DOI 10.15507/2079-6900.27.202502.171-184
Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.93

Множества вращения SO(3)-расширений квазипериодических потоков

А. Н. Сахаров

Нижегородский государственный аграрно-технологический университет им. Л. Я. Флорентьева (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

Аннотация. В настоящей статье строится класс специальных потоков на многомерном торе и топологический инвариант таких потоков – множество вращения. Такие потоки возникают в процессе приведения к треугольному виду линейных систем дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами. В процессе такого приведения получается система нелинейных дифференциальных уравнений на многомерном торе, которая порождает проективный поток, индуцируемый исходной линейной системой. В работе строится алгоритм SO(n)-расширения квазипериодической линейной системы. При этом используются известные результаты из теории матричных групп и алгебр Ли. Полученная система уравнений допускает понижение порядка, что позволяет записать правые части в виде тригонометрических полиномов от углов Эйлера на сфере. Случай $n = 3$ рассматривается отдельно. Уравнения, определяющие проективный поток, записываются в явном виде. Проективный поток определен на торе размерности $m+2$, где m – размерность исходного тора. Структура этого потока определяется топологическими инвариантами потока. Например, неособый поток на двумерном торе имеет топологический инвариант – число вращения (А. Пуанкаре). Используя метод М. Эрмана, удается доказать существование и единственность вектора вращения (ρ_1, ρ_2) для проективного потока на $\mathbb{T}^{m+2}$. С помощью теории С. Шварцмана определения множества вращения для потоков на компактных метрических пространствах показывается, что компонента $\rho_2 = 0$. Здесь используется факт, что размерность максимальной торической подалгебры алгебры so(3) равна единице.

Ключевые слова: линейные расширения, групповое расширение, проективное расширение, торическая подалгебра, вектор вращения, асимптотические циклы

Для цитирования: Сахаров А. Н. Множества вращения SO(3)-расширений квазипериодических потоков // *Журнал Средневолжского математического общества.* 2025. Т. 27, № 2. С. 171–184. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202502.171-184

Об авторах:

Сахаров Александр Николаевич, к.ф.-м.н., доцент кафедры прикладной механики, физики и высшей математики, Нижегородский государственный аграрно-технологический университет им. Л.Я. Флорентьева (603146, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Сибирцева, д. 10), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-4520-8062, ansakharov2008@yandex.ru

Original article

MSC2020 34D20

Rotation sets of SO(3)-extensions of quasiperiodic flows

A. N. Sakharov

Nizhny Novgorod State Agrarian and Technological University named after L.Ya. Florentyev (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

Abstract. In this paper, we construct a class of special flows on a multidimensional torus and a topological invariant of such flows, i.e. a rotation set. Such flows arise while reducing linear systems of differential equations with quasiperiodic coefficients to a triangular form. In the process of such a reduction, we obtain a system of nonlinear differential equations on a multidimensional torus, which generates a projective flow induced by the original linear system. In this paper, we use known results from the theory of matrix groups and Lie algebras and construct an algorithm for SO(n)-extension of a quasiperiodic linear system. The resulting system of equations admits a reduction in order, which allows us to write the right-hand sides as trigonometric polynomials in Euler angles on a sphere. The case $n = 3$ is considered separately. The equations defining the projective flow are written explicitly. The projective flow is defined on a torus of dimension $m + 2$, where m is the dimension of the original torus. The structure of this flow is determined by topological invariants of the flow. For example, a non-singular flow on a two-dimensional torus has a topological invariant – the rotation number (A. Poincare). Using M. Herman's method, it is possible to prove the existence and uniqueness of the rotation vector (ρ_1, ρ_2) for the projective flow on $\mathbb{T}^{m+2}$. Using S. Schwartzman's theory defining the rotation set for flows on compact metric spaces, it is shown that the component $\rho_2 = 0$. Here, the fact is used that the dimension of the maximal toric subalgebra of the algebra so(3) is equal to one.

Keywords: linear extensions, group extension, projective extension, toric subalgebra, rotation vector, asymptotic cycles

For citation: *A. N. Sakharov.* Rotation sets of SO(3)-extensions of quasiperiodic flows. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 27:2(2025), 171–184. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202502.171-184

About the authors:

Alexander N. Sakharov, Ph.D. (Phys. and Math.), Associate Professor of the Department of Applied Mechanics, Physics and Higher Mathematics, Nizhny Novgorod State Agrarian and Technological University named after L.Ya. Florentyev (10, Sibirtseva Str., Nizhny Novgorod, 603146, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4520-8062, ansakharov2008@yandex.ru

1. Введение

При описании локального поведения траекторий нелинейной системы дифференциальных уравнений используются линейные системы в вариациях. Для приложений важно описание динамики таких систем для решений на инвариантных многообразиях исходной системы $\mathcal{M}$ (периодические решения, инвариантные торы с квазипериодическими траекториями на них и т.п.). Одним из методов исследования таких систем является метод группового расширения, позволяющий привести линейную систему к треугольному виду. Такое расширение позволяет описать динамику в терминах свойств траекторий нелинейной системы на компактном многообразии. Здесь в качестве группы расширения естественно использовать компактную матричную группу. Процедура расширения сводится к построению векторного поля в алгебре Ли этой группы. Так как такая алгебра обладает коммутативной торической подалгеброй, то возникает векторное поле на расслоении с базой $\mathcal{M}$ и слоем тор. Индуцируемый поток на этом расслоении имеет топологический инвариант – множество вращения. Описанию структуры этого этого множества в простейшем случае посвящена эта работа.

