DOI 10.15507/2079-6900.27.202502.127-142
Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.977:669.012

Об одном алгоритме решения задачи быстродействия в линейных системах с выпуклыми ограничениями на фазовые переменные и управление

Н. Д. Морозкин, В. И. Ткачев, Н. Н. Морозкин

ФГБОУ ВО Уфимский университет науки и технологий (г. Уфа, Российская Федерация)

Аннотация. Исследуется задача поиска оптимального по быстродействию управления в случае, когда процесс описывается системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с нелинейными выпуклыми ограничениями на фазовые переменные и управление. Путем перехода из n-мерного евклидова пространства в гильбертово пространство задача оптимального управления с ограничениями на фазовые переменные и управление сводится к задаче оптимального быстродействия без ограничений. Показано, что область достижимости в новом пространстве является выпуклым множеством. Для решения полученной задачи используется модифицированный метод разделяющих гиперплоскостей. Одним из ключевых моментов этого метода, от которого зависит скорость сходимости алгоритма, является нахождение нормали разделяющей гиперплоскости. В настоящей работе нормаль разделяющей гиперплоскости на каждой итерации строится путем минимизации функционала типа расстояния на выпуклой оболочке опорных к множеству достижимости точек, полученных на предыдущих итерациях. После нахождения нормали, разделяющей гиперплоскости, строится опорная к области достижимости гиперплоскость, которая затем непрерывно переносится по возрастанию времени и находится первый момент времени, при котором опорная гиперплоскость достигнет заданной конечной точки. Этот момент времени и принимается за очередное приближение времени быстродействия. Сформулирована теорема о сходимости последовательных приближений по времени к значению времени быстродействия и о слабой сходимости последовательности управлений к оптимальному управлению. Алгоритм апробирован на решении задачи внешнего нагрева неограниченной пластины до заданной температуры за минимальное время с учетом ограничений на растягивающие и сжимающие термонапряжения. Приведены результаты вычислительного эксперимента.

Ключевые слова: оптимальное по быстродействию управление, ограничения на фазовые переменные, нормаль разделяющей гиперплоскости, опорная гиперплоскость, время быстродействия, термонапряжения, оптимальный нагрев

Для цитирования: Морозкин Н. Д., Ткачев В. И., Морозкин Н. Н. Об одном алгоритме решения задачи быстродействия в линейных системах с выпуклыми ограничениями на фазовые переменные и управление // *Журнал Средневолжского математического общества.* 2025. Т. 27, № 2. С. 127–142. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202502.127-142

Об авторах:

Морозкин Николай Данилович, д.ф.-м.н., профессор, научный руководитель института информатики, математики и робототехники УУНиТ, и.о. зав. кафедрой математического и компьютерного моделирования, ФГБОУ ВО «УУНиТ» (430005, Россия, г. Уфа, ул. Заки-Валиди, д. 32), ORCID: http://orcid.org/0009-0002-5051-7094, MorozkinND@mail.ru

© *Морозкин Н. Д., Ткачев В. И., Морозкин Н. Н.*

Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.
This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Ткачев Владислав Игоревич, к.ф.-м.н., доцент кафедры математического и компьютерного моделирования, ФГБОУ ВО «УУНиТ» (430005, Россия, г. Уфа, ул. Заки-Валиди, д. 32), ORCID: http://orcid.org/0009-0002-8461-3252, tvi-vlad@mail.ru
Морозкин Никита Николаевич, к.ф.-м.н., доцент кафедры математического и компьютерного моделирования, ФГБОУ ВО «УУНиТ» (430005, Россия, г. Уфа, ул. Заки-Валиди, д. 32), ORCID: http://orcid.org/0009-0005-3162-5403, nnm_89@mail.ru

Original article

MSC2020 57N10

About an algorithm for solving the speed problem in linear systems with convex restrictions on phase variables and control

N. D. Morozkin, V. I. Tkachev, N. N. Morozkin

Ufa University of Science and Technology (Ufa, Russian Federation)

