}) &= 3, & r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m34}\}) &= 2 \\
r_\pi(\text{var}\{m35\}) &= 2, & r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m35}\}) &= 1, & r_\pi(\text{var}\{m36\}) &= \infty, & r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m36}\}) &= 2, \\
r_\pi(\text{var}\{m37\}) &= 3, & r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m37}\}) &= 3, & r_\pi(\text{var}\{m38\}) &= 3, & r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m38}\}) &= 2, \\
r_\pi(\text{var}\{m39\}) &= 2, & r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m39}\}) &= 2, & r_\pi(\text{var}\{m40\}) &= \infty, & r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m40}\}) &= 2, \\
r_\pi(\text{var}\{m41\}) &= 2, & r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m41}\}) &= 2, & r_\pi(\text{var}\{m42\}) &= 3, & r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m42}\}) &= 3, \\
r_\pi(\text{var}\{m43\}) &= 1, & r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m43}\}) &= 2, & r_\pi(\text{var}\{m44\}) &= 4, & r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m44}\}) &= 4, \\
r_\pi(\text{var}\{m45\}) &= 4, & r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m45}\}) &= 4, & r_\pi(\text{var}\{m46\}) &= 3, & r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m46}\}) &= 2, \\
r_\pi(\text{var}\{m47\}) &= 2, & r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m47}\}) &= 2, & r_\pi(\text{var}\{m48\}) &= \infty, & r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m48}\}) &= 2;
\end{aligned}$$

для идемпотентных неперестановочных:

$$r_\pi(\text{var}\{m49\}) = \infty, \quad r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m49}\}) = 2, \quad r_\pi(\text{var}\{m50\}) = 4, \quad r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m50}\}) = 2.$$

Для доказательства теоремы вычислим ранг планарности каждого из полугрупповых многообразий, порожденных полугруппами четвертого порядка. Такие многообразия имеют базис тождеств описанный в Лемме 2.1. При этом для описания маршрута между вершинами  $v_1$  и  $v_n$  будет использоваться запись  $v_1 - v_2 - \dots - v_n$  которая означает, что в графе Кэли содержится  $n$  попарно различных вершин  $v_1, v_2, \dots, v_n$  таких, что во множестве образующих найдется элемент  $x_i \in X$  для которого  $v_i x_i = v_{i+1}$  или  $v_i = v_{i+1} x_i$  (либо  $x_i v_i = v_{i+1}$  или  $x_i v_i = v_{i+1}$ , в случае левого графа Кэли), при всех допустимых  $i = 1 \div (n - 1)$ . Проверить истинность найденных равенств и неравенств можно средствами Prover9 [17] и Mace4 [18] соответственно. Так, например, проверить равенство  $aab = ab$  в многообразии полугрупп заданном системой тождеств  $m1$  можно с помощью следующего запроса:

$$\begin{aligned}
& formulas(assumptions). \\
& (x * y) * z = x * (y * z). \\
& (x1 * x2) * x1 = (x1 * x1) * x2.
\end{aligned}$$

$$(x1 * x1) * x2 = (x1 * x2) * x2.$$

$$(x1 * x2) * x2 = x1 * x2$$

*end\_of\_list.*

*formulas(goals).*

$$(c1 * c1) * c2 = c1 * c2.$$

*end\_of\_list.*

Доказательство.

Граф Кэли циклической свободной полугруппы всякого многообразия планарен, поэтому будем с двух образующих начинать анализ планарности графа Кэли свободной полугруппы каждого из полугрупповых многообразий, порожденных полугруппами четвертого порядка.

Базис  $m1$ :

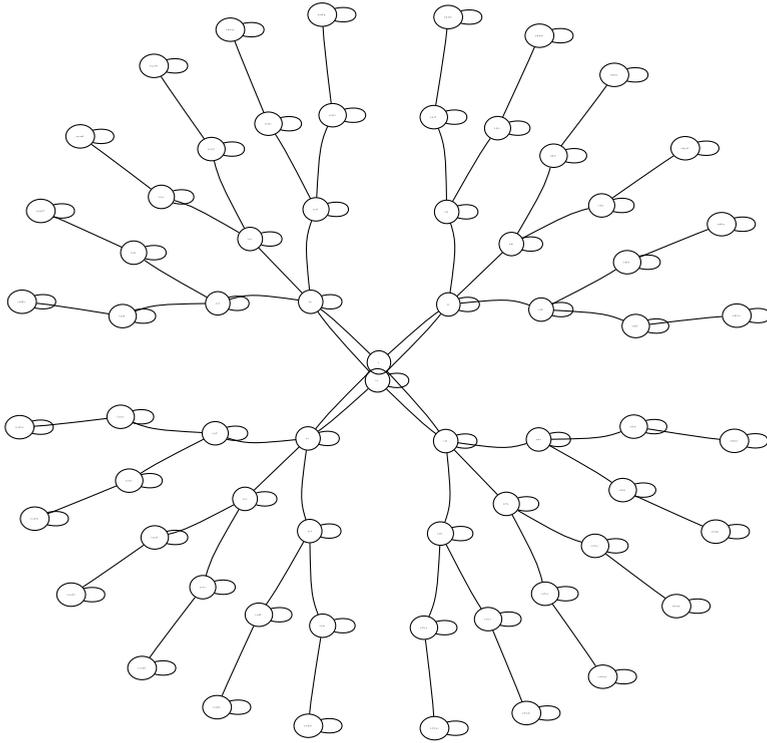
Анализируя свободные полугруппы многообразия, определяемого системой тождеств  $m1$  в первую очередь, заметим, что каждое тождество, которому удовлетворяют полугруппы данного многообразия, имеет такой вид  $u = v$ , что слова  $v$  и  $u$  начинаются с одной и той же буквы. Следовательно, граф Кэли  $n$ -порожденной свободной полугруппы состоит из  $n$  попарно изоморфных связных компонент. Все начинающиеся на одну и ту же букву вершины сформируют каждую из связных компонент. Единственно возможными циклами длины большей 2 в каждой из компонент будут циклы длины 3 на вершинах  $x, x^2, xy$ , где  $x \neq y$  принадлежат множеству образующих, относительно которого строится граф Кэли свободной полугруппы. Все эти циклы внутри одной связной компоненты графа, содержащей все вершины начинающиеся на  $x$ , будут иметь общее ребро  $\{x, x^2\}$ , но отличаться третьей вершиной  $y$ . Следовательно, могут быть уложены на плоскости без пересечения ребер последовательным сложением одного цикла внутри другого цикла. До каждой из вершин отличных от этих трех циклов будут произрастать деревья, то есть ациклические связные графы таким образом, что иных циклов не сформируется и плоская укладка основы графа  $Cay(F_n(\text{var}\{m1\}), X = \{x, y, \dots\})$  будет возможна для любого числа образующих  $|X| = n < \infty$ . Таким образом,  $r_\pi(\text{var}\{m1\}) = \infty$ . В качестве иллюстрации на Рис. 3.1 представлена одна из пяти попарно изоморфных связных компонент основы графа Кэли полугруппы  $F_5(\text{var}\{m1\})$ .

Плоская укладка графа  $SLCay(F_2(\text{var}\{\overline{m1}\}), \{a, b\})$  представлена на Рис. 3.2. Дальнейшее увеличение числа образующих приводит к появлению подграфа гомеоморфного графу  $K_{3,3}$  на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств  $\{ca, cba, cab\}$  и  $\{ba, bca, acb\}$ :  $ca - a - ba$ ;  $ca - bca$ ;  $ca - ac - c - bc - cb - acb$ ;  $cba - ba$ ;  $cba - bca$ ;  $cba - acb$ ;  $cab - ab - ba$ ;  $cab - bca$ ;  $cab - acb$ .

Базис  $m2$ :

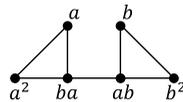
В основе графов Кэли свободных полугрупп многообразия  $\text{var}\{m2\}$  лежит связный граф, в котором любые два простых цикла имеют не более двух общих вершин. Это условие сильно ограничивает топологию графа и имеет важное значение в теории графов. Такой граф является планарным благодаря своему уникальному свойству: любые два простых цикла в нем имеют не более двух общих вершин. Это ограничивает количество пересечений между циклами, что позволяет размещать его на плоскости без пересечений ребер, так как позволяет «разделять» эти циклы в пространстве, сохраняя граф планарным. В качестве иллюстрации на Рис. 3.3 представлена одна из пяти попарно изоморфных связных компонент основы графа Кэли полугруппы  $F_5(\text{var}\{m2\})$ .

Плоская укладка графа  $SLCay(F_2(\text{var}\{\overline{m2}\}), \{a, b\})$  представлена на Рис. 3.4. Дальнейшее увеличение числа образующих приводит к появлению подграфа гомеоморфного



**Рис. 3.1.** Одна из пяти связных компонент основы графа Кэли полугруппы  $F_5(\text{var}\{m1\})$

**Fig. 3.1.** One of the five connected components of the Cayley graph base of the semigroup  $F_5(\text{var}\{m1\})$



**Рис. 3.2.** Плоская укладка графа  $SLCay(F_2(\text{var}\{m1\}), \{a, b\})$

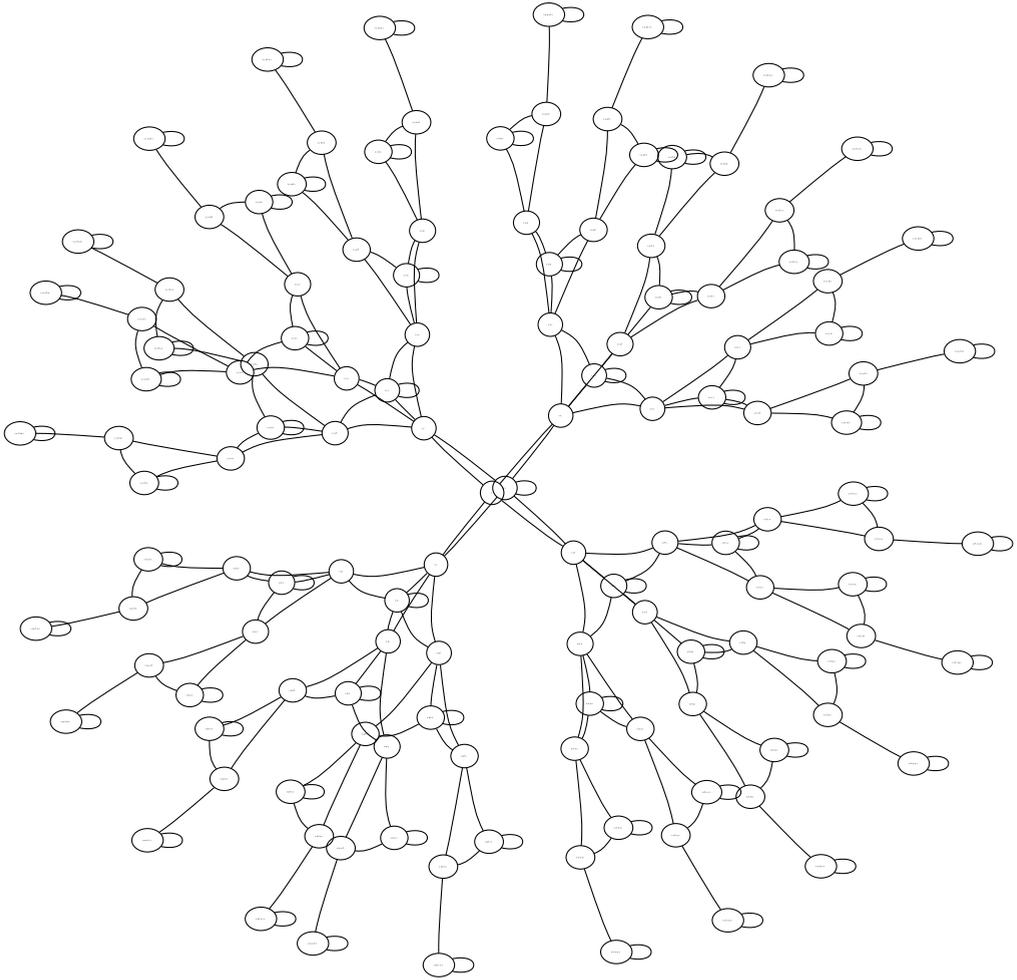
**Fig. 3.2.** Planar embedding of the graph  $SLCay(F_2(\text{var}\{m1\}), \{a, b\})$

графу  $K_{3,3}$  на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств  $\{a, b, c\}$  и  $\{a^2, b^2, c^2\}$ :  $a - a^2$ ;  $a - ba - aba - b^2$ ;  $a - ca - aca - c^2$ ;  $b - ab - ba^2 - a^2$ ;  $b - b^2$ ;  $b - cb - bcb - c^2$ ;  $c - ac - ca^2 - a^2$ ;  $c - bc - cb^2 - b^2$ ;  $c - c^2$ .

Базис  $m3$ :

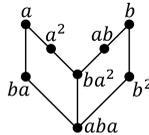
Графы Кэли свободных 2-порожденных полугрупп многообразий  $\text{var}\{m3\}$  и  $\text{var}\{\overleftarrow{m3}\}$  в основе своей имеют изображенные на Рис. 3.5 планарные графы.

А графы Кэли свободных  $n$ -порожденных полугрупп многообразий  $\text{var}\{m3\}$  и  $\text{var}\{\overleftarrow{m3}\}$ , при  $n \geq 3$ , в своей основе содержат подграф гомеоморфный  $K_{3,3}$  на следующих девяти маршрутах между вершинами из множеств  $\{a, a^2b, aca\}$  и  $\{a^2, aba, ac\}$ , с точностью до обращения слов:  $a - a^2$ ;  $a - ab - aba$ ;  $a - ac$ ;  $a^2b - a^2$ ;  $a^2b - aba$ ;  $a^2b - a^2bc - abca - acb - ac$ ;  $aca - a^2c - a^2$ ;  $aca - ac$ ;  $aca - ca - c - cb - bcb - bc - b - ba - aba$ ;



**Рис. 3.3.** Одна из пяти связанных компонент основы графа Кэли полугруппы  $F_5(\text{var}\{m_2\})$

**Fig. 3.3.** One of the five connected components of the Cayley graph base of the semigroup  $F_5(\text{var}\{m_2\})$



**Рис. 3.4.** Плоская укладка графа  $SLCay(F_2(\text{var}\{m_2\}), \{a, b\})$

**Fig. 3.4.** Planar embedding of the graph  $SLCay(F_2(\text{var}\{m_2\}), \{a, b\})$

$aca - ac.$

Базис  $m_4$ :

Графы Кэли свободных 2-порожденных полугрупп многообразий  $\text{var}\{m_4\}$  и  $\overleftarrow{\text{var}\{m_4\}}$

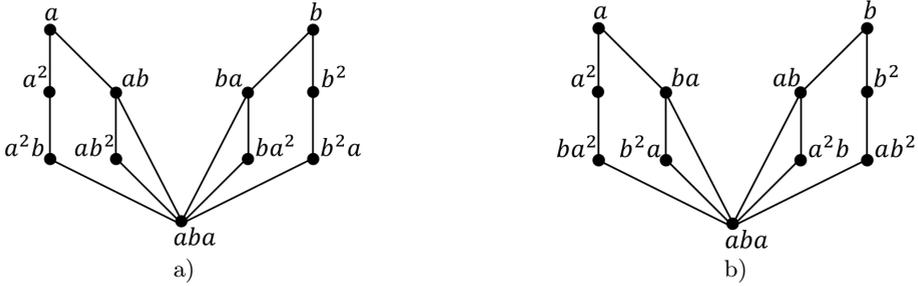


Рис. 3.5. Плоская укладка графов а)  $SCay(F_2(\text{var}\{m_3\}), \{a, b\})$ ;

б)  $SLCay(F_2(\text{var}\{m_3\}), \{a, b\})$

Fig. 3.5. Planar embedding of а)  $SCay(F_2(\text{var}\{m_3\}), \{a, b\})$ ;

б)  $SLCay(F_2(\text{var}\{m_3\}), \{a, b\})$

в основе своей имеют изображенные на Рис. 3.6 планарные графы.