Классическое понятие числа вращения введено А. Пуанкаре для неособых потоков на торе $\mathbb{T}^2$. Заслуга распространения этого понятия для произвольных потоков на компактных метрических пространствах принадлежит С. Шварцману [1]. В отличие от геометрического определения Пуанкаре, он вводит чисто алгебраическое понятие асимптотического цикла, используя инвариантную меру потока. Это понятие совпадает с определением Пуанкаре в случае потоков на торе. Заметим, что на поверхностях рода больше единицы аналогом числа вращения является гомотопический класс вращения (С.Х. Арансон, В.З. Гринес [2]). Поэтому дальнейшие результаты касаются, в основном, структуры множеств вращения потоков на многомерных торах. Развитие этих идей можно найти в обзоре М. Полликотта [3].

Рассмотрим вещественную линейную систему с квазипериодическими коэффициентами

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{x}} = A(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{R}^m,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

где $\boldsymbol{\varphi}$ – угловые координаты на торе $\mathbb{T}^m$, $A(\boldsymbol{\varphi})$ – матрица-функция на торе, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор с рационально независимыми компонентами. Такая система порождает поток на расслоении $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n$, который называется линейным расширением потока на торе. Динамика системы (1.1) легко описывается, когда $A(\boldsymbol{\varphi})$ – треугольная матрица. Систему, не являющуюся треугольной, с помощью группового расширения можно привести к треугольному виду. Абстрактная теорема о приведении к такому виду произвольного линейного расширения минимального потока принадлежит И.У. Бронштейну ([4], теорема 5.8). Произвольная неавтономная линейная система также приводима к треугольному виду согласно теореме Перрона [5]. В случае группы $\mathrm{SO}(n)$ получаем систему на компактном многообразии $\mathbb{T}^m \times \mathrm{SO}(n)$, которая порождает поток, называемый $\mathrm{SO}(n)$-расширением потока на торе $\mathbb{T}^m$. Сужение на какое-либо минимальное множество этого потока дает рекуррентное преобразование системы (1.1) к треугольному виду.

Наиболее подробно изучен случай SO(2)-расширений. Пусть $n = 2$ и матрица A в (1.1) имеет вид

$$A(\boldsymbol{\varphi}) = \begin{pmatrix} a(\boldsymbol{\varphi}) & b(\boldsymbol{\varphi}) \\ c(\boldsymbol{\varphi}) & -a(\boldsymbol{\varphi}) \end{pmatrix}.$$

Тогда поток на торе $\mathbb{T}^{m+1}$ порождается векторным полем

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\theta} = b(\boldsymbol{\varphi}) - c(\boldsymbol{\varphi}) + (b(\boldsymbol{\varphi}) + c(\boldsymbol{\varphi}))\cos\theta + 2a(\boldsymbol{\varphi})\sin\theta. \tag{1.2}$$

Число минимальных множеств у этого потока равно либо 1, либо 2, либо тор $\mathbb{T}^{m+1}$ представляет собой несчетное объединение минимальных множеств (теорема 8, [6]). Поток имеет топологический инвариант – число вращения слоя:

$$\rho = \lim_{t\to\infty} \frac{\theta(t, \boldsymbol{\varphi}_0, \theta_0)}{t},$$

которое не зависит от начальных данных решения $(\boldsymbol{\varphi}_0, \theta_0)$ (Р. Джонсон, Ю. Мозер [7], М. Эрман [8]). При $m > 1$ число вращения слоя не является полным топологическим инвариантом, так как не определяет однозначно топологию минимальных множеств: минимальное множество либо тор $\mathbb{T}^m$ с квазипериодическим потоком на нем, либо почти автоморфное расширение[1] потока на $\mathbb{T}^m$ (Р.Э. Виноград [9]), либо тор $\mathbb{T}^{m+1}$, поток на котором не является квазипериодическим (Р. Джонсон [10]).

Замечание 1.1. *Если в* (1.2) *правую часть для* $\dot{\theta}$ *заменить произвольной функцией* $a(\boldsymbol{\varphi},\theta)$ *на торе* $\mathbb{T}^{m+1}$, *то такой поток также имеет число вращения слоя, не зависящее от начальных данных* [11]. *Рассмотрим эту систему как систему уравнений характеристик квазилинейного уравнения в частных производных*

$$\omega_1\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_1}+\omega_2\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_2}+\cdots+\omega_m\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_m}=a(\boldsymbol{\varphi},\theta).$$

Решения этого уравнения $\theta(\boldsymbol{\varphi},\eta)$ *периодичны по* $\boldsymbol{\varphi}$ *и удовлетворяют равенству* $\theta(\boldsymbol{\varphi},\eta+2\pi)=2\pi+\theta(\boldsymbol{\varphi},\eta)$. *Таким образом, решения (интегральные поверхности) образуют слоение m-мерных цилиндров, число вращения слоя ρ резонансное:* $l\rho-\langle \boldsymbol{k}\,|\boldsymbol{\omega}\,\rangle=0$. *Если ρ рационально, то либо все цилиндры слоения m-мерные торы, либо существует четное число m-мерных торов, а остальные цилиндры асимптотически стремятся к ним. При иррациональном ρ каждый цилиндр либо всюду плотно пересекается с координатой θ, либо существует инвариантное множество, пересечение которого с координатой θ – канторово множество* [12].