Abstract. The problem optimal speed control is investigated in the case when the process is described by a system of linear ordinary differential equations with nonlinear convex restrictions on phase variables and control. By moving from n-dimensional Euclidean space to Hilbert space, the optimal control problem with restrictions on phase variables and control is reduced to an optimal speed problem without restrictions. It is shown that the reachability region in the new space is a convex set. To solve the resulting problem, a modified method of separating hyperplanes is used. One of the key points of this method, on which the convergence speed of the algorithm depends, is finding the normal to the separating hyperplane. In this work, this normal at each iteration is constructed by minimizing a distance-type functional on the convex hull of points supporting the reachability set obtained at previous iterations. After finding the normal to the separating hyperplane, a hyperplane supporting the reachable region is constructed, which is then continuously transferred in increasing time and the first moment in time is found at which the supporting hyperplane reaches the given end point. This moment is taken as the next approximation to the performance time. A theorem is formulated on the convergence of successive approximations in time to the value of the performance time and on the weak convergence of a sequence of controls to an optimal control. The algorithm is tested by solving the problem of external heating of an unlimited plate to a given temperature in a minimal time, taking into account restrictions on tensile and compressive thermal stresses. The results of a computational experiment are presented.

Keywords: speed-optimal control, constraints on phase variables, normal of separating hyperplane, reference hyperplane, response time, thermal stresses, optimal heating

For citation: *N. D. Morozkin, V. I. Tkachev, N. N. Morozkin.* About an algorithm for solving the speed problem in linear systems with convex restrictions on phase variables and control. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 27:2(2025), 127–142. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202502.127-142

About the authors:
Nikolay D. Morozkin, D. Sc. (Phys.-Math.)Professor, Department of Mathematical and Computer Modeling Ufa University of Science and Technology (32 Zaki-Validi St., Ufa 450076, Russia),ORCID: http://orcid.org/0009-0002-5051-7094, morozkinND@mail.ru
Vladislav I. Tkachev, Ph. D. (Phys.-Math.), associate professor,Department of Mathematical and Computer Modeling Ufa University of Science and Technology (32 Zaki-Validi St., Ufa 450076, Russia), ORCID: http://orcid.org/0009-0002-8461-3252, tvi-vlad@mail.ru
Nikita N. Morozkin, Ph. D. (Phys.-Math.), associate professor,Department of Mathematical and Computer Modeling Ufa University of Science and Technology (32 Zaki-Validi St., Ufa 450076, Russia), ORCID: http://orcid.org/0009-0005-3162-5403, @mail.ru

1. Введение

Первые алгоритмы решения двухточечной задачи линейного быстродействия были предложены Н. Н. Красовским [1], а алгоритмы рассмотренного ниже типа Л. Нейштадтом [2] и Ж. Итоном [3] на основе геометрической интерпретации условий оптимальности, сделанной Д. Лассалем [4]. В этих работах нахождения управления $u^0(t) \in U$, переводящего систему

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau)x + B(\tau)u + D(\tau), 0 < \tau < T \tag{1.1}$$

из положения

$$x(0) = x_0 \neq 0_{R^n} \tag{1.2}$$

в положение 0_{R^n} за минимальное время $t^0, 0 < t^0 \leq T$, сводилась к решению задачи

$$\max_{\psi_0} t^0(\psi_0) \tag{1.3}$$

При этом время быстродействия t^0 определяется из условия

$$(\psi(t^0), 0_{R^n} - x(t^0)) = 0, \tag{1.4}$$

где $\psi = \psi(\tau)$ – решение системы

$$\frac{d\psi}{d\tau} = -A^T\psi,\ \psi(0) = \psi_0 \tag{1.5}$$

$A(\tau)$, $B(\tau)$, $D(\tau)$ – матрицы размерности соответственно $(n \times n)$, $(n \times m)$, $(n \times 1)$ с кусочно-непрерывными коэффициентами, $u = u(\tau)$ – управление из множества U:

$$U = \left\{u = (u_1(\tau), ..., u_m(\tau)), u \in L_2^m[0, T], u_i^- \leq u_i(\tau) \leq u_i^+, i = \overline{1, m}, \tau \in [0, T]\right\} \tag{1.6}$$