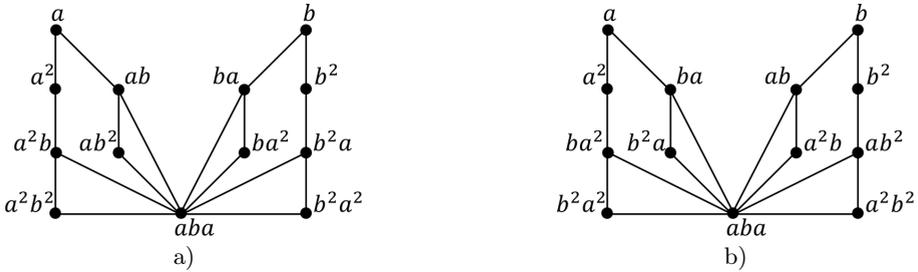


Рис. 3.6. Плоская укладка графов а)  $SCay(F_2(\text{var}\{m_4\}), \{a, b\})$ ;

б)  $SLCay(F_2(\text{var}\{m_4\}), \{a, b\})$

Fig. 3.6. Planar embedding of а)  $SCay(F_2(\text{var}\{m_4\}), \{a, b\})$ ;

б)  $SLCay(F_2(\text{var}\{m_4\}), \{a, b\})$

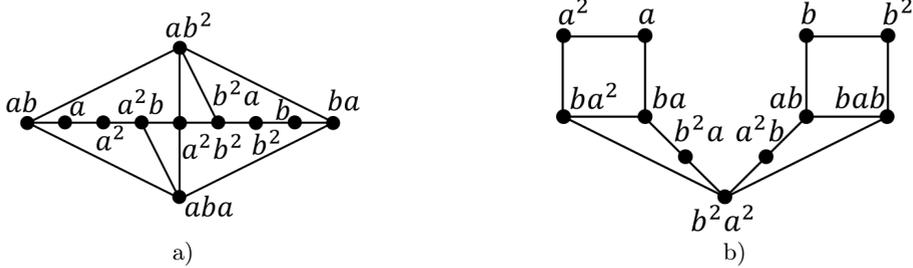
А графы Кэли свободных  $n$ -порожденных полугрупп многообразий  $\text{var}\{m_4\}$  и  $\text{var}\{\overleftarrow{m_4}\}$ , при  $n \geq 3$ , в своей основе содержат подграф гомеоморфный  $K_{3,3}$  на тех же девяти маршрутах, которые указаны выше для  $\text{var}\{m_3\}$  и  $\text{var}\{\overleftarrow{m_3}\}$ .

Базис  $m_5$ :

Графы Кэли свободных 2-порожденных полугрупп многообразий  $\text{var}\{m_5\}$  и  $\text{var}\{\overleftarrow{m_5}\}$  в основе своей имеют изображенные на Рис. 3.7 планарные графы.

Граф Кэли свободной  $n$ -порожденной полугруппы многообразия  $\text{var}\{m_5\}$ , при  $n \geq 3$ , в своей основе содержит подграф гомеоморфный  $K_{3,3}$  на следующих девяти маршрутах между вершинами из множеств  $\{a, b, c\}$  и  $\{a^2, b^2, c^2\}$ :  $a - a^2$ ;  $a - ab - ab^2 - b^2a - b^2$ ;  $a - ac - ac^2 - c^2a - c^2$ ;  $b - ba - aba - a^2b - a^2$ ;  $b - b^2$ ;  $b - bc - bc^2 - c^2b - c^2$ ;  $c - ca - aca - a^2c - a^2$ ;  $c - cb - bcb - b^2c - b^2$ ;  $c - c^2$ .

А граф Кэли свободной  $n$ -порожденной полугруппы многообразия  $\text{var}\{\overleftarrow{m_5}\}$ , при  $n \geq 3$ , в своей основе содержит подграф гомеоморфный  $K_{3,3}$  на следующих девяти маршрутах между вершинами из множеств  $\{ba, ba^2, a^2b\}$  и  $\{a^2, b^2a^2, cba^2\}$ , с точностью до обращения слов:  $ba - a - a^2$ ;  $ba - b^2a - b^2a^2$ ;  $ba - cba - cba^2$ ;  $ba^2 - a^2$ ;  $ba^2 - b^2a^2$ ;  $ba^2 - cba^2$ ;  $a^2b - ab - b - b^2 - cb^2 - c^2b^2 - b^2c - bc - c - ac - a^2c - c^2a^2 - ca^2 - a^2$ ;  $a^2b - b^2a^2$ ;  $a^2b - ca^2b - cb^2a^2 - cba^2$ .



**Рис. 3.7.** Плоская укладка графов

- a)  $SCay(F_2(\text{var}\{m5\}), \{a, b\}) = SCay(F_2(\text{var}\{m41\}), \{a, b\})$ ;
- b)  $SLCay(F_2(\text{var}\{m5\}), \{a, b\}) = SLCay(F_2(\text{var}\{m41\}), \{a, b\})$

**Fig. 3.7.** Planar embedding of

- a)  $SCay(F_2(\text{var}\{m5\}), \{a, b\}) = SCay(F_2(\text{var}\{m41\}), \{a, b\})$ ;
- b)  $SLCay(F_2(\text{var}\{m5\}), \{a, b\}) = SLCay(F_2(\text{var}\{m41\}), \{a, b\})$

Базис  $m6$ :

Аналогично тому, как в основах графов Кэли свободных полугрупп многообразий порождаемых системами тождеств  $m1$  и  $m2$  каждая пара простых циклов имела не более двух общих вершин, что приводило к возможности плоской укладки, в основе графа Кэли  $n$ -порожденной свободной полугруппы многообразия  $\text{var}\{m6\}$  та же ситуация. В частности, одна из пяти связных компонент основы графа Кэли полугруппы  $F_5(\text{var}\{m6\})$ , допускающая плоскую укладку, представлена на Рис. 3.8.

Плоская укладка основы левого графа Кэли свободной 2-порожденной полугруппы многообразия  $\text{var}\{m6\}$  представлена на Рис. 3.9.

Левый граф Кэли свободной  $n$ -порожденной полугруппы многообразия  $\text{var}\{m6\}$ , при  $n \geq 3$ , в своей основе содержит подграф гомеоморфный  $K_{3,3}$  на следующих девяти маршрутах между вершинами из множеств  $\{ba, b^2a, cab\}$  и  $\{cba, aba, ab\}$ :  $ba-cba$ ;  $ba-aba$ ;  $ba-a-ca-aca-ac-c-bc-bcb-cb-b-ab$ ;  $b^2a-cba$ ;  $b^2a-aba$ ;  $b^2a-ab$ ;  $cab-acba-cba$ ;  $cab-aba$ ;  $cab-ab$ .

Базис  $m7$ :

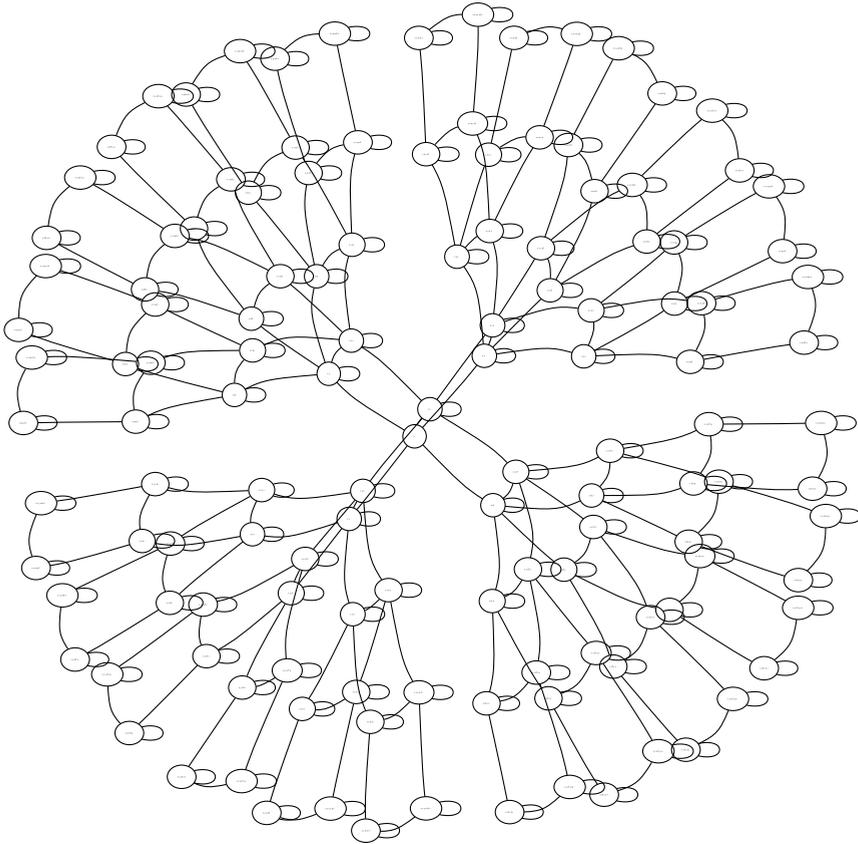
Плоская укладка основы графа  $Cay(F_3(\text{var}\{m7\}), \{a, b, c\})$  формируется в виде плоских упадок трех попарно изоморфных связных компонент, одна из которых представлена на Рис. 3.10.

Граф Кэли свободной  $n$ -порожденной полугруппы многообразий  $\text{var}\{m7\}$  и  $\text{var}\{m8\}$ , при  $n \geq 4$ , в своей основе содержит подграф гомеоморфный  $K_{3,3}$  на следующих девяти маршрутах между вершинами из множеств  $\{ab, abc^2, abcd\}$  и  $\{a^2bc, abc, ab^2c\}$ :  $ab-a^2b-a^2bc$ ;  $ab-abc$ ;  $ab-ab^2-ab^2c$ ;  $abc^2-a^2bc^2-a^2bc$ ;  $abc^2-abc$ ;  $abc^2-ab^2c^2-ab^2c$ ;  $abcd-a^2bcd-a^2bc$ ;  $abcd-abc$ ;  $abcd-ab^2cd-ab^2c$ .

Плоская укладка основы левого графа Кэли свободной 2-порожденной полугруппы многообразия  $\text{var}\{m7\}$  представлена на Рис. 3.11. А левый граф Кэли свободной  $n$ -порожденной полугруппы многообразия  $\text{var}\{m7\}$ , при  $n \geq 3$ , в своей основе содержит подграф гомеоморфный  $K_{3,3}$  на следующих девяти маршрутах между вершинами из множеств  $\{a, b, c\}$  и  $\{a^2, b^2, c^2\}$ :  $a-a^2$ ;  $a-ba-b^2a-ab^2-b^2$ ;  $a-ca-c^2a-ac^2-c^2$ ;  $b-ab-aba-ba^2-a^2$ ;  $b-b^2$ ;  $b-cb-c^2b-bc^2-c^2$ ;  $c-ac-aca-ca^2-a^2$ ;  $c-bc-bcb-cb^2-b^2$ ;  $c-c^2$ .

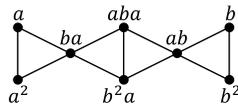
Базис  $m8$ :

Плоская укладка основы графа  $Cay(F_3(\text{var}\{m8\}), \{a, b, c\})$  формируется в виде плос-



**Рис. 3.8.** Одна из пяти связанных компонент основы графа Кэли полугруппы  $F_5(\text{var}\{m6\})$

**Fig. 3.8.** One of the five connected components of the Cayley graph base of the semigroup  $F_5(\text{var}\{m6\})$

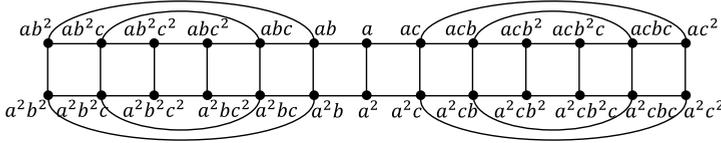


**Рис. 3.9.** Плоская укладка графа  $SLCay(F_2(\text{var}\{m6\}), \{a, b\})$  и  $SLCay(F_2(\text{var}\{m38\}), \{a, b\})$

**Fig. 3.9.** Planar embedding of the graph  $SLCay(F_2(\text{var}\{m6\}), \{a, b\})$  and  $SLCay(F_2(\text{var}\{m38\}), \{a, b\})$

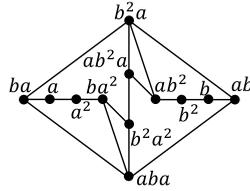
ких укладок трех попарно изоморфных связанных компонент, одна из которых представлена на Рис. 3.10. А для большего числа образующих основа графа Кэли полугруппы  $F_n(\text{var}\{m8\})$  содержит подграф гомеоморфный  $K_{3,3}$  такой же как и основа графа Кэли полугруппы  $F_n(\text{var}\{m7\})$ , при  $n \geq 4$ .

Левый граф Кэли полугруппы  $F_n(\text{var}\{m8\})$  при  $n \geq 2$  в своей основе обнаруживает подграф гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  на следующих девяти попарно непересекающихся



**Рис. 3.10.** Плоская укладка одной из трех попарно изоморфных связных компонент графа  $SCay(F_3(\text{var}\{m7\}), \{a, b, c\})$  и  $SCay(F_3(\text{var}\{m8\}), \{a, b, c\})$

**Fig. 3.10.** Planar embedding of one of three pairwise isomorphic connected components of the graph  $SCay(F_3(\text{var}\{m7\}), \{a, b, c\})$  and  $SCay(F_3(\text{var}\{m8\}), \{a, b, c\})$



**Рис. 3.11.** Плоская укладка графа  $SLCay(F_2(\text{var}\{m7\}), \{a, b\})$  и  $SLCay(F_2(\text{var}\{m39\}), \{a, b\})$

**Fig. 3.11.** Planar embedding of the graph  $SLCay(F_2(\text{var}\{m7\}), \{a, b\})$  and  $SLCay(F_2(\text{var}\{m39\}), \{a, b\})$

маршрутах между вершинами из множеств  $\{ab, ba, b^2a^2\}$  и  $\{ba^2, aba, ab^2\}$ :  $ab - ba^2$ ;  $ab - aba$ ;  $ab - b - b^2 - ab^2$ ;  $ba - a - a^2 - ba^2$ ;  $ba - aba$ ;  $ba - ab^2$ ;  $b^2a^2 - ba^2$ ;  $b^2a^2 - aba$ ;  $b^2a^2 - ab^2$ .

Базис  $m9$ :

Граф Кэли полугруппы  $F_n(\text{var}\{m9\})$ , где  $n \leq 3$ , допускает плоскую укладку в силу того, что каждая из связных компонент его основы является планарной. Одна из трёх таких связных компонент основы графа Кэли полугруппы  $F_3(\text{var}\{m9\})$  изображена на Рис. 3.12.