Следующий по сложности случай соответствует системе (1.1) размерности три. Здесь удается выявить основные особенности, возникающие при исследовании многомерных систем. В работе строится алгоритм построения $\mathrm{SO}(n)$-расширения квазипериодического потока на торе $\mathbb{T}^m$, индуцированного линейным расширением произвольной размерности (раздел 2). В разделе 3 процедура $\mathrm{SO}(3)$-расширения приводит к потоку на торе $\mathbb{T}^{m+2}$. Для построения множества вращения этого потока используется универсальное понятие асимптотического цикла Шварцмана (раздел 4).

2. Проективное расширение, ассоциированное с линейным расширением

Опишем алгоритм приведения системы (1.1) к треугольному виду с помощью $\mathrm{SO}(n)$-расширения. Пусть $A(\boldsymbol{\varphi})=S(\boldsymbol{\varphi})+R(\boldsymbol{\varphi})$ разложение матрицы $A(\boldsymbol{\varphi})$ на симметрическую и антисимметрическую части. Будем искать такую матрицу $Q\in\mathrm{SO}(n)$, чтобы замена $\boldsymbol{x}=Q\boldsymbol{y}$ приводила систему (1.1) к треугольному виду:

$$Q'\dot{Q}\;=\;Q'A(\boldsymbol{\varphi})Q-T(\boldsymbol{\varphi},Q).$$

Здесь $T(\boldsymbol{\varphi},Q)$ – верхнетреугольная матрица, а символ $'$ обозначает транспонирование. Так как матрица $Q'S(\boldsymbol{\varphi})Q$ симметрическая, то справедливо представление

$$Q'S(\boldsymbol{\varphi})Q=D(\boldsymbol{\varphi},Q)+P(\boldsymbol{\varphi},Q)+P'(\boldsymbol{\varphi},Q),$$

где $D(\boldsymbol{\varphi},Q)$ – диагональная матрица, $P(\boldsymbol{\varphi},Q)$ – верхняя треугольная матрица с нулевой диагональю. Положив

$$T(\boldsymbol{\varphi},Q)=D(\boldsymbol{\varphi},Q)+2P(\boldsymbol{\varphi},Q),$$

[1]Минимальное множество $\mathcal{M}$ такое, что существует хотя бы одна точка $\boldsymbol{\varphi}_0\in\mathbb{T}^m$ с нульмерным слоем: $\mathrm{card}\{\mathcal{M}\boldsymbol{\varphi}_0\}=1$.

получаем следующую систему уравнений для матрицы Q:

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\omega}, \quad Q'\dot{Q} = Q'R(\boldsymbol{\varphi})Q + P'(\boldsymbol{\varphi}, Q) - P(\boldsymbol{\varphi}, Q). \tag{2.1}$$

Эта система определяет поток Φ^t на $\mathbb{T}^m \times \mathrm{SO}(n)$, который имеет минимальные множества. Например, если минимальное множество неприводимый тор[2], то при условии диофантовости вектора частот квазипериодических решений на торе система (1.1) приводима к системе с постоянной матрицей [13].

Тип и количество инвариантных множеств системы (2.1) требует ее дополнительного алгебраического анализа. Правая часть уравнения для Q принимает значения в $\mathrm{so}(n)$ – алгебре Ли всех кососимметрических вещественных матриц порядка n. Координатная запись системы (2.1) зависит от способа параметризации группы $\mathrm{SO}(n)$ и структуры алгебры $\mathrm{so}(n)$. Центр L_0 алгебры $\mathrm{so}(n)$ состоит из всех кососимметрических вещественных матриц вида (при нечетных n)

$$Y = \mathrm{diag}\left(\theta_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \theta_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \theta_{[n/2]} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 0\right).$$

Другое название центра – максимальная торическая подалгебра адгебры $\mathrm{so}(n)$. Тогда $\mathrm{so}(n)$ является прямой суммой подпространств вида

$$L_\alpha = \{X \in \mathrm{so}(n) : [Y, X] = \alpha(H)X, \, Y \in L_0\},$$

где $\alpha \in L_0^*$. Отсюда получается разложение Картана

$$\mathrm{so}(n) = L_0 \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \neq 0} L_\alpha\right) \tag{2.2}$$

(подробные детали этой конструкции можно найти в [14]).

Система (2.1) определяет решение с точностью до множителя из подгруппы стабильности $\mathrm{SO}(n-1)$. Так как $S^{n-1} = \mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-1)$, то естественно ввести следующее определение.

Определение 2.1. *Сужение потока, определяемого* (2.1), *на расслоение* $\mathbb{T}^m \times S^{n-1}$ *называется проективным расширением, ассоциированным с линейным расширением квазипериодического потока на торе.*

3. Группа SO(3)

В случае SO(3)-расширения трехмерной системы (1.1) решение $Q(t, \boldsymbol{\varphi}_0, Q_0)$ системы (2.1) определено с точностью до произвольного множителя из подгруппы стабильности SO(2) группы SO(3). Так как $S^2 = \mathrm{SO}(3)/\mathrm{SO}(2)$, то проективный поток определен на многообразии $\mathbb{T}^m \times S^2$.

Запишем систему (2.1) в координатах $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta})$, где – $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ – углы Эйлера. Матрица Q в этих координатах выглядит так

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ 0 & \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \theta_1 < 2\pi, \quad 0 \leq \theta_2 < \pi.$$

[2]Тор, содержащий всюду плотную траекторию.