При решении задачи (1.3) на каждой k-ой итерации строилась оценка τ_k снизу времени быстродействия исходя из выполнения условия

$$(\psi(\tau_k), 0_{R^n} - x(\tau_k)) = 0 \tag{1.7}$$

Для нахождения следующего приближения методом градиентного спуска корректировалось направление $\psi(0) = \psi_0$ так, чтобы при $\tau = \tau_k$ выполнялось неравенство

$$(\psi(\tau_k), 0_{R^n} - x(\tau_k)) < 0,$$

где $x(\tau_k)$ опорная к множеству достижимости системы (1.1), (1.2) точка, соотвествующая нормали $\psi(0) = \psi_0$. Далее опорная гиперплоскость непрерывно переносилась при $\tau > \tau_k$ до первого момента τ^*, при котором выполнялось равенство

$$(\psi(\tau^*), 0_{R^n} - x(\tau^*)) = 0$$

Этот момент времени и примался за очередное приближение времени быстродействия τ_{k+1}.

Однако, при решении практических задач выяснилось, что предложенные методы плохо сходятся из-за "овражности" функции $t(\psi_0)$. В работах [5–7] были предложены модификации этих алгоритмов, которые, однако, существенно не улучшили их сходимость.

Н. Е. Кириным в работах [8–9] было предложено в качестве нормали, разделяющей гиперплоскости, на каждой итерации использовать функцию типа расстояния от точки 0_{R^n} до отрезка, соединяющего точку $x(\tau_k)$ из (1.7) и аналогичную точку, полученную на предыдущей итерации. В этом случае значительно снижается трудоемкость отдельной итерации, но скорость сходимости, особенно при приближении к точке 0_{R^n}, по-прежнему оставалась невысокой. Для улучшения сходимости в работе [10] Н. Е. Кириным было предложено искать минимум функции типа расстояния не на отрезке, а на выпуклой оболочке точек множества достижимости, полученных на предыдущих итерациях, каждая из которых на соответствующей итерации искалась как точка, минимизирующая функцию типа расстояния. Алгоритм стал сходиться значительно лучше, и был назван многошаговым двойственным алгоритмом решения задачи быстродействия. Тем не менее, если область достижимости представляла собой выпуклое сильно вытянутое множество, то скорость сходимости оставалась низкой. Автором в работе [11] в качестве точек, полученных на предыдущих итерациях, на выпуклой оболочке которых минимизируется функция типа расстояния, было предложено использовать опорные к множеству достижимости точки. На конкретных примерах было показано, что такая модификация делает алгоритм достаточно эффективным для решения любых задач линейного быстродействия. Полученный алгоритм далее был доработан для решения задач двухточечного быстродействия, описываемых линейными системами дифференциальных уравнений с линейными ограничениями на фазовые переменные и управление [12] .

В настоящей работе предлагается модификация многошагового двойственного алгоритма на случай, когда ограничения на фазовые переменные и управление являются нелинейными и выпуклыми по переменным x, u.

2. Постановка задачи

Предположим, что процесс описывается системой уравнений (1.1)–(1.2) с нелинейными выпуклыми ограничениями вида

$$C(x, u, \tau) \leq 0, \tag{2.1}$$

где $C(x, u, \tau) = (c_1(x, u, \tau), ..., c_q(x, u, \tau))$, функции $c_i(x, u, \tau)$, $i = 1, 2, ..., q$ кусочно-непрерывны по τ, выпуклы, непрерывно-дифференцируемы по x и u. Кроме того, будем предполагать, что производные по (x, u) удовлетворяют условию Липшица, а именно

$$C_x(x + \Delta x, u + \Delta u, \tau) - C_x(x, u, \tau) \leq L_1(\Delta x + \Delta u), \tag{2.2}$$

$$C_u(x+\Delta x, u+\Delta u, \tau) - C_u(x, u, \tau) \leq L_2(\Delta x + \Delta u) \tag{2.3}$$

при всех $(x+\Delta x, u+\Delta u, \tau)$, $(x, u, \tau) \in R^n \times U \times [0, T]$, L_1, $L_2 = const > 0$.