Последующее увеличение числа образующих приводит к появлению в основе графа Кэли полугруппы  $F_n(\text{var}\{m9\})$ , где  $n \geq 4$ , подграфа гомеоморфного графу  $K_5$  на следующих десяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами множества  $\{abcd, abcd, abcdb, abcdc, abcd^2\}$ :  $abcd - abcd$ ;  $abcd - abcdb$ ;  $abcd - abcdc$ ;  $abcd - abcd^2$ ;  $abcd - abcdab - abcdb$ ;  $abcd - abcdac - abcdc$ ;  $abcd - abcdad - abcd^2$ ;  $abcd - abcdbc - abcdc$ ;  $abcd - abcdbd - abcd^2$ ;  $abcd - abcdcd - abcd^2$ .

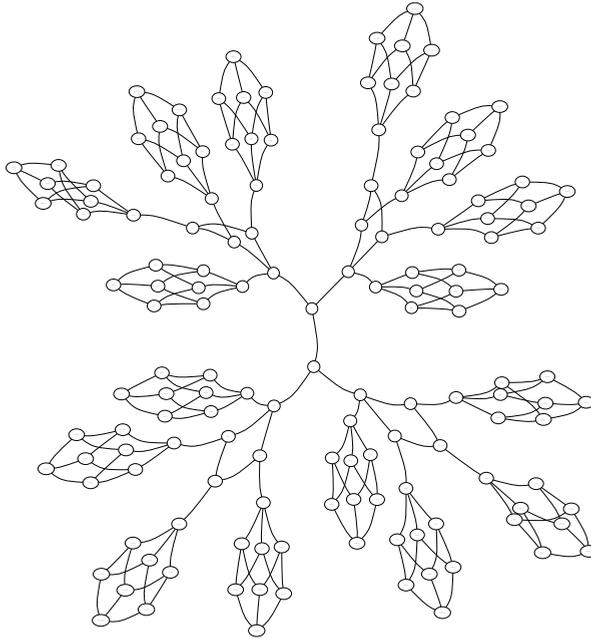
Плоская укладка основы левого графа Кэли полугруппы  $F_2(\text{var}\{m9\})$  представлена на Рис. 3.13.

Для трех образующих и более в основе левого графа Кэли полугруппы  $F_n(\text{var}\{m9\})$ , где  $n \geq 3$ , обнаруживается подграф гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств  $\{a, b, c\}$  и  $\{a^2, b^2, c^2\}$ :  $a - a^2$ ;  $a - ba - ab^2 - b^2$ ;  $a - ca - ac^2 - c^2$ ;  $b - ab - ba^2 - a^2$ ;  $b - b^2$ ;  $b - cb - bc^2 - c^2$ ;  $c - ac - ca^2 - a^2$ ;  $c - bc - cb^2 - b^2$ ;  $c - c^2$ .

Коммутативные:

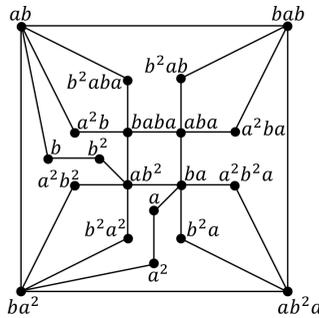
Базис  $m10$ :

Ранг планарности многообразия коммутативных полугрупп идемпотентов известен давно. Для полноты изложения напомним лишь, что плоская укладка основы гра-



**Рис. 3.12.** Одна из трех связанных компонент основы графа Кэли полугруппы  $F_3(\text{var}\{m9\})$

**Fig. 3.12.** One of the three connected components of the Cayley graph base of the semigroup  $F_3(\text{var}\{m9\})$



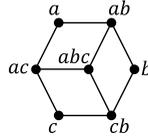
**Рис. 3.13.** Плоская укладка графа  $SLCay(F_2(\text{var}\{m9\}), \{a, b\})$

**Fig. 3.13.** Planar embedding of the graph  $SLCay(F_2(\text{var}\{m9\}), \{a, b\})$

фа Кэли 3-порожденной свободной полугруппы рассматриваемого многообразия имеет изображенный на Рис. 3.14 вид, а дальнейшее увеличение числа образующих приводит к появлению подграфа гомеоморфного графу  $K_{3,3}$  на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств  $\{a, b, abc\}$  и  $\{abd, ab, ac\}$ :  $a - ad - abd$ ;  $a - ab$ ;  $a - ac$ ;  $b - bd - abd$ ;  $b - ab$ ;  $b - bc - c - ac$ ;  $abc - abcd - abd$ ;  $abc - ab$ ;  $abc - ac$ .

Базис  $m11$ :

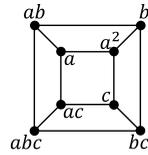
Плоская укладка графа  $SCay(F_3(\text{var}\{m11\}), \{a, b, c\})$  представлена на Рис. 3.15.



**Рис. 3.14.** Плоская укладка графа  $SCay(F_3(\text{var}\{m10\}), \{a, b, c\})$

**Fig. 3.14.** Planar embedding of the graph  $SCay(F_3(\text{var}\{m10\}), \{a, b, c\})$

Увеличение числа образующих приводит к появлению в основе графа Кэли полугруппы  $F_n(\text{var}\{m11\})$ , где  $n \geq 4$ , подграфа гомеоморфного графу  $K_5$  на следующих десяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами множества  $\{a, b, c, d, a^2\}$ :  $a - ab - b$ ;  $a - ac - c$ ;  $a - ad - d$ ;  $a - a^2$ ;  $b - bc - c$ ;  $b - bd - d$ ;  $b - a^2$ ;  $c - cd - d$ ;  $c - a^2$ ;  $d - a^2$ .

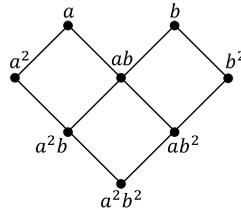


**Рис. 3.15.** Плоская укладка графа  $SCay(F_3(\text{var}\{m11\}), \{a, b, c\})$

**Fig. 3.15.** Planar embedding of the graph  $SCay(F_3(\text{var}\{m11\}), \{a, b, c\})$

Базис  $m12$ :

Плоская укладка графа  $SCay(F_2(\text{var}\{m12\}), \{a, b\})$  представлена на Рис. 3.16. Увеличение числа образующих приводит к появлению в основе графа Кэли полугруппы  $F_n(\text{var}\{m12\})$ , где  $n \geq 3$ , подграфа гомеоморфного графу  $K_{3,3}$  на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств  $\{a, b, abc\}$  и  $\{a^2b, ab, ac\}$ :  $a - a^2 - a^2b$ ;  $a - ab$ ;  $a - ac$ ;  $b - b^2 - ab^2 - a^2b^2 - a^2b$ ;  $b - ab$ ;  $b - bc - c - ac$ ;  $abc - a^2bc - a^2b$ ;  $abc - ab$ ;  $abc - ac$ .



**Рис. 3.16.** Плоская укладка графа  $SCay(F_2(\text{var}\{m12\}), \{a, b\})$

**Fig. 3.16.** Planar embedding of the graph  $SCay(F_2(\text{var}\{m12\}), \{a, b\})$

Базис  $m13$ :

В основе графа Кэли полугруппы  $F_n(\text{var}\{m13\})$ , где  $n \geq 2$ , обнаруживается подграф гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств  $\{ab, a^3b^2, a^2b^2\}$  и  $\{a^2b^3, a^2b, ab^2\}$ :  $ab - ab^3 - a^2b^3$ ;  $ab - a^2b$ ;  $ab - ab^2$ ;  $a^3b^2 - a^3b^3 - a^2b^3$ ;  $a^3b^2 - a^3b - a^2b$ ;  $a^3b^2 - ab^2$ ;  $a^2b^2 - a^2b^3$ ;  $a^2b^2 - a^2b$ ;  $a^2b^2 - ab^2$ .

Базис  $m14$ :

В основе графа Кэли полугруппы  $F_n(\text{var}\{m14\})$ , где  $n \geq 2$ , обнаруживается подграф гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств  $\{a, b, ab^2\}$  и  $\{ab, b^2, a^2b\}$ :  $a - ab$ ;  $a - a^4 - b^3 - b^2$ ;  $a - a^2 - a^2b$ ;  $b - ab$ ;  $b - b^2$ ;  $b - a^3b - a^2b$ ;  $ab^2 - ab$ ;  $ab^2 - b^2$ ;  $ab^2 - a^2b^2 - a^2b$ .

Базис  $m15$ :

Плоская укладка графа  $SCay(F_3(\text{var}\{m15\}), \{a, b, c\})$  представлена на Рис. 3.17. Увеличение числа образующих приводит к появлению в основе графа Кэли полугруппы  $F_n(\text{var}\{m15\})$ , где  $n \geq 4$ , подграфа гомеоморфного графу  $K_{3,3}$  на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств  $\{a, b, a^2\}$  и  $\{ac, ab, ad\}$ :  $a - ac$ ;  $a - ab$ ;  $a - ad$ ;  $b - bc - c - ac$ ;  $b - ab$ ;  $b - bd - d - ad$ ;  $a^2 - ac$ ;  $a^2 - ab$ ;  $a^2 - ad$ .

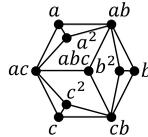


Рис. 3.17. Плоская укладка графа  $SCay(F_3(\text{var}\{m15\}), \{a, b, c\})$

Fig. 3.17. Planar embedding of the graph  $SCay(F_3(\text{var}\{m15\}), \{a, b, c\})$

Базис  $m16$ :

Плоская укладка графа  $SCay(F_3(\text{var}\{m16\}), \{a, b, c\})$  представлена на Рис. 3.18. Увеличение числа образующих приводит к появлению в основе графа Кэли полугруппы  $F_n(\text{var}\{m16\})$ , где  $n \geq 4$ , подграфа гомеоморфного графу  $K_{3,3}$  на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств  $\{a, a^2, b\}$  и  $\{ab, c, d\}$ :  $a - ab$ ;  $a - ac - c$ ;  $a - ad - d$ ;  $a^2 - ab$ ;  $a^2 - c$ ;  $a^2 - d$ ;  $b - ab$ ;  $b - bc - c$ ;  $b - bd - d$ .

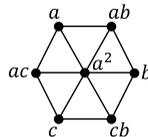


Рис. 3.18. Плоская укладка графа  $SCay(F_3(\text{var}\{m16\}), \{a, b, c\})$

Fig. 3.18. Planar embedding of the graph  $SCay(F_3(\text{var}\{m16\}), \{a, b, c\})$

Базис  $m17$ :

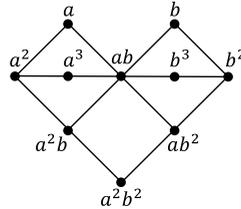
Заметим, что из указанного базиса тождеств среди прочих выводимо тождество  $xy = zt$ , а бесконечность ранга планарности многообразия полугрупп с нулевым умножением известна давно. Для полноты изложения напомним лишь, что плоская укладка основы графа Кэли  $n$ -порожденной свободной полугруппы рассматриваемого многообразия имеет вид звезды  $K_{1,n}$ , являющейся полным двудольным графом, содержащим одну вершину в первой из долей и  $n$  вершин во второй доле.

Базис  $m18$ :

Заметим, данная система тождеств похожа на систему  $m12$  с единственным отличием в том, что вместо  $x = x^3$  имеет место  $x^2 = x^3$ , следовательно, все сказанное в пункте  $m12$  относительно основ графов Кэли полугрупп имеет место для  $m18$ , так как в соответствующих графах Кэли лишь на смену разнонаправленных параллельных дуг приходят петли.

Базис  $m19$ :

Плоская укладка графа  $SCay(F_2(\text{var}\{m19\}), \{a, b\})$  представлена на Рис. 3.19. Увеличение числа образующих приводит к появлению в основе графа Кэли полугруппы  $F_n(\text{var}\{m19\})$ , где  $n \geq 3$ , подграфа гомеоморфного графу  $K_{3,3}$  на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств  $\{a, b, a^3\}$  и  $\{a^2, ab, ac\}$ :  $a - a^2$ ;  $a - ab$ ;  $a - ac$ ;  $b - b^2 - ab^2 - a^2b^2 - a^2b - a^2$ ;  $b - ab$ ;  $b - bc - c - ac$ ;  $a^3 - a^2$ ;  $a^3 - ab$ ;  $a^3 - ac$ .

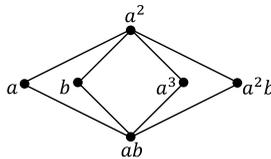


**Рис. 3.19.** Плоская укладка графа  $SCay(F_2(\text{var}\{m19\}), \{a, b\})$

**Fig. 3.19.** Planar embedding of the graph  $SCay(F_2(\text{var}\{m19\}), \{a, b\})$

Базис  $m20$ :

Плоская укладка графа  $SCay(F_2(\text{var}\{m20\}), \{a, b\})$  представлена на Рис. 3.20. Увеличение числа образующих приводит к появлению в основе графа Кэли полугруппы  $F_n(\text{var}\{m20\})$ , где  $n \geq 3$ , подграфа гомеоморфного графу  $K_{3,3}$  на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств  $\{a, b, a^3\}$  и  $\{a^2, ab, ac\}$ :  $a - a^2$ ;  $a - ab$ ;  $a - ac$ ;  $b - a^2$ ;  $b - ab$ ;  $b - bc - c - ac$ ;  $a^3 - a^2$ ;  $a^3 - ab$ ;  $a^3 - ac$ .



**Рис. 3.20.** Плоская укладка графа  $SCay(F_2(\text{var}\{m20\}), \{a, b\})$

**Fig. 3.20.** Planar embedding of the graph  $SCay(F_2(\text{var}\{m20\}), \{a, b\})$

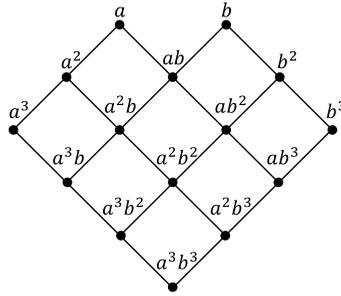
Базис  $m21$ :

Плоская укладка графа  $SCay(F_2(\text{var}\{m21\}), \{a, b\})$  представлена на Рис. 3.21. Увеличение числа образующих приводит к появлению в основе графа Кэли полугруппы  $F_n(\text{var}\{m21\})$ , где  $n \geq 3$ , подграфа гомеоморфного графу  $K_{3,3}$  на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств  $\{a, b, abc\}$  и  $\{a^2b, ab, ac\}$ :  $a - a^2 - a^2b$ ;  $a - ab$ ;  $a - ac$ ;  $b - b^2 - ab^2 - a^2b^2 - a^2b$ ;  $b - ab$ ;  $b - bc - c - ac$ ;  $abc - a^2bc - a^2b$ ;  $abc - ab$ ;  $abc - ac$ .

Базис  $m22$ :

В основе графа Кэли полугруппы  $F_n(\text{var}\{m22\})$ , где  $n \geq 2$ , обнаруживается подграф гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств  $\{a^2, b^2, a^4\}$  и  $\{a^3, ab, ab^2\}$ :  $a^2 - a^3$ ;  $a^2 - a - ab$ ;  $a^2 - a^2b^2 - ab^2$ ;  $b^2 - a^3$ ;  $b^2 - b - ab$ ;  $b^2 - ab^2$ ;  $a^4 - a^3$ ;  $a^4 - ab$ ;  $a^4 - ab^2$ .