Допустим, что $A(\boldsymbol{\varphi}) = \Lambda(\boldsymbol{\varphi}) + R(\boldsymbol{\varphi})$, где $\Lambda(\boldsymbol{\varphi}) = \operatorname{diag}(\lambda_1(\boldsymbol{\varphi}), \lambda_2(\boldsymbol{\varphi}), \lambda_3(\boldsymbol{\varphi}))$, а

$$R(\boldsymbol{\varphi}) = \begin{pmatrix} 0 & -r_1(\boldsymbol{\varphi}) & -r_2(\boldsymbol{\varphi}) \\ r_1(\boldsymbol{\varphi}) & 0 & -r_3(\boldsymbol{\varphi}) \\ r_2(\boldsymbol{\varphi}) & r_3(\boldsymbol{\varphi}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда система (2.1) в этих координатах выглядит так[3]

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\omega}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \dot{\theta}_1 & 0 \\ -\dot{\theta}_1 & 0 & \dot{\theta}_2 \\ 0 & -\dot{\theta}_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f_1(\boldsymbol{\varphi}, \theta_1, \theta_2) & 0 \\ -f_1(\boldsymbol{\varphi}, \theta_1, \theta_2) & 0 & f_2(\boldsymbol{\varphi}, \theta_1, \theta_2) \\ 0 & -f_2(\boldsymbol{\varphi}, \theta_1, \theta_2) & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Это матричное уравнение можно записать в виде следующей системы

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{\theta}_1 = f_1(\boldsymbol{\varphi}, \theta_1, \theta_2) = r_1(\boldsymbol{\varphi}) - \dfrac{\lambda_1(\boldsymbol{\varphi}) - \lambda_2(\boldsymbol{\varphi})}{2} \sin 2\theta_1 \cos 2\theta_2, \\ \dot{\theta}_2 = f_2(\boldsymbol{\varphi}, \theta_1, \theta_2) = r_3(\boldsymbol{\varphi}) \cos\theta_1 - r_2(\boldsymbol{\varphi}) \sin\theta_1 + \\ + \dfrac{\sin 2\theta_2}{2} (\cos^2\theta_1(\lambda_1(\boldsymbol{\varphi}) - \lambda_2(\boldsymbol{\varphi})) - \lambda_1(\boldsymbol{\varphi}) + \lambda_3(\boldsymbol{\varphi})). \end{cases} \tag{3.2}$$

Пусть $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi}, \theta_1, \theta_2) = (f_1(\boldsymbol{\varphi}, \theta_1, \theta_2), f_2(\boldsymbol{\varphi}, \theta_1, \theta_2))$. Так как $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi}, \theta_1, 0) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi}, \theta_1, \pi)$, то правые части системы (3.2) определяют неособое векторное поле на расслоении $\mathbb{T}^m \times \mathbb{T}^2$, хотя первоначально система (3.2) рассматривалась на многообразии $\mathbb{T}^m \times S^2$. Этот феномен возникает после следующей "хирургической" операции: раздутия северного и южного полюсов сферы S^2 в окружности и затем склеивания этих окружностей. Такой же вывод можно сделать, рассматривая матрицу $A(\boldsymbol{\varphi})$ с произвольной симметрической частью[4].

Напомним, что решения системы (3.2) на торе $\mathbb{T}^{m+2}$ обладают свойством периодичности 2-го рода относительно начальных данных. Пусть компонента ω_1 вектора $\boldsymbol{\omega}$ равна 1. Тогда система (3.2) записывается в виде неавтономной системы

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\phi}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \\ \dot{\theta}_1 = f_1(t, \boldsymbol{\phi}, \theta_1, \theta_2), \\ \dot{\theta}_2 = f_2(t, \boldsymbol{\phi}, \theta_1, \theta_2), \end{cases} \tag{3.3}$$

где $\boldsymbol{\phi} = (\varphi_2, \ldots, \varphi_m)$, $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = (\omega_2, \ldots, \omega_m)$. Отображение монодромии для потока, порождаемого системой (3.3), это гомеоморфизм тора $\mathbb{T}^{m+1}$:

$$H(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}) \to (\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta})). \tag{3.4}$$

Здесь $\boldsymbol{\tau} = 2\pi\tilde{\boldsymbol{\omega}}$. Функция $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta})$ 2π-периодична по всем переменным и

$$\|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta})\| \le 2\pi. \tag{3.5}$$

[3] Корректность этих выводов проверена в системе аналитических вычислений Maple.

[4] Это следствие того факта, что произвольная симметрическая матрица приводится к диагональному виду ортогональным преобразованием.

4. Множество вращения слоя

Для системы на торе естественно поставить вопрос о существовании вектора вращения потока, порождаемого системой (3.2), которая определяет поток на расслоении с базой $\mathbb{T}^m$ и слоем $\mathbb{T}^2$. Геометрический вектор вращения для системы (3.2) это вектор $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\rho})$, где двумерный вектор $\boldsymbol{\rho}$ – вектор вращения слоя $\mathbb{T}^2$ определяется так

$$\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta}) = \lim_{t\to\infty} t^{-1} \int\limits_0^t \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\omega} s, \boldsymbol{\theta}(s, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta}))ds, \tag{4.1}$$

где $(\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\omega} t, \boldsymbol{\theta}(t, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta}))$ – решение (3.2). Обоснование этого определения состоит в доказательстве существования этого предела для всех $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta})$. Кроме того, естественно рассмотреть вопрос о его зависимости от начальных данных.