Задача 1. Найти управление $u^0(\tau) \in U$, при котором система (1.1) перейдет из состояния (1.2) в точку 0_{R^n} за минимальное время $t^0 \in (0, T]$ и при этом почти при всех $\tau \in (0, t^0]$ будут выполнены ограничения (2.1).

3. Формулировка задачи без ограничений в гильбертовом пространстве

Введем дополнительный управляющий параметр $v \in V$,

$$V = \{v = (v_1, ..., v_q) : v \in L_2^q[0, T], v_i \geq 0, i = 1, 2, ..., q\}$$

и вектор-функцию

$$h(x, u, v, \tau, t) = (h_1(x, u, v, \tau, t), ..., h_q(x, u, v, \tau, t)), \tag{3.1}$$

где

$$h_i(x, u, v, \tau, t) = \begin{cases} [\max\{c_i(x, u, \tau), 0\}]^2 + v_i(\tau), & \text{если } \tau \in [0, t], \\ 0, \quad \text{если } \tau \in [t, T]. \end{cases} \tag{3.2}$$

Из (3.1)–(3.2) следует, что ограничения (2.1) будут выполнены, если

$$h_i(x, u, v, \tau, t) = 0, i = \overline{1, q}, \tau \in [0, T].$$

Введем новый управляющий параметр

$$\omega = (u, v) \in U \times V = \Omega \tag{3.3}$$

и вектор-функцию

$$p(\omega, t) = (h(x, u, v, \tau, t), x(t)). \tag{3.4}$$

Вектор-фукция $p(\omega, t)$ принадлежит гильбертову пространству P с элементами

$$f = (g(\tau), y), g(\tau) \in L_2^q[0, T], y \in R^n$$

и с нормой

$$\| f \|^2 = \int_0^T (g(\tau), g(\tau))d\tau + (y, y). \tag{3.5}$$

Переформируем задачу 1 в гильбертовом пространстве P как задачу без ограничений на фазовые переменные.

Задача 2. Найти управление $\omega^o \in \Omega$ и наименьшее время $t^o \in [0, T]$, при которых выполнится равенство

$$p(\omega^o, t^o) = (0_{L_2^q\ [0,T]}, 0_{R^n}) = 0_p.$$

Множество

$$Z(t) = \{p = p(\omega, t) : \omega \in \Omega\} \tag{3.6}$$

назовём множеством достижимости в рассматриваемом гильбертовом пространстве P.

Покажем, что множество $Z(t)$ является выпуклым. Тогда для решения задачи 2 можно воспользоваться многошаговым двойственным алгоритмом, доработав его на случай ограничений типа (2.1).

4. Выпуклость достижимого множества $Z(t)$

Пусть элементы $p_1 = p(\omega_1, t)$ и $p_2 = p(\omega_2, t)$ принадлежат $Z(t)$. Покажем, что для любого $\lambda \in [0,1]$ элемент

$$p_3 = p(\omega_3, t) = \lambda p_1 + (1-\lambda)p_2 = \lambda h(x_1, u_1, v_1, \tau, t) + (1-\lambda)h(x_2, u_2, v_2, \tau, t) + \\ + \lambda x_1(t) + (1-\lambda)x_2(t) \quad (4.1)$$

принадлежит $Z(t)$. Здесь $\omega_1 = \omega_1(\tau) = (u_1(\tau), v_1(\tau)) \in \Omega$, $\omega_2 = \omega_2(\tau) = (u_2(\tau), v_2(\tau)) \in \Omega$, $x_1 = x_1(\tau) = x(u_1(\tau), \tau)$, $x_2 = x_2(\tau) = x(u_2(\tau), \tau)$, $\tau \in [0, t]$ – решения системы (1.1)–(1.2) при $u = u_1(\tau)$, $u = u_2(\tau)$.

Для этого достаточно показать, что управляющий параметр

$$\omega_3 = \omega_3(\tau) = (u_3(\tau), v_3(\tau)), \quad (4.2)$$

соответствующий элементу p_3, принадлежит множеству $\Omega = U \times V$.