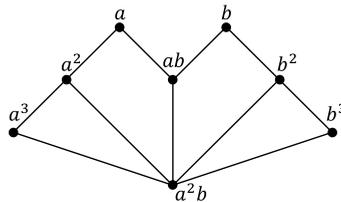
Базис  $m23$ :



**Рис. 3.21.** Плоская укладка графа  $SCay(F_2(\text{var}\{m21\}), \{a, b\})$

**Fig. 3.21.** Planar embedding of the graph  $SCay(F_2(\text{var}\{m21\}), \{a, b\})$

Плоская укладка графа  $SCay(F_2(\text{var}\{m23\}), \{a, b\})$  представлена на Рис. 3.22. Увеличение числа образующих приводит к появлению в основе графа Кэли полугруппы  $F_n(\text{var}\{m23\})$ , где  $n \geq 3$ , подграфа гомеоморфного графу  $K_{3,3}$  на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств  $\{a, b, abc\}$  и  $\{a^2b, ab, ac\}$ :  $a - a^2 - a^2b$ ;  $a - ab$ ;  $a - ac$ ;  $b - b^2 - a^2b$ ;  $b - ab$ ;  $b - bc - c - ac$ ;  $abc - a^2b$ ;  $abc - ab$ ;  $abc - ac$ .

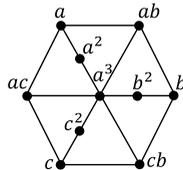


**Рис. 3.22.** Плоская укладка графа  $SCay(F_2(\text{var}\{m23\}), \{a, b\})$

**Fig. 3.22.** Planar embedding of the graph  $SCay(F_2(\text{var}\{m23\}), \{a, b\})$

Базис  $m24$ :

Плоская укладка графа  $SCay(F_3(\text{var}\{m24\}), \{a, b, c\})$  представлена на Рис. 3.23. Увеличение числа образующих приводит к появлению в основе графа Кэли полугруппы  $F_n(\text{var}\{m24\})$ , где  $n \geq 4$ , подграфа гомеоморфного графу  $K_{3,3}$  на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств  $\{a, b, a^3\}$  и  $\{ab, ac, ad\}$ :  $a - ab$ ;  $a - ac$ ;  $a - ad$ ;  $b - ab$ ;  $b - bc - c - ac$ ;  $b - bd - d - ad$ ;  $a^3 - ab$ ;  $a^3 - ac$ ;  $a^3 - ad$ .



**Рис. 3.23.** Плоская укладка графа  $SCay(F_3(\text{var}\{m24\}), \{a, b, c\})$

**Fig. 3.23.** Planar embedding of the graph  $SCay(F_3(\text{var}\{m24\}), \{a, b, c\})$

Базис  $m25$ :

Заметим, данная система тождеств похожа на систему  $m21$  с единственным отличием в том, что вместо  $x^2 = x^4$  имеет место  $x^3 = x^4$ , следовательно, все сказанное в пункте  $m21$  относительно основ графов Кэли полугрупп имеет место для  $m25$ , так как в соответствующих графах Кэли лишь на смену разнонаправленных параллельных дуг приходят петли.

Базис  $m26$ :

Заметим, что системы тождеств  $m24$  и  $m26$  эквивалентны, так как из множества тождеств  $\{xy = yx, x^3 = y^3, xyz^3 = xyz\}$  выводимо каждое из тождеств во множестве  $\{xy = yx, xyz = x^3\}$ , верна и обратная выводимость. Следовательно, все сказанное в пункте  $m24$  относительно основ графов Кэли полугрупп имеет место для  $m26$ .

Базис  $m27$ :

Плоская укладка графа  $SCay(F_2(\text{var}\{m27\}), \{a, b\})$  представлена на Рис. 3.24. Увеличение числа образующих приводит к появлению в основе графа Кэли полугруппы  $F_n(\text{var}\{m27\})$ , где  $n \geq 3$ , подграфа гомеоморфного графу  $K_{3,3}$  на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств  $\{a, a^3, a^2b\}$  и  $\{a^2, ab, ac\}$ :  $a - a^2$ ;  $a - ab$ ;  $a - ac$ ;  $a^3 - a^2$ ;  $a^3 - ab$ ;  $a^3 - ac$ ;  $a^2b - a^2$ ;  $a^2b - ab$ ;  $a^2b - bc - c - ac$ .

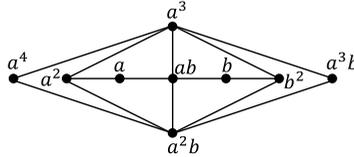


Рис. 3.24. Плоская укладка графа  $SCay(F_2(\text{var}\{m27\}), \{a, b\})$

Fig. 3.24. Planar embedding of the graph  $SCay(F_2(\text{var}\{m27\}), \{a, b\})$

Базис  $m28$ :

Плоская укладка графа  $SCay(F_2(\text{var}\{m28\}), \{a, b\})$  представлена на Рис. 3.25. Увеличение числа образующих приводит к появлению в основе графа Кэли полугруппы  $F_n(\text{var}\{m28\})$ , где  $n \geq 3$ , подграфа гомеоморфного графу  $K_{3,3}$  на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств  $\{a, b, abc\}$  и  $\{a^2b, ab, ac\}$ :  $a - a^2 - a^2b$ ;  $a - ab$ ;  $a - ac$ ;  $b - b^2 - a^2b$ ;  $b - ab$ ;  $b - bc - c - ac$ ;  $abc - a^4 - a^2b$ ;  $abc - ab$ ;  $abc - ac$ .

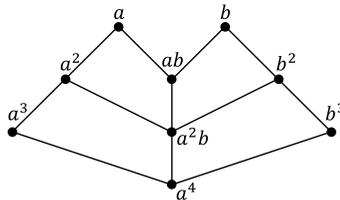


Рис. 3.25. Плоская укладка графа  $SCay(F_2(\text{var}\{m28\}), \{a, b\})$

Fig. 3.25. Planar embedding of the graph  $SCay(F_2(\text{var}\{m28\}), \{a, b\})$

Перестановочные:

Базис  $m29$ :

Данной системе тождеств эквивалентна система  $\{xyz = uvw\}$ , другими словами, ею порождается многообразие нильпотентных полугрупп степени нильпотентности 3.

Бесконечность ранга планарности такого многообразия известна давно. Для полноты изложения напомним лишь, что плоскую укладку основы правого (соответственно левого) графа Кэли свободной  $n$ -порожденной полугруппы такого многообразия, при любом натуральном  $n$ , относительно множества образующих  $X$ , можно получить следующим образом: соединив каждую однобуквенную вершину  $s \in X$  ребром с двухбуквенными вершинами  $st$  (соответственно  $ts$ ), где  $s, t \in X$ , получим граф, являющийся объединением  $n$  связных компонент, попарно изоморфных звезде  $K_{1,n}$ ; после этого, каждая двухбуквенная вершина соединяется ребром с единственной трехбуквенной вершиной графа, что всегда возможно в силу того, что объединение  $n$  связных компонент, попарно изоморфных звезде  $K_{1,n}$  является внешнепланарным графом.

Базис  $m30$ :

Плоскую укладку основы правого (соответственно левого) графа Кэли свободной  $n$ -порожденной полугруппы многообразия  $\text{var}\{m30\}$ , при любом натуральном  $n$ , относительно множества образующих  $X$ , можно получить следующим образом: соединив каждую однобуквенную вершину  $s \in X$  ребром с двухбуквенными вершинами  $st$  (соответственно  $ts$ ), где  $s \in X$ ,  $t \in X \setminus \{s\}$ , получим граф, являющийся объединением  $n$  связных компонент, попарно изоморфных звезде  $K_{1,n-1}$ ; после этого, каждая вершина соединяется ребром с единственной трехбуквенной вершиной графа, что всегда возможно в силу того, что объединение  $n$  связных компонент, попарно изоморфных звезде  $K_{1,n-1}$  является внешнепланарным графом.

Базис  $m31$ :

Данной системе тождеств эквивалентна система  $\{xyz = uvw\}$ , поэтому всё сказанное все сказанное в пункте  $m29$  относительно основ графов Кэли полугрупп имеет место для  $m31$ .

Базис  $m32$ :

Многообразие  $\text{var}\{m32\}$  является многообразием полугрупп левых нулей, а  $\text{var}\{\overleftarrow{m32}\}$ , – полугрупп правых нулей, в основе правых графов Кэли свободных  $n$ -порожденных полугрупп которых лежат соответственно гряда  $O_n$ , не содержащая ни одного ребра, и полный граф  $K_n$ , содержащий все возможные рёбра. Поэтому первые допускают плоскую укладку при любом натуральном  $n$ , а вторые только при  $n \leq 4$ .

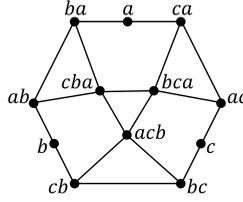
Базис  $m33$ :

Основа правого графа Кэли  $n$ -порожденной свободной полугруппы данного многообразия представляет собой дизъюнктивное объединение  $n$  графов  $(n-1)$ -мерных кубов  $Q_{n-1}$ , следовательно, допускает плоскую укладку при  $n \leq 4$ . А при  $n \geq 5$  не допускает плоской укладку, так как содержит подграф гомеоморфный графу  $K_5$  на следующих десяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множества  $\{a, ab, ac, ad, ae\}$ :  $a - ab$ ;  $a - ac$ ;  $a - ad$ ;  $a - ae$ ;  $ab - abc - ac$ ;  $ab - abd - ad$ ;  $ab - abe - ae$ ;  $ac - acd - ad$ ;  $ac - ace - ae$ ;  $ad - ade - ae$ .

Плоская укладка графа  $SLCay(F_3(\text{var}\{m33\}), \{a, b, c\})$  представлена на Рис. 3.26. Увеличение числа образующих приводит к появлению в основе левого графа Кэли полугруппы  $F_n(\text{var}\{m33\})$ , где  $n \geq 4$ , подграфа гомеоморфного графу  $K_{3,3}$  на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств  $\{ab, ba, bca\}$  и  $\{ca, cba, dba\}$ :  $ab - b - cb - bc - c - ac - ca$ ;  $ab - cba$ ;  $ab - dba$ ;  $ba - a - ca$ ;  $ba - cba$ ;  $ba - dba$ ;  $bca - ca$ ;  $bca - cba$ ;  $bca - dcba - cdba - dba$ .

Базис  $m34$ :

Основа правого графа Кэли  $n$ -порожденной свободной полугруппы данного многообразия представляет собой дизъюнктивное объединение  $n$  графов  $n$ -мерных кубов  $Q_n$ , следовательно, допускает плоскую укладку при  $n \leq 3$ . А при  $n \geq 4$  не допускает

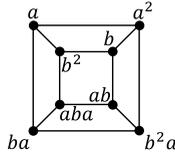


**Рис. 3.26.** Плоская укладка графа  $SLCay(F_3(\text{var}\{m33\}), \{a, b, c\})$

**Fig. 3.26.** Planar embedding of the graph  $SLCay(F_3(\text{var}\{m33\}), \{a, b, c\})$

плоской укладки, так как содержит подграф гомеоморфный графу  $K_5$  на следующих десяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множества  $\{a, a^2, ab, ac, ad\}$ :  $a - a^2$ ;  $a - ab$ ;  $a - ac$ ;  $a - ad$ ;  $a^2 - a^2b - ab$ ;  $a^2 - a^2c - ac$ ;  $a^2 - a^2d - ad$ ;  $ab - abc - ac$ ;  $ab - abd - ad$ ;  $ac - acd - ad$ .

Плоская укладка графа  $SLCay(F_2(\text{var}\{m34\}), \{a, b\})$  представлена на Рис. 3.27. Увеличение числа образующих приводит к появлению в основе левого графа Кэли полу-группы  $F_n(\text{var}\{m34\})$ , где  $n \geq 3$ , подграфа гомеоморфного графу  $K_{3,3}$  на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств  $\{a, b, c\}$  и  $\{a^2, b^2, c^2\}$ :  $a - a^2$ ;  $a - b^2$ ;  $a - c^2$ ;  $b - a^2$ ;  $b - b^2$ ;  $b - c^2$ ;  $c - a^2$ ;  $c - b^2$ ;  $c - c^2$ .

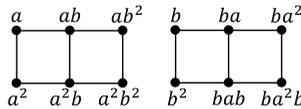


**Рис. 3.27.** Плоская укладка графа  $SLCay(F_2(\text{var}\{m34\}), \{a, b\})$

**Fig. 3.27.** Planar embedding of the graph  $SLCay(F_2(\text{var}\{m34\}), \{a, b\})$

Базис  $m35$ :

Плоская укладка графа  $SCay(F_2(\text{var}\{m35\}), \{a, b\})$  представлена на Рис. 3.28. Увеличение числа образующих приводит к появлению в основе графа Кэли полу-группы  $F_n(\text{var}\{m35\})$ , где  $n \geq 3$ , подграфа гомеоморфного графу  $K_{3,3}$  на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств  $\{a, ab^2, abc\}$  и  $\{ab, a^2b, ac\}$ :  $a - ab$ ;  $a - a^2 - a^2b$ ;  $a - ac$ ;  $ab^2 - ab$ ;  $ab^2 - a^2b^2 - a^2b$ ;  $ab^2 - ab^2c - ab^2c^2 - abc^2 - ac^2 - ac$ ;  $abc - ab$ ;  $abc - a^2bc - a^2b$ ;  $abc - ac$ .



**Рис. 3.28.** Плоская укладка графа  $SCay(F_2(\text{var}\{m35\}), \{a, b\}) = SCay(F_2(\text{var}\{m39\}), \{a, b\})$

**Fig. 3.28.** Planar embedding of the graph  $SCay(F_2(\text{var}\{m35\}), \{a, b\}) = SCay(F_2(\text{var}\{m39\}), \{a, b\})$

В графе  $SLCay(F_n(\text{var}\{m35\}), \{a, b\})$  при  $n \geq 2$  обнаруживается подграф гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах

между вершинами из множеств  $\{ab, ba, b^2a^2\}$  и  $\{ba^2, aba, ab^2\}$ :  $ab - ba^2$ ;  $ab - aba$ ;  $ab - b - b^2 - ab^2$ ;  $ba - a - a^2 - ba^2$ ;  $ba - aba$ ;  $ba - ab^2$ ;  $b^2a^2 - ba^2$ ;  $b^2a^2 - aba$ ;  $b^2a^2 - ab^2$ .

Базис  $m36$ :

Основой правого графа Кэли свободной  $n$ -порожденной полугруппы многообразия  $\text{var}\{m36\}$  является паросочетание, состоящее из  $n$  попарно несмежных рёбер, следовательно, она допускает плоскую укладку при любом натуральном  $n$ .

Плоская укладка графа  $SLCay(F_n(\text{var}\{m36\}), \{a, b\})$  при  $n = 2$  представлена на Рис. 3.29, а при  $n \geq 3$  в этом графе обнаруживается подграф гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств  $\{a, b, c\}$  и  $\{a^2, ba, ca\}$ :  $a - a^2$ ;  $a - ba$ ;  $a - ca$ ;  $b - a^2$ ;  $b - ba$ ;  $b - ca$ ;  $c - a^2$ ;  $c - ba$ ;  $c - ca$ .