Рассмотрим сначала частные случаи. Предположим, что исходная система (1.1) блочно-диагональна. В этом случае система (3.2) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{\theta}_1 = r_1(\boldsymbol{\varphi}) - \dfrac{\lambda_1(\boldsymbol{\varphi}) - \lambda_2(\boldsymbol{\varphi})}{2} \sin 2\theta_1, \\ \dot{\theta}_2 = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Система (4.2) представляет собой декартово произведение двух независимых систем, причем вторая – тривиальное расширение квазипериодического потока, а первая – S^1-расширение квазипериодического потока. Число вращения слоя ρ потока такой системы существует и не зависит от начальных данных [11]. Таким образом, в этом случае вектор вращения – $(\rho, 0)$.

Еще один крайний случай – матрица $A(\boldsymbol{\varphi})$ кососимметрична. Система (3.2) в этом случае такова

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{\theta}_1 = r_1(\boldsymbol{\varphi}), \\ \dot{\theta}_2 = r_3(\boldsymbol{\varphi}) \cos\theta_1 - r_2(\boldsymbol{\varphi}) \sin\theta_1. \end{cases} \tag{4.3}$$

Эта система интегрируема в квадратурах и, очевидно, имеет вектор вращения слоя $(\rho, 0)$, где ρ – среднее значение функции $r_1(\boldsymbol{\varphi})$. Однако, динамика такой системы может быть достаточно сложной. Например, в работе [15] доказано существование множества $\mathcal{B}$ типа G_δ в пространстве $C^0(\mathbb{T}^m, \mathrm{so}(3))$ такого, что при $A(\boldsymbol{\varphi}) \in \mathcal{B}$ поток, порождаемый системой (3.2), минимален[5].

Вектор вращения слоя гомеоморфизма (3.4)

$$\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi n} \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\phi}_k, \boldsymbol{\theta}_k) \tag{4.4}$$

совпадает с вектором вращения (4.1), если $(\boldsymbol{\phi}_k, \boldsymbol{\theta}_k)$ – итерации точки $(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta})$ под действием этого гомеоморфиизма. Следуя фундаментальной работе М. Эрмана [8], покажем, что предел (4.4) существует для всех $\boldsymbol{\theta}$.

[5] Доказательство этого факта существенно упрощается, если предположить, что интегралы от квазипериодических функций $r_2(\boldsymbol{\omega} t)$, $r_3(\boldsymbol{\omega} t)$ не являются квазипериодическими функциями.

Лемма 4.1. *Пусть точка $\boldsymbol{\phi} \in \mathbb{T}^{m-1}$ фиксирована. Тогда*

1. *вектор вращения $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta})$ не зависит от $\boldsymbol{\theta}$;*

2. *если предел* (4.4) *существует для некоторого $\boldsymbol{\theta}_0$, то он существует для всех $\boldsymbol{\theta}$.*

Доказательство. Используем неравенство (3.5). Тогда

$$\frac{1}{t}\|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}_1) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}_2)\| \leq \frac{4\pi}{t}.$$

Следовательно, если предел существует, то он не зависит от $\boldsymbol{\theta}$.
Доказательство завершено.

Доказательство существования предела (4.4) основано на следующем результате ([8], § 5.4, лемма).

Лемма 4.2. *Пусть $\mathcal{X}$ – компактное пространство, G – гомеоморфизм $\mathcal{X}$, $h \in C^0(\mathcal{X}, \mathbb{R})$. Пусть*

$$\rho = \int\limits_{\mathcal{X}} h(x) d\mu,$$

где μ – произвольная инвариантная относительно G нормированная мера. Тогда последовательность функций

$$\left\{ \frac{1}{2\pi n} \sum_{k=0}^{n-1} h(G^k(x)) \right\}$$

равномерно сходится к ρ.

Теорема 4.1. *Для любых $\boldsymbol{\phi}$ и $\boldsymbol{\theta}$ предел* (4.4) *существует и не зависит от выбора точки $(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta})$.*

Доказательство. Если μ_1 и μ_2 – две инвариантные нормированные меры отображения монодромии H, то обе они проектируются в единственную инвариантную меру ν (меру Хаара) на торе $\mathbb{T}^{m-1}$. Согласно эргодической теореме Биркгофа-Хинчина существует множество полной меры $B \subset \mathbb{T}^{m-1}$ такое, что если $(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}) \in B \times \mathbb{T}^2$, то

$$\frac{1}{2\pi n} \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{u}(H^k(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta})) \to \boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \rho_2), \quad n \to \infty,$$

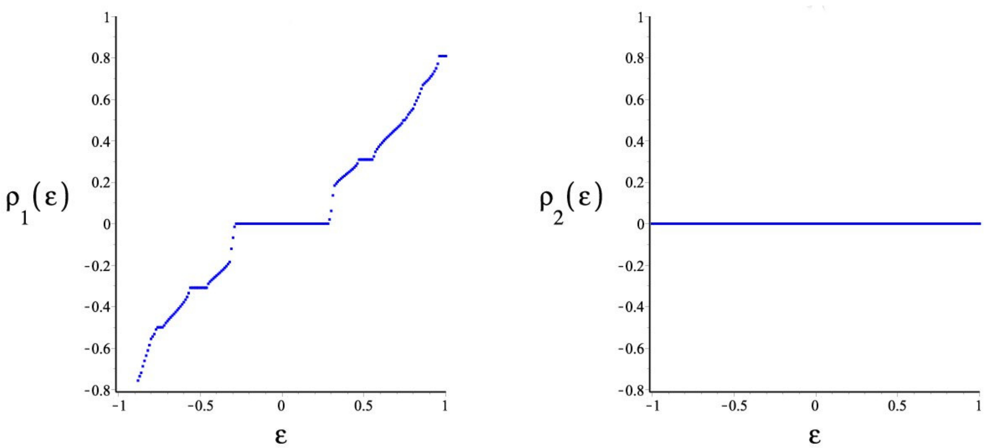
где $\boldsymbol{\rho}$ не зависит от $(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta})$. Так как множество $B \times \mathbb{T}^2$ является множеством полной меры относительно μ_1 и μ_2, то