Множество достижимости $G(t)$ линейной системы (1.1)–(1.2) выпукло [13], следовательно, если $x_1(t)$, $x_2(t) \in G(t)$, то вектор-функция x_3

$$x_3 = x_3(t) = \lambda x_1(t) + (1-\lambda)x_2(t), \quad \lambda \in [0,1] \quad (4.3)$$

также принадлежит $G(t)$, а управление

$$u_3(\tau) = \lambda u_1(\tau) + (1-\lambda)u_2(\tau), \quad \tau \in [0, t] \quad (4.4)$$

соответствует элементу $x_3(t)$ и принадлежит множеству U.

Покажем, что существует управление $v_3(\tau) \in V$ такое, что элемент $p_3(\omega_3, t)$, определяемый согласно (4.1), принадлежит $Z(t)$.

Введем обозначение

$$r^2(x, u, \tau) = (r_1^2(x, u, \tau), ..., r_q^2(x, u, \tau)), \quad \tau \in [0, t], \quad (4.5)$$

где

$$r_i(x, u, \tau) = \max\{c_i(x, u, \tau), 0\}, \quad i = \overline{1, q}.$$

Функции $c_i(x, u, \tau)$, $i = \overline{1, q}$ по условиям задачи выпуклы по (x, u). Следовательно [14], выпуклы также по (x, u) функции $r_i(x, u, \tau)$, $i = \overline{1, q}$ и, в силу неотрицательности $r_i(x, u, \tau)$, выпуклы также по этим переменным и вектор-функциям (4.5). Положим

$$h(x_3, u_3, v_3, \tau, t) = \lambda h(x_1, u_1, v_1, \tau, t) + (1-\lambda)h(x_2, u_2, v_2, \tau, t).$$

Поскольку $h(x, u, v, \tau, t) = 0$ при $\tau \in (t; T]$, то

$$h(x_3, u_3, v_3, \tau, t) = \lambda r^2(x_1, u_1, \tau) + (1-\lambda)r^2(x_2, u_2, \tau) + \lambda v_1(\tau) + (1-\lambda)v_2(\tau) = \\ r^2(x_3, u_3, \tau) + v_3(\tau).$$

Здесь

$$v_3(\tau) = \lambda r^2(x_1, u_1, \tau) + (1-\lambda)r^2(x_2, u_2, \tau) - r^2(x_3, u_3, \tau) + \\ + \lambda v_1(\tau) + (1-\lambda)v_2(\tau), \tau \in [0, t], \quad (4.6)$$

где x_3, u_3 определяются согласно (4.3)–(4.4). Вектор-функции $r^2(x,u,\tau)$, определяемые согласно (4.5), выпуклы по (x,u), следовательно, выполнено неравенство

$$r^2(x_3,u_3,\tau) = r^2(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda u_1 + (1-\lambda)u_2, \tau) \leq \\ \leq \lambda r^2(x_1,u_1,\tau) + (1-\lambda) r^2(x_2,u_2,\tau). \quad (4.7)$$

Из неравенства (4.7) вытекает, что определяемый согласно (4.6) параметр $v_3 \geq 0$ и, следовательно, принадлежит V. Выпуклость множества $Z(t)$ доказана.

5. Построение опорной гиперплоскости с заданной нормалью

Рассмотрим функционал

$$\rho(p,t_k) = \sum_{i=1}^{q} \int_0^{t_k} h_i(x(\tau),u(\tau),v(\tau),\tau,t_k)d\tau + \frac{1}{2}(x(u,t_k),x(u,t_k)), \quad (5.1)$$

характеризующий в определенном смысле расстояние от точки 0_p до $Z(t_k)$. Решим задачу

$$\rho(\hat{p},t_k) = inf\left\{\rho(p,t_k) : p \in Z(t_k)\right\}, \quad (5.2)$$

т.е. $\hat{p} \in Z(t_k)$, ближайшая к 0_p в смысле минимума функционала (5.1). В качестве направления нормали, при которой соответствующая опорная гиперплоскость в момент времени t_k будет отделять множество $Z(t_k)$ и точку 0_p, берётся антиградиент функционала (5.1) в точке $\hat{p}$, т.е.