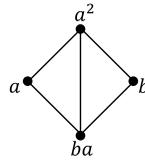


Рис. 3.29. Плоская укладка графа  $SLCay(F_2(\text{var}\{m36\}), \{a, b\})$

Fig. 3.29. Planar embedding of the graph  $SLCay(F_2(\text{var}\{m36\}), \{a, b\})$

Базис  $m37$ :

Плоская укладка графа  $SCay(F_n(\text{var}\{m37\}), \{a, b, c\})$  при  $n = 3$  представлена на Рис. 3.30, а при  $n \geq 4$  в этом графе обнаруживается подграф гомеоморфный графу  $K_5$  на следующих десяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множества  $\{a, a^2, ab, ac, ad\}$ :  $a - a^2$ ;  $a - ab$ ;  $a - ac$ ;  $a - ad$ ;  $a^2 - ab$ ;  $a^2 - ac$ ;  $a^2 - ad$ ;  $ab - abc - ac$ ;  $ab - abd - ad$ ;  $ac - acd - ad$ .

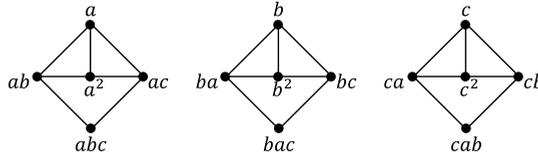


Рис. 3.30. Плоская укладка графа  $SCay(F_3(\text{var}\{m37\}), \{a, b, c\})$

Fig. 3.30. Planar embedding of the graph  $SCay(F_3(\text{var}\{m37\}), \{a, b, c\})$

Плоская укладка графа  $SLCay(F_n(\text{var}\{m37\}), \{a, b, c\})$  при  $n = 3$  представлена на Рис. 3.31, а при  $n \geq 4$  в этом графе обнаруживается подграф гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств  $\{a, a^2, b\}$  и  $\{ba, ca, da\}$ :  $a - ba$ ;  $a - ca$ ;  $a - da$ ;  $a^2 - ba$ ;  $a^2 - ca$ ;  $a^2 - da$ ;  $b - ab - ba$ ;  $b - cb - bc - c - ac - ca$ ;  $b - db - bd - d - ad - da$ .

Базис  $m38$ :

Основа правого графа Кэли  $n$ -порожденной свободной полугруппы данного многообразия представляет собой дизъюнктивное объединение  $n$  графов  $n$ -мерных кубов  $Q_n$ , следовательно, допускает плоскую укладку при  $n \leq 3$ . А при  $n \geq 4$  не допускает плоской укладки, так как содержит подграф гомеоморфный графу  $K_5$  на тех же десяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множества  $\{a, a^2, ab, ac, ad\}$

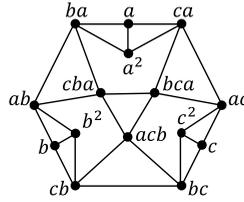


Рис. 3.31. Плоская укладка графа  $SLCay(F_3(\text{var}\{m37\}), \{a, b, c\})$

Fig. 3.31. Planar embedding of the graph  $SLCay(F_3(\text{var}\{m37\}), \{a, b, c\})$

что и в основе правого графа Кэли  $n$ -порожденной свободной полугруппы многообразия  $\text{var}\{m34\}$ .

Плоская укладка основы левого графа Кэли свободной 2-порожденной полугруппы многообразия  $\text{var}\{m38\}$  представлена на Рис. 3.9. А при дальнейшем увеличении числа образующих в этом графе обнаруживается подграф гомеоморфный графу  $K_5$  на следующих десяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множества  $\{ab, ba, aba, b^2a, cba\}$ :  $ab - b - cb - acb - bc - c - ac - aca - ca - a - ba$ ;  $ab - aba$ ;  $ab - b^2a$ ;  $ab - cba$ ;  $ba - aba$ ;  $ba - b^2a$ ;  $ba - cba$ ;  $aba - b^2a$ ;  $aba - cba$ ;  $b^2a - cba$ .

Базис  $m39$ :

Заметим, данная система тождеств похожа на систему  $m35$  с единственным отличием в том, что вместо  $x = x^3$  имеет место  $x^2 = x^3$ , следовательно, все сказанное в пункте  $m35$  относительно основ правых графов Кэли полугрупп имеет место для  $m39$ , так как в соответствующих графах Кэли лишь на смену разнонаправленных параллельных дуг приходят петли.

Плоская укладка основы левого графа Кэли свободной 2-порожденной полугруппы многообразия  $\text{var}\{m39\}$  представлена на Рис. 3.11. А левый граф Кэли свободной  $n$ -порожденной полугруппы многообразия  $\text{var}\{m39\}$ , при  $n \geq 3$ , в своей основе содержит такой же подграф гомеоморфный  $K_{3,3}$  на девяти маршрутах между вершинами из множеств  $\{a, b, c\}$  и  $\{a^2, b^2, c^2\}$  как и в левом графе Кэли свободной  $n$ -порожденной полугруппы многообразия  $\text{var}\{m7\}$ , при  $n \geq 3$ , не смотря на то, что графы Кэли этих полугрупп не изоморфны, так как содержат разное количество вершин.

Базис  $m40$ :

Так как основа графа Кэли полугруппы  $F_n(\text{var}\{m40\})$  представляет собой объединение  $n$  попарно изоморфных между собой планарных полных двудольных графов  $K_{2,n}$ , содержащих 1-буквенную и 3-буквенную вершины в одной доле, а все 2-буквенные вершины в другой доле, то граф Кэли этой полугруппы планарен при любом  $n \in \mathbb{N}$ .

Плоская укладка графа  $SLCay(F_2(\text{var}\{m40\}), \{a, b\})$  представлена на Рис. 3.32. А основа левого графа Кэли полугруппы  $F_n(\text{var}\{m40\})$  при  $n \geq 3$  содержит подграф гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств  $\{a, a^3, ba^2\}$  и  $\{a^2, ba, ca\}$ :  $a - a^2$ ;  $a - ba$ ;  $a - ca$ ;  $a^3 - a^2$ ;  $a^3 - ba$ ;  $a^3 - ca$ ;  $ba^2 - a^2$ ;  $ba^2 - ba$ ;  $ba^2 - ca$ .

Базис  $m41$ :

Плоская укладка графа  $SCay(F_2(\text{var}\{m41\}), \{a, b\})$  представлена на Рис. 3.7.а, так как если тождества из слов над двухбуквенным алфавитом удовлетворяют системе тождеств  $m41$ , то они удовлетворяют и системе  $m5$ . Заметим при этом, что так как граф Кэли свободной  $n$ -порожденной полугруппы многообразия  $\text{var}\{m5\}$ , для  $n \geq 3$  в своей основе содержит подграф гомеоморфный  $K_{3,3}$  на девяти маршрутах между

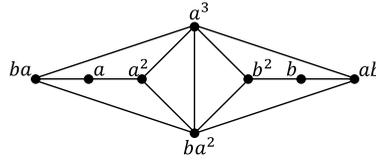


Рис. 3.32. Плоская укладка графа  $SLCay(F_2(\text{var}\{m40\}), \{a, b\})$

Fig. 3.32. Planar embedding of the graph  $SLCay(F_2(\text{var}\{m40\}), \{a, b\})$

вершинами из множеств  $\{a, b, c\}$  и  $\{a^2, b^2, c^2\}$  проходящих через вершины являющиеся словами над двухбуквенным алфавитом, то этот же подграф можно обнаружить и в основе свободной  $n$ -порожденной полугруппы многообразия  $\text{var}\{m41\}$ , при  $n \geq 3$ .

Плоская укладка графа  $SLCay(F_2(\text{var}\{m41\}), \{a, b\})$  представлена на Рис. 3.7.b, так как опять же, если тождества из слов над двухбуквенным алфавитом удовлетворяют системе тождеств  $m41$ , то они удовлетворяют и системе  $m5$ .

А левый граф Кэли свободной  $n$ -порожденной полугруппы многообразия  $\text{var}\{41\}$ , при  $n \geq 3$ , в своей основе содержит подграф гомеоморфный  $K_{3,3}$  на следующих девяти маршрутах между вершинами из множеств  $\{ba, ba^2, ca^2\}$  и  $\{a^2, b^2a^2, cba^2\}$ :  $ba - a - a^2$ ;  $ba - b^2a - b^2a^2$ ;  $ba - cba - cba^2$ ;  $ba^2 - a^2$ ;  $ba^2 - b^2a^2$ ;  $ba^2 - cba^2$ ;  $ca^2 - a^2$ ;  $ca^2 - c^2a^2 - a^2c - ac - c - bc - b^2c - c^2b^2 - cb^2 - b^2 - b - ab - a^2b - b^2a^2$ ;  $ca^2 - cba^2$ .

Базис  $m42$ :

Плоская укладка графа  $SCay(F_3(\text{var}\{m42\}), \{a, b, c\})$  представлена на Рис. 3.33.a. Увеличение числа образующих приводит к появлению в основе графа Кэли полугруппы  $F_n(\text{var}\{m42\})$ , где  $n \geq 4$ , подграфа гомеоморфного графу  $K_{3,3}$  на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств  $\{a, a^2, b\}$  и  $\{ac, ab, ad\}$ :  $a - ac$ ;  $a - ab$ ;  $a - ad$ ;  $a^2 - ac$ ;  $a^2 - ab$ ;  $a^2 - ad$ ;  $b - bc - bca - cb - c - ca - aca - ac$ ;  $b - ba - aba - ab$ ;  $b - bd - bda - db - d - da - ada - ad$ .

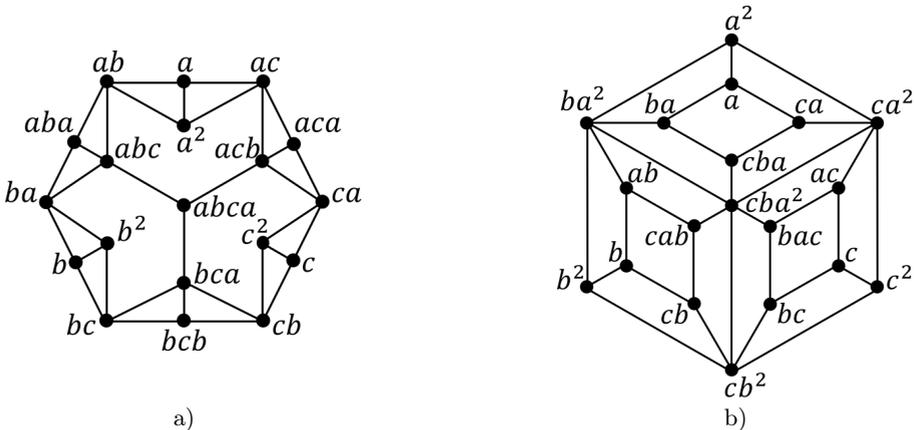


Рис. 3.33. Плоская укладка графа а)  $SCay(F_3(\text{var}\{m42\}), \{a, b, c\})$ ; б)  $SLCay(F_3(\text{var}\{m42\}), \{a, b, c\})$

Fig. 3.33. Planar embedding of the graph а)  $SCay(F_3(\text{var}\{m42\}), \{a, b, c\})$ ; б)  $SLCay(F_3(\text{var}\{m42\}), \{a, b, c\})$

Плоская укладка графа  $SLCay(F_3(\text{var}\{m42\}), \{a, b, c\})$  представлена на Рис. 3.33.b.

Увеличение числа образующих приводит к появлению в основе левого графа Кэли полугруппы  $F_n(\text{var}\{m42\})$ , где  $n \geq 4$ , подграфа гомеоморфного графу  $K_5$  на следующих десяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множества  $\{a, a^2, ba, ca, da\}$ :  $a - a^2$ ;  $a - ba$ ;  $a - ca$ ;  $a - da$ ;  $a^2 - ba^2 - ba$ ;  $a^2 - ca^2 - ca$ ;  $a^2 - da^2 - da$ ;  $ba - cba - ca$ ;  $b - dba - da$ ;  $ca - dca - da$ .

Базис  $m43$ :

В основе графа Кэли полугруппы  $F_n(\text{var}\{m42\})$  при  $n \geq 2$  обнаруживается подграф гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств  $\{ab, a^2b^2, a^2ba\}$  и  $\{a^2b, aba, ab^2\}$ :  $ab - a - a^2 - a^2b$ ;  $ab - aba$ ;  $ab - ab^2$ ;  $a^2b^2 - a^2b$ ;  $a^2b^2 - aba$ ;  $a^2b^2 - ab^2$ ;  $a^2ba - a^2b$ ;  $a^2ba - aba$ ;  $a^2ba - ab^2$ .

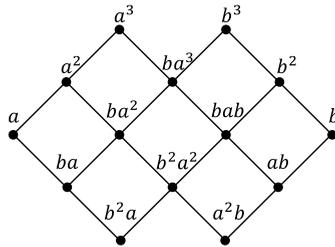


Рис. 3.34. Плоская укладка графа  $SLCay(F_2(\text{var}\{m43\}), \{a, b\})$

Fig. 3.34. Planar embedding of the graph  $SLCay(F_2(\text{var}\{m43\}), \{a, b\})$

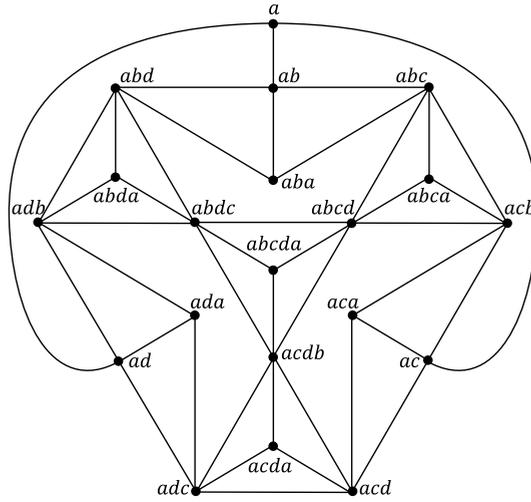
Плоская укладка графа  $SLCay(F_2(\text{var}\{m43\}), \{a, b\})$  представлена на Рис. 3.34. А основа левого графа Кэли полугруппы  $F_n(\text{var}\{m43\})$  при  $n \geq 3$  содержит подграф гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств  $\{a, a^3, ba^2\}$  и  $\{a^2, ba, ca^2\}$ :  $a - a^2$ ;  $a - ba$ ;  $a - ca - ca^2$ ;  $a^3 - a^2$ ;  $a^3 - ba^3 - bab - b^2a^2 - b^2a - ba$ ;  $a^3 - ca^3 - ca^2$ ;  $ba^2 - a^2$ ;  $ba^2 - ba$ ;  $ba^2 - cba^2 - ca^2$ .

Базис  $m44$ :

Основы правого и левого графа Кэли  $n$ -порожденной свободной полугруппы многообразия  $\text{var}\{m44\}$  являются дизъюнктивным объединением  $n$  попарно изоморфных  $K_n$  полных графов порядка  $n$ . Следовательно, правый и левый граф Кэли полугруппы  $F_n(\text{var}\{m44\})$  допускает плоскую укладку при  $n \leq 4$ . А для  $n \geq 5$  основа правого графа Кэли полугруппы  $F_n(\text{var}\{m44\})$  содержит подграф гомеоморфный графу  $K_5$  на следующих десяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множества  $\{a, ab, ac, ad, ae\}$ :  $a - ab$ ;  $a - ac$ ;  $a - ad$ ;  $a - ae$ ;  $ab - ac$ ;  $ab - ad$ ;  $ab - ae$ ;  $ac - ad$ ;  $ac - ae$ ;  $ad - ae$ . В левом графе аналогичным образом обнаруживается подграф гомеоморфный графу  $K_5$  на следующих десяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множества  $\{a, ba, ca, da, ea\}$ :  $a - ba$ ;  $a - ca$ ;  $a - da$ ;  $a - ea$ ;  $ab - ca$ ;  $ba - da$ ;  $ba - ea$ ;  $ca - da$ ;  $ca - ea$ ;  $da - ea$ .