$$\int\limits_{\mathbb{T}^{m+1}} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}) d\mu_1 = \int\limits_{\mathbb{T}^{m+1}} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}) d\mu_2 = \boldsymbol{\rho}.$$

Применяя лемму 4.2 к обоим компонентам вектора $\boldsymbol{\rho}$, получаем утверждение теоремы.
Доказательство завершено.

Замечание 4.1. *Еще в одной известной работе М. Эрмана* [16] *рассматривается проблема существования единственного вектора вращения для гомеоморфизмов торов. Единственность такого вектора вращения в данной ситуации существенно* *основано на лемме 4.2, которая здесь справедлива, так как отображение монодромии H гомотопно тождественному. В упомянутой работе* [16] *построены примеры отображений тора, не гомотопных тождественному, когда сходимость в лемме 3.2 не будет равномерной. Конструкции М. Эрмана основаны на результатах известной работы Х. Фюрстенберга* [17].

Теперь, используя теорию асимптотических циклов Шварцмана [1], покажем, что у вектора вращения слоя $\boldsymbol{\rho}$ компонетна $\rho_2 = 0$. Численный эксперимент показывает справедливость этого предположения (см. рисунок 4.1, где показан график зависимости от параметра ε вектора вращения системы (3.2) с полиномиальной зависимостью от $\boldsymbol{\varphi}$).



a) *b*)

Рис. 4.1. Компоненты вектора вращения слоя системы вида (3.2): *a*) число вращения слоя 2-го уравнения системы (3.2), *b*) число вращения слоя 3-го уравнения системы (3.2)

Fig. 4.1. Components of the layer rotation vector of the system of the type (3.2): *a*) the layer rotation number of the 2nd equation of the system (3.2), *b*) the layer rotation number of the 3rd equation of the system (3.2)

Рассмотрим конструкцию Шварцмана для потока $\{\Phi^t\}$ на многообразии $\mathcal{Y} = \mathbb{T}^m \times \mathrm{SO}(n)$. Инвариантная мера потока μ определяет гомоморфизм групп $\chi_\mu : H^1(\mathcal{Y}, \mathbb{Z}) \to \mathbb{R}$ следующим образом. Группа $H^1(\mathcal{Y}, \mathbb{Z})$ изоморфна фактор-пространству непрерывных отображений $h : \mathcal{Y} \to S^1$ по отношению изотопической эквивалентности. Для любого непрерывного отображения h можно построить непрерывную функцию $\alpha : \mathbb{R} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ такую, что $h(\Phi^t(y)) = h(y)e^{i\alpha(t,y)}$ и $\alpha(t+s, y) = \alpha(t, \Phi^s(y)) + \alpha(s, y)$ (1-коцикл отображения h). По теореме Биркгофа-Хинчина для любой инвариантной меры предел $\alpha^*(y) = \lim\limits_{t\to+\infty} t^{-1}\alpha(t, y)$ существует для почти всех $y \in \mathcal{Y}$ относительно меры μ и

$$\int\limits_{\mathcal{Y}} \alpha^*(y) d\mu = \int\limits_{\mathcal{Y}} \alpha(1, y) d\mu.$$

Тогда гомоморфизм χ_μ определяется равенством

$$\chi_\mu[h] = \int\limits_{\mathcal{Y}} \alpha^*(y)d\mu,$$

где $[h]$ обозначает изотопический класс эквивалентности h. Образ W_μ гомоморфизма χ_μ называется группой μ-кручения (μ-асимптотическим циклом). Если $W_\mu = 0$, то говорят, что векторное поле μ-гомологически тривиально. Если $W_\mu \cong \mathbb{Z}$, то $W_\mu = \rho_\mu\mathbb{Z}$ для некоторого $\rho_\mu > 0$. В этом случае поле называется μ-гомологически рациональным. Во всех других случаях, $W_\mu = \rho_1\mathbb{Z} + \rho_2\mathbb{Z} + \cdots + \rho_k\mathbb{Z}$, где $\boldsymbol{\rho}_\mu = (\rho_1, \ldots, \rho_k)$ – вектор с рационально независимыми компонентами и $m \le k \le m+\ell$, где ℓ – размерность максимальной торической подалгебры алгебры Ли группы $\mathrm{SO}(n)$. В нашем случае $\ell = 1$, так как размерность максимальной торической подалгебры алгебры $\mathrm{so}(3)$ равна единице.

Теорема 4.2. *Множество вращения системы* (2.1) *состоит из одного вектора* $(\rho, 0)$.