$$l_k = (-1_{L_2^q[0,T]}, -\hat{x}(t_k)). \quad (5.3)$$

Для построения опорной к $Z(t_k)$ гиперплоскости с нормалью l_k необходимо решить задачу

$$\tilde{\beta}(t_k) = (l_k, p(\tilde{\omega},t_k) = \sup\left\{(l_k, p(\omega,t_k)) : \omega \in \Omega\right\}. \quad (5.4)$$

Из конкретного вида элемента $p(\omega,t)$ в (3.4) и вида нормали l_k в (5.3) следует, что

$$\tilde{v}(\tau) = 0_{L_2^q[0,T]} \quad (5.5)$$

При этом управление $\tilde{u}(\tau)$, $\tau \in [0,t_k]$ находится путем решения задачи

$$J(\tilde{u},t_k) = \min_{\forall u \in U} J(u,t_k), \quad (5.6)$$

где

$$J(u,t_k) = \sum_{i=1}^{q} \int_0^{t_k} r_i^2(x,u,\tau)d\tau + (\hat{x}, x(u,t_k)). \quad (5.7)$$

Задача (5.6) решается методом условного градиента[15]. Сходимость этого метода будет обеспечена, если функционал (5.7) является выпуклым, непрерывно-дифференцируемым по $u \in U$ с производными, удовлетворяющими условию Липшица. Выпуклость функционала (5.7) по $u \in U$ вытекает из выпуклости функций $r_i^2(x,u,\tau)$ по (x,u). Непрерывность, дифференцируемость и Липшицевость производной по u функционала (5.7) вытекает из свойств вектор-функции $c(x,u,\tau)$ и неравенств (2.2), (2.3). Способ дифференцирования функционалов вдоль траекторий управляемой системы описан в работе [16]. В нашем случае градиент функционала (5.7) будет вычисляться по формуле

$$J'_u(u,\tau) = R_u(x(u,\tau),u(\tau),\tau) - B^T(\tau)\psi(\tau), \quad \tau \in [0,t_k], \tag{5.8}$$

где $x(u,\tau)$ – решение системы (1.1)–(1.2), $\psi(\tau)$ – решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi(\tau)}{d\tau} = R_x(x(u,\tau),u(\tau),\tau) - A^T(\tau)\psi(\tau), \quad \tau \in [0,t_k], \\ \psi(\tau_k) = -\hat{x}(t_k). \end{cases} \tag{5.9}$$

Здесь

$$R_u(x,u,\tau) = 2\sum_{i=1}^{q} [c_i(x,u,\tau)]_u \; r_i(x,u,\tau), \tag{5.10}$$

$$R_x(x,u,\tau) = 2\sum_{i=1}^{q} [c_i(x,u,\tau)]_x \; r_i(x,u,\tau). \tag{5.11}$$

Отметим, что система (5.9) интегрируется от t_k до нуля.

6. Поиск направления нормали разделяющей гиперплоскости

В предыдущем пункте было указано, что на каждой k-ой итерации в качестве направления нормали разделяющей гиперплоскости можно взять вектор l_k, определяемый согласно (5.3). Для того, чтобы найти этот вектор необходимо знать точку $\hat{p}(t_k)$, которая находится из решения задачи (5.2). Найти точку $\hat{p}(t_k)$ достаточно сложно, поскольку множество $Z(t_k)$ априорно неизвестно.

Будем искать приближенное решение задачи (5.2), а именно: искать решение (5.2) на выпуклой оболочке точек p_k и $p^{(j)}$, $j = \overline{2,s}$, принадлежащих $Z(t_k)$, где p_k – ближайшая к 0_p точка, полученная на k-ой итерации, $p^{(2)}$, $p^{(j)}$, $j = \overline{3,s}$ – опорные к $Z(t_k)$ точки, полученные на текущей и предыдущих итерациях. Здесь $p_k = (h_k, x(t_k))$, $p^{(j)} = (h^{(j)}, x^{(j)}(t_k))$, $j = \overline{2,s}$,

$$h_k = h(x(u_k,\tau),u_k(\tau),v_k(\tau),\tau,t_k),$$

$$h^{(j)} = h(x(u^{(j)},\tau),u^{(j)}(\tau),v^{(j)}(\tau),\tau,t_k),$$

$v_k(\tau) = v^{(j)}(\tau) = 0_{L_2^q[0,T]}$, $x_k(t) = x(u_k,t_k)$, $x^{(j)}(t_k) = x(u^{(j)},t_k)$.