Базис  $m45$ :

Граф  $SCay(F_4(\text{var}\{m45\}), \{a, b, c, d\})$  состоит из четырёх попарно изоморфных связанных компонент. Плоская укладка одной из этих компонент представлена на Рис. 3.35. В основе графа Кэли полугруппы  $F_n(\text{var}\{m45\})$  для  $n \geq 5$  дальнейшее увеличение числа образующих приводит к появлению подграфа гомеоморфного графу  $K_{3,3}$  на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств  $\{a, ab, aba\}$  и  $\{abc, abd, abe\}$ :  $a - ac - acb - abc$ ;  $a - ad - adb - abd$ ;  $a - ae - aeb - abe$ ;  $ab - abc$ ;  $ab - abd$ ;  $ab - abe$ ;  $aba - abc$ ;  $aba - abd$ ;  $aba - abe$ .



**Рис. 3.35.** Плоская укладка одной из четырёх попарно изоморфных связных компонент графа  $SCay(F_4(\text{var}\{m45\}), \{a, b, c, d\})$

**Fig. 3.35.** Planar embedding of one of the four pairwise isomorphic connected components of the graph  $SCay(F_4(\text{var}\{m45\}), \{a, b, c, d\})$

Тождества  $xyzx = x^2yz$  и  $xyzy = xzy^2$  зеркально симметричны друг для друга, поэтому граф  $SLCay(F_4(\text{var}\{m45\}), \{a, b, c, d\})$  изоморфен графу  $SCay(F_4(\text{var}\{m45\}), \{a, b, c, d\})$  и имеет плоскую укладку каждой из четырех своих компонент аналогичную представленной на Рис. 3.35 с точностью до обращения порядка следования букв в словах соответствующих вершин. А в основе левого графа Кэли полугруппы  $F_n(\text{var}\{m45\})$  для  $n \geq 5$  дальнейшее увеличение числа образующих аналогичным образом приводит к появлению подграфа гомеоморфного графу  $K_{3,3}$  на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств  $\{a, ba, aba\}$  и  $\{cba, dba, eba\}$ :  $a - ca - bca - cba$ ;  $a - da - bda - dba$ ;  $a - ea - bea - eba$ ;  $ba - cba$ ;  $ba - dba$ ;  $ba - eba$ ;  $aba - cba$ ;  $aba - dba$ ;  $aba - eba$ .

Базис  $m46$ :

Плоская укладка графа  $SCay(F_3(\text{var}\{m46\}), \{a, b, c\})$  представлена на Рис. 3.36. А в основе графа Кэли полугруппы  $F_n(\text{var}\{m46\})$  для  $n \geq 4$  дальнейшее увеличение числа образующих приводит к появлению подграфа гомеоморфного графу  $K_{3,3}$  на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств  $\{a, a^2, aba\}$  и  $\{ab, ac, ad\}$ :  $a - ab$ ;  $a - ac$ ;  $a - ad$ ;  $a^2 - ab$ ;  $a^2 - ac$ ;  $a^2 - ad$ ;  $aba - ab$ ;  $aba - abc - abca - acb - ac$ ;  $aba - abd - abda - adb - ad$ .

Плоская укладка графа  $SLCay(F_2(\text{var}\{m46\}), \{a, b\})$  представлена на Рис. 3.37. А в основе левого графа Кэли полугруппы  $F_n(\text{var}\{m46\})$  для  $n \geq 3$  дальнейшее увеличение числа образующих приводит к появлению подграфа гомеоморфного графу  $K_{3,3}$  на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств  $\{a, b, c\}$  и  $\{a^2, b^2, c^2\}$ :  $a - a^2$ ;  $a - ba - aba - b^2$ ;  $a - ca - aca - c^2$ ;  $b - ab - ba^2 - a^2$ ;  $b - b^2$ ;  $b - cb - bcb - c^2$ ;  $c - ac - ca^2 - a^2$ ;  $c - bc - cb^2 - b^2$ ;  $c - c^2$ .

Базис  $m47$ :

Плоская укладка графа  $SCay(F_2(\text{var}\{m47\}), \{a, b\})$  представлена на Рис. 3.38.а. А в основе графа Кэли полугруппы  $F_n(\text{var}\{m47\})$  при  $n \geq 3$  обнаруживается подграф го-

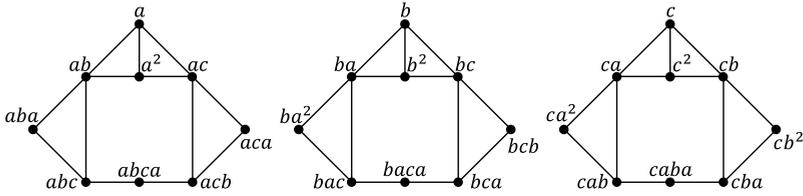


Рис. 3.36. Плоская укладка графа  $SCay(F_3(\text{var}\{m46\}), \{a, b, c\})$

Fig. 3.36. Planar embedding of the graph  $SCay(F_3(\text{var}\{m46\}), \{a, b, c\})$

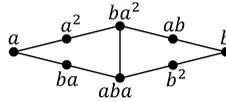


Рис. 3.37. Плоская укладка графа  $SLCay(F_2(\text{var}\{m46\}), \{a, b\})$

Fig. 3.37. Planar embedding of the graph  $SLCay(F_2(\text{var}\{m46\}), \{a, b\})$

меоморфный графу  $K_{3,3}$  на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств  $\{a, a^2b, aca\}$  и  $\{a^2, aba, ac\}$ :  $a - a^2$ ;  $a - ab - aba$ ;  $a - ac$ ;  $a^2b - a^2$ ;  $a^2b - aba$ ;  $a^2b - a^2bc - abca - acb - ac$ ;  $aca - a^2c - a^2$ ;  $aca - ca - c - cb - bcb - bc - b - ba - aba$ ;  $aca - ac$ .



Рис. 3.38. Плоская укладка графа а)  $SCay(F_2(\text{var}\{m47\}), \{a, b\})$ ;

б)  $SLCay(F_2(\text{var}\{m47\}), \{a, b\})$

Fig. 3.38. Planar embedding of the graph а)  $SCay(F_2(\text{var}\{m47\}), \{a, b\})$ ;

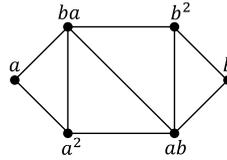
б)  $SLCay(F_2(\text{var}\{m47\}), \{a, b\})$

Плоская укладка графа  $SLCay(F_2(\text{var}\{m47\}), \{a, b\})$  представлена на Рис. 3.38.б. А в основе левого графа Кэли полугруппы  $F_n(\text{var}\{m47\})$  при  $n \geq 3$  обнаруживается подграф гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств  $\{a, ba^2, aca\}$  и  $\{a^2, aba, ca\}$ :  $a - a^2$ ;  $a - ba - aba$ ;  $a - ca$ ;  $ba^2 - a^2$ ;  $ba^2 - aba$ ;  $ba^2 - cba^2 - acba - bca - ca$ ;  $aca - ca^2 - a^2$ ;  $aca - ac - c - bc - bcb - cb - b - ab - aba$ ;  $aca - ca$ .

Базис  $m48$ :

Основа графа Кэли полугруппы  $F_n(\text{var}\{m48\})$  планарна при любом  $n$ , так как она является дизъюнктивным объединением  $n$  полных двудольных графов  $K_{1,n}$  содержащих одну вершину в первой доле и  $n$  вершин во второй доле.

Плоская укладка графа  $SLCay(F_2(\text{var}\{m48\}), \{a, b\})$  представлена на Рис. 3.39. А в основе левого графа Кэли полугруппы  $F_n(\text{var}\{m48\})$  при  $n \geq 3$  обнаруживается подграф гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств  $\{a, ab, ac\}$  и  $\{a^2, ba, ca\}$ :  $a - a^2$ ;  $a - ba$ ;  $a - ca$ ;  $ab - a^2$ ;  $ab - ba$ ;  $ab - ca$ ;  $ac - a^2$ ;  $ac - ba$ ;  $ac - ca$ .



**Рис. 3.39.** Плоская укладка графа  $SLGay(F_2(\text{var}\{m48\}), \{a, b\})$

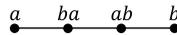
**Fig. 3.39.** Planar embedding of the graph  $SLGay(F_2(\text{var}\{m48\}), \{a, b\})$

Идемпотентные неперестановочные:

Базис  $m49$ :

Основа графа Кэли полугруппы  $F_n(\text{var}\{m49\})$  планарна при любом  $n$ , так как является ациклическим графом, то есть лесом, состоящим из  $n$  деревьев, каждое из которых содержит  $1 + (n - 1) + (n - 1)(n - 2) + \dots + (n - 1)! = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i}^{n-1} j$  вершин, что после упрощения выражения равно  $1 + e(n - 1) \int_1^\infty \frac{t^{n-2}}{e^t} dt$ .

Плоская укладка графа  $SLGay(F_2(\text{var}\{m49\}), \{a, b\})$  представлена на Рис. 3.40. А в основе левого графа Кэли полугруппы  $F_n(\text{var}\{m49\})$  при  $n \geq 3$  обнаруживается подграф гомеоморфный графу  $K_{3,3}$  на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств  $\{acb, ba, bca\}$  и  $\{ca, cab, cba\}$ :  $acb - cb - bc - c - ac - ca$ ;  $acb - cab$ ;  $acb - cba$ ;  $ba - a - ca$ ;  $ba - ab - cab$ ;  $ba - cba$ ;  $bca - ca$ ;  $bca - cab$ ;  $bca - cba$ .



**Рис. 3.40.** Плоская укладка графа  $SLGay(F_2(\text{var}\{m49\}), \{a, b\})$

**Fig. 3.40.** Planar embedding of the graph  $SLGay(F_2(\text{var}\{m49\}), \{a, b\})$

Базис  $m50$ :

Граф  $SCay(F_4(\text{var}\{m50\}), \{a, b, c, d\})$  состоит из четырёх попарно изоморфных связанных компонент. Плоская укладка одной из таких связанных компонент представлена на Рис. 3.41. Но уже при выборе пяти образующих в основе графа Кэли полугруппы  $F_n(\text{var}\{m50\})$ , где  $n \geq 5$ , обнаруживается подграф гомеоморфный графу  $K_5$  на следующих десяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множества  $\{abcd, abcda, abcdb, abcdc, abcde\}$ :  $abcd - abcda$ ;  $abcd - abcdb$ ;  $abcd - abcdc$ ;  $abcd - abcde$ ;  $abcda - abcdb$ ;  $abcda - abcdc$ ;  $abcda - abcde$ ;  $abcdb - abcdc$ ;  $abcdb - abcde$ ;  $abcdc - abcde$ .

Плоская укладка основы левого графа Кэли полугруппы  $F_n(\text{var}\{m50\})$  при  $n = 2$  представлена на Рис. 3.42, а дальнейшее увеличение числа образующих приводит к появлению подграфа гомеоморфного графу  $K_{3,3}$  на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств  $\{acba, ba, bca\}$  и  $\{ca, caba, cba\}$ :  $acba - bacba - aca - ca$ ;  $acba - caba$ ;  $acba - cba$ ;  $ba - a - ca$ ;  $ba - aba - caba$ ;  $ba - cba$ ;  $bca - ca$ ;  $bca - caba$ ;  $bca - cba$ .

Доказательство завершено.

#### 4. Статистическая обработка результатов

Для полноты картины осуществим статистическую обработку полученных результатов методом PCA [19] с последующей кластеризацией рассмотренных многообразий



ду первым вхождением буквы  $x$  в левом и правом слове; f16) максимальная разность между первым вхождением буквы  $y$  в левом и правом слове; f17) максимальная разность между первым вхождением буквы  $z$  в левом и правом слове; f18) максимальная разность между первым вхождением буквы  $w$  в левом и правом слове; f19) минимальная разность между первым вхождением буквы  $x$  в левом и правом слове; f20) минимальная разность между первым вхождением буквы  $y$  в левом и правом слове; f21) минимальная разность между первым вхождением буквы  $z$  в левом и правом слове; f22) минимальная разность между первым вхождением буквы  $w$  в левом и правом слове; f23) максимальная разность между последним вхождением буквы  $x$  в левом и правом слове; f24) максимальная разность между последним вхождением буквы  $y$  в левом и правом слове; f25) максимальная разность между последним вхождением буквы  $z$  в левом и правом слове; f26) максимальная разность между последним вхождением буквы  $w$  в левом и правом слове; f27) минимальная разность между последним вхождением буквы  $x$  в левом и правом слове; f28) минимальная разность между последним вхождением буквы  $y$  в левом и правом слове; f29) минимальная разность между последним вхождением буквы  $z$  в левом и правом слове; f30) минимальная разность между последним вхождением буквы  $w$  в левом и правом слове; f31) максимальная разность между первым и последним вхождением буквы  $x$  в левом и правом слове; f32) максимальная разность между первым и последним вхождением буквы  $y$  в левом и правом слове; f33) максимальная разность между первым и последним вхождением буквы  $z$  в левом и правом слове; f34) максимальная разность между первым и последним вхождением буквы  $w$  в левом и правом слове; f35) минимальная разность между первым и последним вхождением буквы  $x$  в левом и правом слове; f36) минимальная разность между первым и последним вхождением буквы  $y$  в левом и правом слове; f37) минимальная разность между первым и последним вхождением буквы  $z$  в левом и правом слове; f38) минимальная разность между первым и последним вхождением буквы  $w$  в левом и правом слове.

Разделение многообразий по значениям рангов планарности  $r_\pi$  методом PCA дало представленные в Таблице 4.1 результаты.

**Таблица 4.1.** Корреляции исходных факторов по осям

**Table 4.1.** Correlations of initial factors along the axes

По первой оси (Along the first axis)			По второй оси (Along the second axis)		
	correlation	p.value		correlation	p.value
f17	8.475E-01	8.455E-15	f3	7.233E-01	2.975E-09
f33	8.097E-01	1.082E-12	f1	6.824E-01	4.813E-08
f25	8.097E-01	1.082E-12	f2	6.739E-01	8.127E-08
f14	7.409E-01	7.636E-10	f5	6.403E-01	5.508E-07
f12	7.409E-01	7.636E-10	f31	6.323E-01	8.435E-07
f7	5.876E-01	7.244E-06	f9	6.040E-01	3.411E-06
f4	5.377E-01	5.655E-05	f6	5.771E-01	1.147E-05
f20	5.036E-01	1.931E-04	f23	4.387E-01	1.438E-03
f34	4.941E-01	2.655E-04	f15	4.235E-01	2.178E-03
f26	4.941E-01	2.655E-04	f34	4.229E-01	2.213E-03

По первой оси (Along the first axis)			По второй оси (Along the second axis)		
f18	4.941E-01	2.655E-04	f26	4.229E-01	2.213E-03
f8	4.941E-01	2.655E-04	f18	4.229E-01	2.213E-03
f16	4.706E-01	5.628E-04	f8	4.229E-01	2.213E-03
f37	4.441E-01	1.235E-03	f14	2.998E-01	3.442E-02
f29	4.441E-01	1.235E-03	f12	2.998E-01	3.442E-02
f21	4.441E-01	1.235E-03	f11	-2.801E-01	4.881E-02
f36	3.817E-01	6.239E-03	f20	-3.691E-01	8.351E-03
f28	2.845E-01	4.521E-02	f36	-4.838E-01	3.713E-04
f35	-3.119E-01	2.745E-02	f28	-6.662E-01	1.287E-07
f9	-3.405E-01	1.553E-02			
f10	-4.466E-01	1.150E-03			

При этом разделение значений  $r_\pi$  по второй оси имеет следующие характеристики:  $R2 = 4.321E - 01$ ,  $p.value = 3.172E - 05$ .