Доказательство. Матрицы максимальной торической подалгебры алгебры $\mathrm{so}(3)$ имеют вид

$$\begin{pmatrix} 0 & -\rho & 0 \\ \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, учитывая, что определение Шварцмана чисел вращения совпадает с обычным в случае потоков на торе, получаем

$$\rho_1 = \lim_{t\to\infty} t^{-1} \int\limits_0^t f_1(\boldsymbol{\omega} s, \boldsymbol{\theta}(s))ds = \int\limits_{\mathcal{Y}} f_1(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\theta})d\mu,$$

$$\rho_2 = \lim_{t\to\infty} t^{-1} \int\limits_0^t f_2(\boldsymbol{\omega} s, \boldsymbol{\theta}(s))ds = \int\limits_{\mathcal{Y}} f_2(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\theta})d\mu = 0,$$

так как эти пределы не зависят от выбора инвариантной меры μ.
Доказательство завершено.

Замечание 4.2. *Достоинство конструкции Шварцмана в том, что она применима для любого непрерывного потока на компактном метрическом пространстве. С другой стороны эта конструкция зависит от выбора инвариантной меры потока.*

Отметим, что прообраз понятия асмптотического цикла можно найти в работе Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова [18], *посвященной связям эргодической теории и топологической динамики. Действительно, один из результатов этой работы таков: если $f(y)$ – непрерывная функция на метрическом компакте $\mathcal{Y}$, на котором действует непрерывный поток Φ^t с инвариантной мерой μ, то множество точек $y \in \mathcal{Y}$ таких, что*

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1} \int\limits_0^t (\Phi^s(y))ds = \int\limits_{\mathcal{Y}} f(y)d\mu,$$

является множеством[6] *полной меры.*

[6] Общепринятое название – множество квазирегулярных точек потока.

Для оценки числа минимальных множеств системы (2.1) рассмотрим комплексную двумерную линейную систему

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{x}} = A(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^2 \tag{4.5}$$

приводится к треугольному виду с помощью замены $\boldsymbol{x} = U\boldsymbol{y}$, где $U \in \mathrm{SU}(2)$, если U является решением системы[7]

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\omega}, \quad U^*\dot{U} = U^*R(\boldsymbol{\varphi})U + P^*(\boldsymbol{\varphi}, U) - P(\boldsymbol{\varphi}, U),$$

которая определяет поток на $\mathbb{T}^m \times \mathrm{SU}(2)$. Сужение этого потока на $\mathbb{T}^m \times S^2$ – проективный поток. Согласно теореме 2 из [19] он имеет либо одно, либо два, либо континуум минимальных множеств. Аналогичное заключение справедливо и для потока, определяемого (3.2), так как группа $\mathrm{SO}(3)$ изоморфна фактор-группе $\mathrm{SU}(2)/\{\pm E\}$.

5. Заключительные замечания

Используя известное представление матриц из $\mathrm{SU}(2)$, можно записать уравнения проективного расширения системы (4.5) в сферических координатах. Они являются системе уравнений на торе $\mathbb{T}^{m+2}$, подобной системе (3.2). Так как максимальная торическая подалгебра алгебры $\mathrm{su}(2)$ имеет размерность 1, то множество вращения слоя – вектор вида $(\rho, 0)$.

При $n > 3$ проективное расширение, соответствующее (2.1), порождает систему на торе $\mathbb{T}^{m+n-1}$

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta}), \tag{5.6}$$

где $\boldsymbol{\theta}$ – вектор сферических координат, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta})$ – тригонометрический полином от переменной $\boldsymbol{\theta}$ с периодическими по $\boldsymbol{\varphi}$ коэффициентами[8]. Описание динамики этой системы помогло бы решить ряд задач, связанных с теорией линейных расширений квазипериодических потоков. Например, можно рассмотреть следующие гипотезы:

1. Множество вращения состоит из единственного вектора $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\rho})$.

2. Существует преобразование, возможно формальное, системы (5.6) к виду[9]

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\vartheta}} = \boldsymbol{\rho}.$$

Если эти гипотезы справедливы, то система (1.1) гладким (аналитическим) преобразованием приводится к системе с постоянной треугольной матрицей.

Список литературы

1. Schwartzman S. Asymptotic cycles // Ann. of Math. 1957. Vol. 66. pp. 270–284.

2. Арансон С. Х., Гринес В. З. О некоторых инвариантах динамических систем на двумерных многообразиях (необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности транзитивных систем) // Матем. сб., 1973. Т. 90, № 3. С. 372–402.

[7] Здесь $R^*(\boldsymbol{\varphi}) = -R(\boldsymbol{\varphi})$, $P(\boldsymbol{\varphi}, U)$ – верхнетреугольная матрица с чисто мнимой главной диагональю.

[8] Построение функции $\boldsymbol{F}$ можно автоматизировать, если использовать системы символьных вычислений.

[9] Резльтаты КАМ-теории здесь не применимы, так как вектор вращения резонансный.

3. Pollicott M. Rotation sets for homeomorphisms and homology // Trans. Amer. Math. Soc. 1992. V. 331, n. 2. P. 881–894.

4. Бронштейн И.У. Неавтономные динамические системы. Кишенев. Штиница. 1984. 290 с.

5. Perron O. Über eine Matrixtransformatin // Math. Zeitschr. 1930. Vol. 32. pp. 465–473.

6. Sacker R.J., Sell G.R. A spectral theory for linear differential systems // J. Diff. Equat. 1978. V. 27. P. 320–358.

7. Johnson R. Moser J. The Rotation Number for Almost Periodic Potentials // Commun. Math. Phys. 1982. Vol. 84. pp. 403–438.