Положим $p^{(1)} = p_k$ и найдем последовательность точек $f_{j,n} = (g_{j,n}, y_{j,n})$, $f_{0,1} = p^{(1)}$, $g_{j,n} \in L_2^q[0,T]$, $y_{j,n} \in R^n$, $j = \overline{1,s}$, $n = 1,2,...$, реализующих решение задачи

$$\rho(f_{j,n},t_k) = \min_{\alpha\in[0,1]} \rho(p^{(j)} + \alpha(f_{j-1,n} - p^{(j)}),t_k), \quad j = \overline{1,s}.$$

С учётом конкретного вида функционала $\rho(p,t_k)$ решение задачи минимизации можно записать в виде

$$f_{j,n} = (1-\alpha_{j,n})p^{(j)} + \alpha_{j,n}f_{j-1,n}, \quad j = \overline{1,s},$$

где $\alpha_{j,n} \in [0,1]$, ближайшее число число к $\overline{\alpha_{j,n}}$ вычисляется по формуле

$$\overline{\alpha}_{j,n} = \begin{cases} -\dfrac{\theta_{j-1,n} - R^{(j)} + ((y_{j-1,n} - x^{(j)}), x^{(j)})}{(y_{j-1,n} - x^{(j)}, y_{j-1,n} - x^{(j)})}, & \text{если } \parallel y_{j-1,n} - x^{(j)} \parallel \neq 0, \\ 1, & \text{если } \parallel y_{j-1,n} - x^{(j)} \parallel = 0 \text{ и } \theta_{j-1,n} < R^{(j)}, \\ 0, & \text{если } \parallel y_{j-1,n} - x^{(j)} \parallel = 0 \text{ и } \theta_{j-1,n} \geq R^{(j)}. \end{cases}$$

Здесь

$$R^{(j)} = R(u^{(j)}, t_k) = \sum_{i=1}^{q} \int_0^{t_k} r_i^2(x(u^{(j)}, \tau), u^{(j)}(\tau), \tau) d\tau, \quad j = \overline{1, s}, \tag{6.1}$$

где $u^{(1)} = u_k(\tau)$, $u^{(2)} = \tilde{u}_k(\tau)$, $x(u^{(j)}, \tau)$, $j = \overline{1, s}$ – решения системы дифференциальных уравнений (1.1)–(1.2) на промежутке $[0, t_k)$ при $\tilde{u}(\tau)$ – управление, найденное на k-ом шаге как решение (5.6).

Величины $\theta_{j,n}$ вычисляются по следующим рекуррентным формулам

$$\theta_{j,n} = R^{(j)} + \alpha_{j,n}(\theta_{j-1,n} - R^{(j)}), \quad j = \overline{1, s}, \quad n = 1, 2, ...$$
$$\theta_{0,1} = R^{(1)}.$$

Процедура заканчивается нахождением $f_{s,n}$. Управление $\omega_{j,n}(\tau)$, соответствующее $f_{j,n}$, имеет вид

$$\omega_{j,n}(\tau) = (0_{L_2^q[0,T]}, u_{j,n}(\tau)), \tau \in [0, t_k],$$

где управления $u_{j,n}(\tau)$, в силу линейности системы (1.1), вычисляются по формуле

$$u_{j,n}(\tau) = u^j(\tau) + \alpha_{j,n}(u_{j-1,n}(\tau) - u^j(\tau)), j = \overline{1, s}, \tag{6.2}$$