Далее обнаружилось, что наибольший коэффициент корреляции  $r = 0.59612874$  с набором найденных значений рангов планарности доставляет вспомогательный параметр  $fn = ((1+f9)(1+f12))/((1+f3)(1+f8))$ . Оставив ведущие факторы f17, f33 и дополнив их параметром fn было произведено повторное разделение многообразий по значениям рангов планарности  $r_\pi$  методом PCA, что дало представленные в Таблице 4.2 результаты.

**Таблица 4.2.** Корреляции ведущих факторов по осям

**Table 4.2.** Correlations of leading factors along the axes

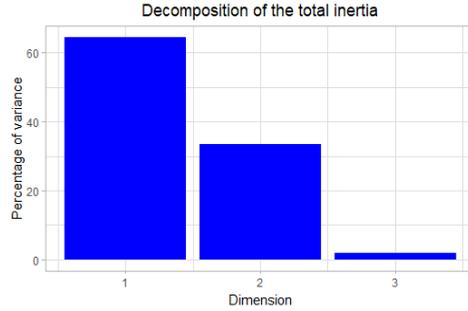
По первой оси (Along the first axis)			По второй оси (Along the second axis)		
	correlation	p.value		correlation	p.value
f33	9.837E-01	2.097E-37	fn	9.998E-01	2.786E-82
f17	9.834E-01	3.210E-37			

При этом разделение значений  $r_\pi$  по второй оси стало еще более статистически значимым:  $R2 = 5.703E - 01$ ,  $p.value = 7.727E - 08$ .

Этот набор данных содержит 50 наблюдений за значениями рангов планарности, меняющимися при изменении тождеств базисной системы соответствующего многообразия, и 4 переменные, 1 качественная переменная рассматривается как основная.

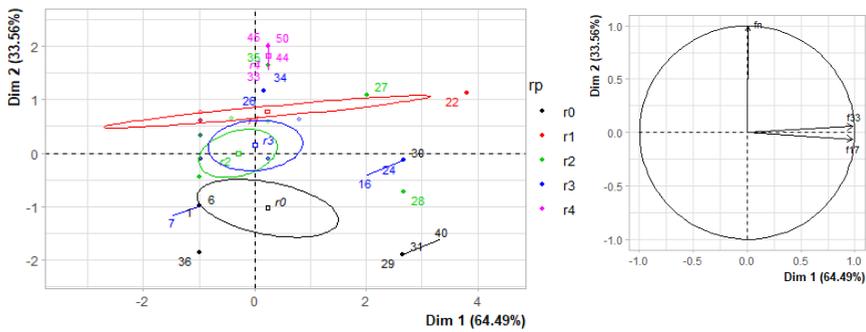
Анализ графиков не обнаруживает никаких выбросов. Представленная на Рис. 4.1 инерция первых измерений показывает, существуют ли сильные связи между переменными, и указывает на количество осей, которые следует изучать. Первые две оси анализа выражают 98,04% инерции общего набора данных, что означает, что 98,04% переменных объясняются корреляционной плоскостью. Этот процент довольно высок, и поэтому первая плоскость идеально отражает изменчивость данных. Это значение больше эталонного значения, равного 79,49%, таким образом, изменчивость, объясняемая этой плоскостью, значима (эталонное значение представляет собой 0,95-квантиль процентного распределения инерции, полученного путем моделирования 14634 таблиц данных эквивалентного размера на основе нормального распределения).

На Рис. 4.2 представлены факторная плоскость и корреляционный круг. Здесь  $r_0$



**Рис. 4.1.** Разложение общей инерции для правых рангов планарности

**Fig. 4.1.** Decomposition of the total inertia for right ranks of planarity



**Рис. 4.2.** Факторная плоскость и корреляционный круг для правых рангов планарности

**Fig. 4.2.** Individuals factor map (PCA) and variables factor map (PCA) for right ranks of planarity

обозначает бесконечный ранг планарности, а  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  и  $r_4$  соответственно ранги планарности со значениями 1, 2, 3 и 4.

Первая ось противопоставляет многообразия 29, 31, 40, 28, 16, 24 и 30 (в правой полуплоскости, что характеризуется сильно положительной координатой на оси) многообразиям типа 1, 6, 7 и 36 (в левой полуплоскости, что характеризуется сильно отрицательной координатой на оси).

Группа, в которую входят многообразия 29, 31, 40, 28, 16, 24 и 30 (характеризуется положительной координатой на оси), разделяется высокими значениями факторов  $f_{17}$  и  $f_{33}$  (переменные отсортированы от самых сильных) и низкими значениями для переменной  $f_n$ .

Группа, в которой стоят многообразия 1, 6, 7 и 36 (характеризуется отрицательной координатой на оси), разделяется низкими значениями для  $f_{33}$  и  $f_{17}$  (переменные отсортированы по возрастанию от самых слабых).

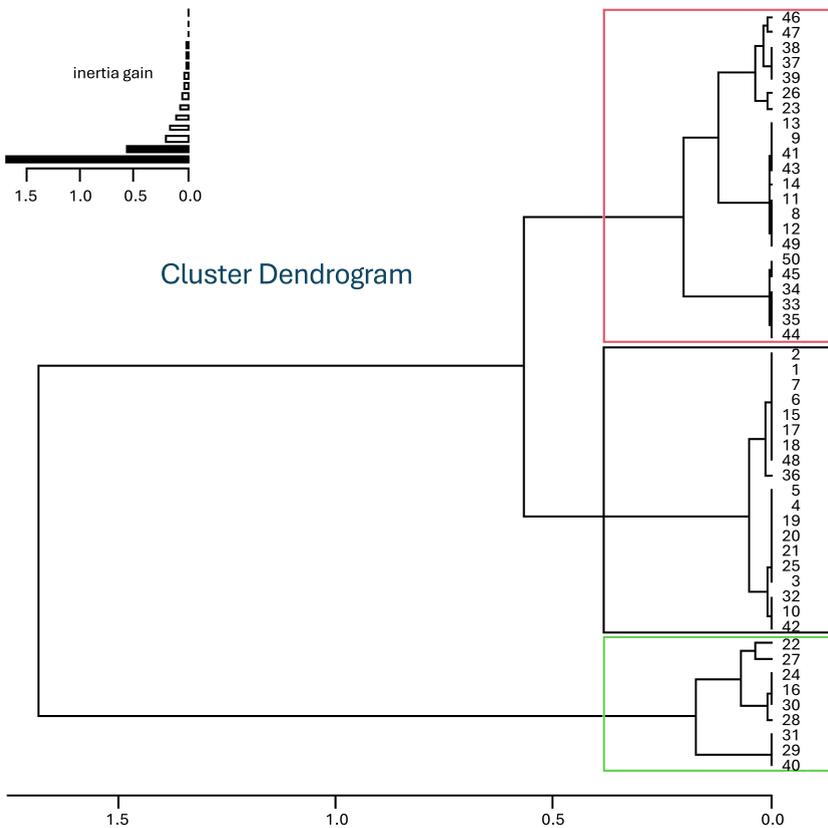
Вторая ось противопоставляет многообразия 27, 45, 50, 33, 34, 35 и 44 (в верхней части графика, характеризующейся сильно положительной координатой на оси) многообразиям 29, 31, 40, 1, 6, 7, 36, 28, 16 и 24 (в нижней части графика, характеризующейся

сильно отрицательной координатой на оси).

Группа, в которую входят многообразия 27, 45, 50, 33, 34, 35 и 44 (характеризуется положительной координатой на оси), отделена высокими значениями для переменной  $f_n$ . Группа, в которой стоят многообразия 1, 6, 7 и 36 (характеризуется отрицательной координатой на оси), отделена низкими значениями для переменных  $f_{33}$  и  $f_{17}$  (переменные отсортированы по возрастанию от самых слабых).

Группа, в которую входят многообразия 29, 31, 40, 28, 16, 24 и 30 (характеризуется отрицательной координатой на оси), характерна тем, что имеет высокие значения для  $f_{17}$  и  $f_{33}$  (переменные отсортированы по возрастанию от самых сильных), но низкие значения для переменной  $f_n$ .

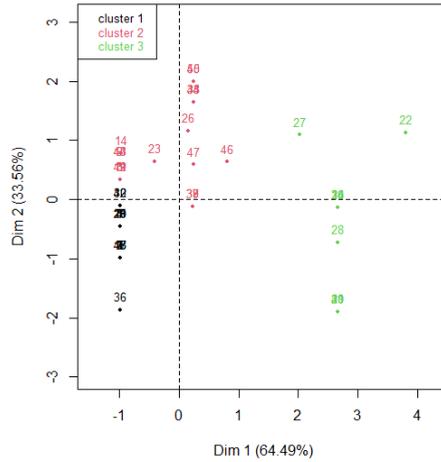
Наконец, классификация многообразий по рангам планарности, позволяет выделить 3 кластера, визуализированные на Рис. 4.3 и Рис. 4.4.



**Рис. 4.3.** Иерархическое дерево для правых рангов планарности

**Fig. 4.3.** Hierarchical tree for right ranks of planarity

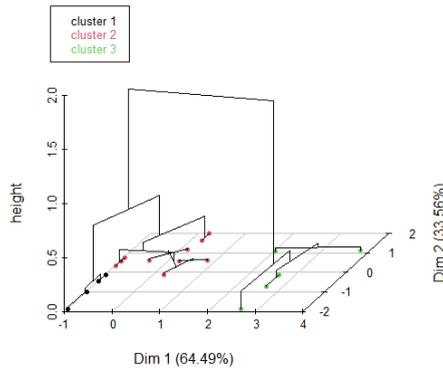
Кластер 1 состоит из многообразий 1, 6, 7 и 36. Для этой группы характерны низкие значения для переменных  $f_{33}$ ,  $f_n$  и  $f_{17}$  (переменные отсортированы от самых слабых). Кластер 2 состоит из многообразий 26, 33, 34, 35, 44, 45 и 50. Для этой группы характерны высокие значения для переменной  $f_n$ . Кластер 3 состоит из многообразий 16, 22, 24, 27, 28, 29, 30, 31 и 40. Для этой группы характерны высокие значения для



**Рис. 4.4.** Восходящая иерархическая классификация многообразий по правым рангам планарности

**Fig. 4.4.** Ascending hierarchical classification of the individuals on right ranks of planarity

переменных f17 и f33 (переменные отсортированы от самых сильных).



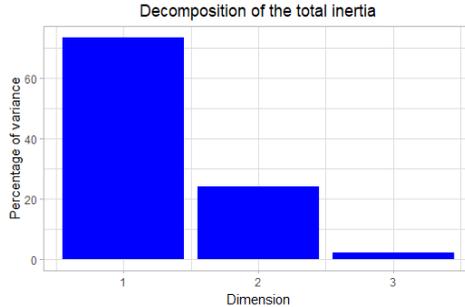
**Рис. 4.5.** Иерархическое дерево на факторной карте для правых рангов планарности

**Fig. 4.5.** Hierarchical tree on the factorial map for right ranks of planarity

Иерархическое дерево может быть нарисовано на факторной карте с раскрашенными точками в соответствии с их кластерами так, как это представлено на Рис. 4.5.

Повторяя аналогичные рассуждения для левых рангов планарности находим вспомогательный параметр  $Lfn = (1+f4)(1+f9)/(1+f3)(1+f3)$ , имеющий с левыми рангами планарности наибольшую корреляцию  $r = 0.45563657$ . После добавления к факторам f17 и f33, являющимся ведущими, новой переменной Lfn анализ главных компонент показывает на Рис. 4.6, что первые две оси выражают 97,82% общей инерции набора данных, что означает, что 97,82% общей изменчивости значений левых рангов планарности объясняются двумерной плоскостью. Этот процент достаточно высок, и поэтому

первая плоскость идеально отражает изменчивость данных. Это значение больше эталонного значения, равного 79,49%, таким образом, изменчивость, объясняемая этой плоскостью, значима (эталонное значение представляет собой 0,95-квантиль процентного распределения инерции, полученного путем моделирования 14397 таблиц данных эквивалентного размера на основе нормального распределения).



**Рис. 4.6.** Разложение общей инерции для левых рангов планарности

**Fig. 4.6.** Decomposition of the total inertia for left ranks of planarity

На Рис. 4.7 представлена факторная плоскость и корреляционный круг для разделения левых рангов планарности. Первая ось противопоставляет многообразия 29, 31, 40, 16, 24, 30, 28 и 27 (лежащие в правой полуплоскости, которая характеризуется сильно положительной координатой на этой оси) многообразиям 10 и 32 (из левой полуплоскости, которая характеризуется сильно отрицательной координатой на оси).

Группа, в которой находится многообразие 27 (характеризуется положительной координатой на оси), выделяется высоким значением для  $f_{33}$ . Группа, в которой находятся многообразия 16, 24, 30 и 28 (тоже характеризуется положительной координатой на оси), выделяется высокими значениями для  $f_{17}$  и  $f_{33}$  (переменные отсортированы по убыванию от самых сильных). Группа, в которой находятся многообразия 29, 31 и 40 (характеризуется положительной координатой на оси), выделяется высокими значениями для  $f_{17}$  и  $f_{33}$  (переменные отсортированы от самых сильных), но низкими значениями для переменной  $L_{fn}$ . Группа, в которой находятся многообразия 10 и 32 (характеризуется отрицательной координатой на оси), выделяется высокими значениями для переменной  $L_{fn}$ . Наконец, группа 5 и группа 6 (характеризуется отрицательной координатой на оси) выделяется низкими значениями для переменных  $f_{17}$  и  $f_{33}$  (переменные отсортированы по возрастанию, начиная от самых слабых).

Классификация рассматриваемых многообразий по левым рангам планарности, позволяет выделить 6 кластеров, визуализированных на Рис. 4.8 и Рис. 4.9.