8. Herman M. Une méthode pour minorer les exposants de Lyapounov et quelques // Commentarii Mathematici Helvetici. 1983. Vol. 58. pp. 453–502.

9. Виноград Р. Э. К проблеме Н. П. Еругина // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11, № 4. С. 632–638.

10. Johnson R.A. Two-dimensional, almost periodic linear systems with proximal and recurrent behavior // Proceedings of American Math. Soc. 1981. V. 82, n. 3. P. 417–422.

11. Веременюк В.В. Существование числа вращения уравнения $\dot{x} = \lambda(t, x)$ с периодической по x и почти периодической по t правой частью // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 6. С. 1073–1076.

12. Перов А.И., Эгле И.Ю. К теории Пуанкаре-Данжуа многомерных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1972. Т. 8, № 5. С. 801–810.

13. Главан В.А. Аналитическая нормальная форма линейных квазипериодических систем треугольного вида // Дифференциальные уравнения и математическая физика. Математические исследования. 1989. вып. 106. С. 50–58.

14. Хампфрис Дж. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. М.: МЦНМО. 2003. 212 с.

15. Tkachenko V.I. On reducibility of linear quasiperiodic systems with bounded solutions // EJQTDE, Proc. 6th Coll. QTDE. 2000. No. 29. 11 p.

16. Herman M. Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations // Publications mathématiques de l'I.H.É.S. 1979. Vol. 49. pp. 2–233.

17. Furstenberg H. Strict Ergodicity and Transformation of the Torus // American Journal of Mathematics. 1961. Vol. 83, No. 4. pp. 573–601.

18. N. Kryloff and N. Bogoliouboff, La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique non linéaire // Ann. of Math. 1937. Vol. 38. pp. 65–113.

A. N. Sakharov. Rotation sets of SO(3)-extensions of quasiperiodic flows

19. Коломиец М.Л., Сахаров А.Н. Классификация проективных расширений квазипериодических потоков. Труды VII всероссийской научной конференции “Нелинейные колебания механических систем”. Нижний Новгород. 2008. Т. 1. С. 295–299.

Поступила 15.02.2025; доработана после рецензирования 27.04.2025; принята к публикации 28.05.2025

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

References

1. S. Schwartzman, “Asymptotic cycles”, *Ann. of Math*, **66** (1957), 270–284.
2. Aranson S. H., Grines V. Z., “On some invariants of dynamical systems on two-dimensional manifolds (necessary and sufficient conditions for the topological equivalence of transitive dynamical systems)”, *Math. Sb.*, **90**:3 (1973), 372–402.
3. Pollicott M., “Rotation sets for homeomorphisms and homology”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **331**:2 (1992), 881–894.
4. I.U. Bronshtein, *Extensions of minimal transformation groups*, Shtinitsa, Kishenev, 1975, 311 p.
5. O. Perron, “Über eine Matrixtransformatin”, *Math. Zeitschr*, **32** (1930), 465–473.
6. Sacker R.J., Sell G.R., “A spectral theory for linear differential systems”, *J. Diff. Equat.*, **27** (1978), P. 320–358.
7. R. Johnson, J. Moser, “The Rotation Number for Almost Periodic Potentials”, *Commun. Math. Phys*, **84** (1982), 403–438.
8. M. Herman, “Une méthode pour minorer les exposants de Lyapounov et quelques”, *Commentarii Mathematici Helvetici*, **58** (1983), 453–502.
9. Vinograd R. E., “On the problem of N. P. Erugin”, *Differential equations*, **11**:4 (1975), 632–638.
10. Johnson R.A., “Two-dimensional, almost periodic linear systems with proximal and recurrent behavior”, *Proceedings of American Math. Soc.*, **82**:3 (1981), 417–422.
11. V.V. Veremenyuk, “Existence of a rotation number for the equation $\dot{x} = \lambda(t, x)$ with right-hand side periodic in x and almost periodic in t”, *Differ. equations*, **27**:6 (1991), 1073–1076.
12. Perov A.I., Egle I.Yu., “On the Poincare-Danjoy theory of multidimensional differential equations”, *Differential Equations*, **8**:5 (1972), 801–810.
13. V.A. Glavan V.A., “Analytical normal form of linear quasiperiodic systems triangular form”, *Differential equations and mathematical physics. Mathematical research*, 1989, no. 106, 50–58.

14. J. Humphreys, *Introduction to the theory of Lie algebras and their representations*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1972, 172 p.

15. V.I. Tkachenko, "On reducibility of linear quasiperiodic systems with bounded solutions", *EJQTDE, Proc. 6th Coll. QTDE*, 2000, no. 29, 11.

16. M. Herman, "Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations", *Publications mathématiques de l'I.H.É.S.*, **49** (1979), 2–233.

17. H. Furstenberg, "Strict Ergodicity and Transformation of the Torus", *American Journal of Mathematics*, **83**:4 (1961), 270–284.

18. N. Kryloff, N. Bogoliouboff, "La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique non linéaire", *Ann. of Math*, **38** (1937), 65–113.

19. M.L. Kolomiets, A.N. Sakharov, "Classification of projective extensions of quasiperiodic flows", *Proceedings of the VII All-Russian scientific conference "Nonlinear oscillations of mechanical systems", Nizhny Novgorod*, **1** (2008), 295–299.

Submitted 15.02.2025; Revised 27.04.2025; Accepted 28.05.2025

The author have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The author declare no conflict of interest.