Кластер 1 состоит из многообразий 10 и 32. Для этой группы характерны высокие значения для переменной  $L_{fn}$ . Кластер 2 состоит из многообразий, которые выделяются высокими значениями для переменной  $L_{fn}$  и низкими значениями для  $f_{33}$  и  $f_{17}$  (переменные отсортированы по возрастанию от самых слабых). Кластер 3 состоит из многообразий 9, 13, 14 и 36. Для этой группы характерны низкие значения  $L_{fn}$ . Кластер 4 состоит из многообразий, значения определяющих факторов у которых существенно не отличаются от среднего. Кластер 5 состоит из многообразий 16, 22, 24, 27, 28 и 30. Для этой группы характерны высокие значения  $f_{33}$  и  $f_{17}$  (переменные отсортированы от самых сильных). Кластер 6 состоит из многообразий 29, 31 и 40. Для этой группы ха-

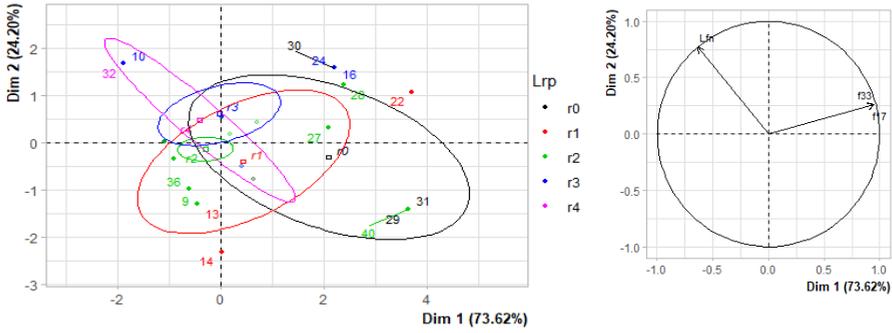


Рис. 4.7. Факторная плоскость и корреляционный круг для левых рангов планарности

Fig. 4.7. Individuals factor map (PCA) and variables factor map (PCA) for left ranks of planarity

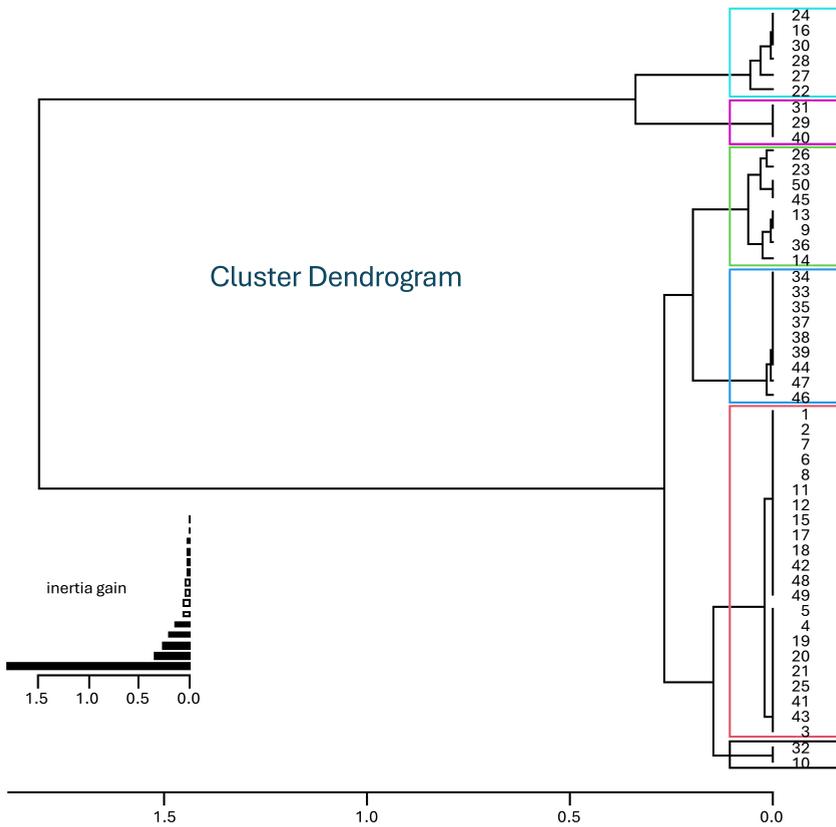
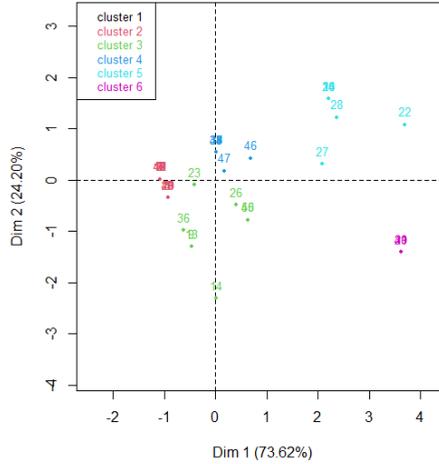


Рис. 4.8. Иерархическое дерево для левых рангов планарности

Fig. 4.8. Hierarchical tree for left ranks of planarity

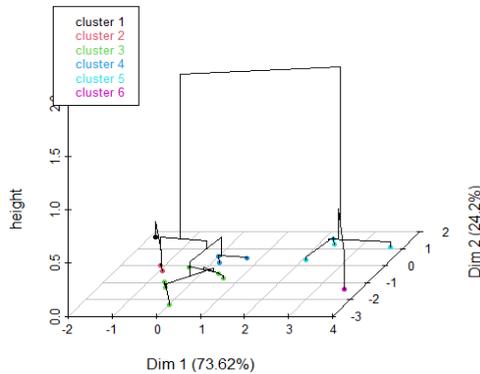
рактены высокие значения f17 и f33 (переменные отсортированы от самых сильных),



**Рис. 4.9.** Восходящая иерархическая классификация многообразий по левым рангам планарности

**Fig. 4.9.** Ascending hierarchical classification of the individuals on left ranks of planarity

но низкие значения для переменной  $Lfn$ .



**Рис. 4.10.** Иерархическое дерево на факторной карте для левых рангов планарности

**Fig. 4.10.** Hierarchical tree on the factorial map for left ranks of planarity

Иерархическое дерево может быть нарисовано на факторной карте с раскрашенными точками в соответствии с их кластерами так, как это представлено на Рис. 4.10.

В результате применения статистического анализа приходим к выводу о том, что ведущими факторами из рассмотренных числовых характеристик базиса тождеств, оказывающих наибольшее влияние на значение ранга планарности соответствующего многообразия, являются:  $f17$ ) максимальная разность между первым вхождением буквы  $z$  в левом и правом слове;  $f33$ ) максимальная разность между первым и последним вхождением буквы  $z$  в левом и правом слове.

## 5. Заключение

Основная часть новых результатов, полученных в статье, была анонсирована ранее в материалах работы Международной конференции «МАЛЫЦЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ» 2024 года [20].

Полученные результаты имеют практическое значение для дискретной математики, теории полугрупп и алгоритмической теории графов, способствуя дальнейшему исследованию взаимосвязей между алгебраическими и топологическими свойствами конечных структур.

Подводя итог, можно сказать, что полугруппы четвертого порядка являются богатым предметом изучения с далеко идущими последствиями в алгебре, вычислениях и моделировании явлений реального мира. Их простота в сочетании со структурным разнообразием делает их важнейшим шагом на пути к пониманию более сложных алгебраических систем.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ремесленников В.Н., Рыбалов А.Н., Шевляков А.Н., Соломатин Д.В., Мартынов Л.М., Носков Г.А., Трейер А.В., Зубков А.Н., Ильев В.П., Гичев В.М. [Электронный ресурс] // Юбилейное 900-е заседание семинара: Омский алгебраический семинар, 12.11.2015. Режим доступа: <https://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?presentid=12900>
2. Соломатин Д.В. Ранги планарности многообразий коммутативных моноидов // *Вестник Омского университета*. 2012. Т. 4. С. 41–45.
3. Соломатин Д.В. Ранги планарности полугрупповых многообразий, порождённых полугруппами третьего порядка // *Сибирские электронные математические известия*. 2025. Т. 22, № 1. С. 95–109. DOI: 10.33048/semi.2025.22.008.
4. Соломатин Д.В. Ранги планарности многообразий коммутативных полугрупп // *Прикладная дискретная математика*. 2016. Т. 34, № 4. С. 50–64. DOI: 10.17223/20710410/34/4.
5. Соломатин Д.В. О рангах планарности многообразий полугрупп идемпотентов, нильполугрупп и полугрупп с перестановочным тождеством // *Вестник Омского университета*. 2017. Т. 4, № 86. С. 11–21. DOI: 10.25513/1812-3996.2017.4.11-21.
6. Соломатин Д.В. О рангах планарности многообразий нильполугрупп // *Вестник Омского университета*. 2019. Т. 2, № 24. С. 17–22. DOI : 10.25513/1812-3996.2019.24(2).17-22.
7. Nupo N., Panma S. Certain structural properties for Cayley regularity graphs of semigroups and their theoretical applications. *AIMS Mathematics*. 2023. Vol. 8., no. 7. P. 16228–16239. DOI: 10.3934/math.2023830
8. Alshammari M. F. A., Mat Hassim H. I., Sarmin N. H., Erfanian A. The intersection power Cayley graph of cyclic groups of order  $pq$ . *AIP Conf. Proc.* 13 September 2024. Vol. 3150., no. 1. DOI: 10.1063/5.0229066.

9. Cheng T., Mao J. A new class of directed strongly regular Cayley graphs over dicyclic groups. *AIMS Mathematics*. 2024. Vol. 9., no. 9. P. 24184–24192. DOI: 10.3934/math.20241176.
10. García-Marco I., Knauer K. Coloring minimal Cayley graphs. *European Journal of Combinatorics*. 2025. Vol. 125. DOI: 10.1016/j.ejc.2024.104108.
11. Meksawang J., Panma S., Knauer U. Characterization of finite simple semigroup digraphs. *Algebra and Discrete Mathematics*. 2011. Vol. 12., no. 1. P. 53–68.
12. Zulkarnain A., Sarmin N.H., Mat Hassim H.I., Erfanian A. A variation of Cayley graph for cyclic groups of composite order. *AIP Conference Proceedings*. 2024. Vol. 3189., no. 1. DOI: 10.1063/5.0225729.
13. Hernández-Ortiz R., Knauer K., Montejano L.P., Scheucher M. Roudneff's Conjecture in Dimension 4. *EUROCOMB'23*. 2023. P. 561–567. DOI: 10.5817/CZ.MUNI.EUROCOMB23-078.
14. Felsner S., Knauer K., Ueckerdt T. Plattenbauten: Touching Rectangles in Space. *Adler I., Müller, H. (eds) Graph-Theoretic Concepts in Computer Science. WG 2020. Lecture Notes in Computer Science()*. 2020. Vol. 12301. Springer, Cham. DOI: 10.1007/978-3-030-60440-0\_13.
15. Соломатин Д. В. Исследования полугрупп с планарными графами Кэли: результаты и проблемы // *Прикладная дискретная математика*. 2021. № 54. С. 5–57. DOI: 10.17223/20710410/54/1
16. Edmunds C. C. Varieties generated by semigroups of order four. *Semigroup Forum*. 1980. Vol. 21. P. 67–81. DOI: 10.1007/BF02572537.
17. McCune W., et al. Prover9 manual. [Электронный ресурс] 2009. Режим доступа: <https://www.cs.unm.edu/~mccune/prover9/manual/2009-11A/>
18. McCune W. Mace4 reference manual and guide. 2003. arXiv:cs/0310055.
19. Lê S., Josse J., Husson F. FactoMineR: An R Package for Multivariate Analysis // *Journal of Statistical Software*. 2008. Vol. 25., no. 1. P. 1–18. DOI: 10.18637/jss.v025.i01
20. Соломатин Д. В. Ранги планарности многообразий, порожденных не идемпотентными и не перестановочными полугруппами четвертого порядка // Тезисы докладов. Международная конференция МАЛЫЦЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ (Новосибирск, 11–15 ноября 2024 г.). Новосибирск, 2024. С. 123.

*Поступила 21.11.2024; доработана после рецензирования 10.05.2025;  
принята к публикации 28.05.2025*

*Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.*

## REFERENCES

1. V.N. Remeslennikov, A.N. Rybalov, A.N. Shevlyakov, D.V. Solomatin, L.M. Martynov, G.A. Noskov, A.V. Treier, A.N. Zubkov, V.P. Il'ev, V.M. Gichev, "Novye problemy algebrы i logiki. Yubileinoe 900-e zasedanie seminarа: Omskii algebraicheskiy seminar", 2015 (In Russ.), Available at: <https://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?presentid=12900>.
2. D.V. Solomatin, "Rangi planarnosti mnogoobrazii kommutativnykh monoidov", *Herald of Omsk University*, **4** (2012), 41–45 (In Russ.).
3. D.V. Solomatin, "Planarity ranks of semigroup varieties generated by all semigroups of order three", *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2025, no. 22, 95–109 (In Russ.). DOI: 10.33048/semi.2025.22.008
4. D.V. Solomatin, "The ranks of planarity for varieties of commutative semigroups", *Prikladnaya Diskretnaya Matematika*, **34** (2016), 50–64 (In Russ.). DOI: 10.17223/20710410/34/4
5. D.V. Solomatin, "On ranks of the planarity of varieties of all idempotent semigroups, nilsemigroups, and semigroups with the permutation identity", *Herald of Omsk University*, 2017, no. 86, 11–21 (In Russ.). DOI: 10.25513/1812-3996.2017.4.11-21
6. D.V. Solomatin, "On ranks of planarity of nil-semigroups varieties", *Herald of Omsk University*, 2019, no. 24, 17–22 (In Russ.). DOI: 10.25513/1812-3996.2019.24(2).17-22
7. N. Nupo, S. Panma, "Certain structural properties for Cayley regularity graphs of semigroups and their theoretical applications", *AIMS Mathematics*, **8:7** (2023), 16228–16239.. DOI: 10.3934/math.2023830
8. M. F. A. Alshammari, H. I. Mat Hassim, N. H. Sarmin, A. Erfanian, "The intersection power Cayley graph of cyclic groups of order  $pq$ ", *AIP Conf. Proc.*, **3150:1** (2024). DOI: 10.1063/5.0229066
9. T. Cheng, J. Mao, "A new class of directed strongly regular Cayley graphs over dicyclic groups", *AIMS Mathematics*, **9:9** (2024), 24184–24192.. DOI: 10.3934/math.20241176
10. I. García-Marco, K. Knauer, "Coloring minimal Cayley graphs", *European Journal of Combinatorics*, **125** (2025). DOI: 10.1016/j.ejc.2024.104108
11. J. Meksawang, S. Panma, U. Knauer, "Characterization of finite simple semigroup digraphs", *Algebra and Discrete Mathematics*, **12:1** (2011), 53–68..
12. A. Zulkarnain, N. H. Sarmin, H. I. Mat Hassim, A. Erfanian, "A variation of Cayley graph for cyclic groups of composite order", *AIP Conference Proceedings*, **3189:1** (2024). DOI: 10.1063/5.0225729
13. R. Hernández-Ortiz, K. Knauer, L. P. Montejano, M. Scheucher, "Roudneff's Conjecture in Dimension 4", *EUROCOMB'23*, 2023, 561–567.. DOI: 10.5817/CZ.MUNI.EUROCOMB23-078

14. S. Felsner, K. Knauer, T. Ueckerdt, “Plattenbauten: Touching Rectangles in Space”, *Adler I., Müller, H. (eds) Graph-Theoretic Concepts in Computer Science. WG 2020. Lecture Notes in Computer Science()*, **12301**, 2020, 161–173 DOI: 10.1007/978-3-030-60440-0\_13.
15. D. V. Solomatin, “Researches of semigroups with planar Cayley graphs: results and problems”, *Discrete Applied Mathematics*, 2021, no. 54, 5–57 (In Russ.). DOI: 10.17223/20710410/54/1
16. C. C. Edmunds, “Varieties generated by semigroups of order four”, *Semigroup Forum*, **21** (1980), 67–81. DOI: 10.1007/BF02572537
17. W. McCune et al., “Prover9 manual”, 2009, Available at: <https://www.cs.unm.edu/~mccune/prover9/manual/2009-11A/>.
18. W. McCune, “Mace4 reference manual and guide”, 2003, Available at: <https://arxiv.org/abs/cs/0310055/>.
19. Lê S. J. Josse, F. Husson, “FactoMineR: An R Package for Multivariate Analysis”, *Journal of Statistical Software*, **25**:1 (2008), 1–18. DOI: 10.18637/jss.v025.i01
20. D. V. Solomatin, “Rangi planarnosti mnogoobrazii, porozhdennykh ne idempotentnymi i ne perestanovochnymi polugruppami chetvertogo poryadka”, *Collection of Abstracts. International Conference MAL'TSEV MEETING. November 11–15, 2024*, 2024, 125 (In Russ.).

*Submitted 21.11.2024; Revised 10.05.2025; Accepted 28.05.2025*

*The author have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The author declare no conflict of interest.