$$u_{0,1} = u_k(\tau), \tau \in [0, t_k].$$

Если

$$| \rho(f_{s,n}, t_k) - \rho(f_{0,n}, t_k) | > \varepsilon_1, \tag{6.3}$$

где ε_1 – заданная точность выхода, то, положив $n = n+1$, цикл повторяется. В противном случае за приближенное решение задачи (5.2) принимается $f_{s,n}$, а соответствующее элементу $f_{s,n}$ управление записывается в виде

$$\omega_{s,n}(\tau) = (0_{L_2^q}[0, T], u_{s,n}(\tau)), \tau \in [0, t_k],$$

где $u_{s,n}(\tau)$ вычисляется по формуле (6.2).

Отметим, что при поиске $f_{s,n}$ мы использовали числа $R^{(j)}$, $j = \overline{1, s}$, определяемые согласно (6.1). Следовательно, запоминать вектор-функции $h(x^{(j)}, u^{(j)}, v^{(j)}, \tau, t_k)$ нет необходимости, достаточно запомнить числа $R^{(j)}$, $j = \overline{1, s}$, что и будет использовано в описанном ниже алгоритме.

7. Алгоритм решения задачи

Пусть к k-ой итерации известны:

$$t_k \leq t^0, u_k = u_k(\tau) \in U,\ x_k = x(u_k, t_k),\ u^{(j)} = u^{(j)}(\tau),\ x^{(j)} = x(u^{(j)}, t_k), j = \overline{2, s}, \tau \in [0, t_k],$$

$$R_k = R(u_k, t_k), R^{(j)} = R(u^{(j)}, t_k), j = \overline{2, s},$$

Шаг 1. Построим опорную гиперплоскость к множеству $Z(t_k)$ с нормалью

$$l_k = (-1_{L_2^q[0,T]}, -x_k)$$

и найдем управление $\tilde{\omega} = (0_{L_2^q[0,T]}, \tilde{u}(\tau), \tau \in [0, t_k])$, а также элемент $\tilde{p} = p(\tilde{\omega}, t_k)$. Вычислим $\tilde{\beta}(t_k) = (l_k, -\tilde{p})$. Если $\tilde{\beta}(t_k) \geq 0$, то построенная опорная гиперплоскость отделяет множество $Z(t_k)$ от точки 0_p, что позволяет перейти к шагу 2. Иначе, положив $t_{k+1} = t_k$, переходим к шагу 4.

Шаг 2. Интегрируем по возрастанию τ от $\tau_k = t_k$ систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{d\tau} = A(\tau)x + B(\tau)u + D(\tau), \quad x(\tau_k) = x(\tilde{u}, t_k), \tag{7.1}$$

$$\frac{d\psi}{d\tau} = -A^T\psi + R_x(x, u, \tau), \quad \psi(t_k) = -x(\tilde{u}, t_k), \tag{7.2}$$

с управлением $u = u^*(\tau) \in U$, которое находится из условия

$$H(\psi, x, u^*, \tau) = \max_{\forall u \in U} H(\psi, x, u, \tau), \tag{7.3}$$

где

$$H(\psi, x, u, \tau) = -\sum_{i=1}^{q} r_i^2(x, u, \tau) + \psi^T(A(\tau)x + B(\tau)u + D(\tau)).$$

$R_x(x, u, \tau)$ определяется согласно (5.11). Интегрирование ведется до тех пор, пока опорная гиперплоскость не достигнет точку 0_p, т.е. до первого момента времени τ^*, при котором выполняется неравенство

$$(\psi(u^*, \tau^*), -x(u^*, \tau^*)) \leq 0.$$

Этот момент и принимается за t_{k+1}. Положим

$$\tilde{x} = \tilde{x}(t_{k+1}) = x(u^*, t_{k+1})$$

и

$$\tilde{u}(\tau) = \begin{cases} \tilde{u}(\tau), & \tau \in [0, t_k] \\ u^*(\tau), & \tau \in [t_k, t_{k+1}] \end{cases}, \tilde{v}(\tau) = 0_{L_2^q[0,T]}.$$

Шаг 3. Множество $Z(t)$ может оказаться немонотонным, т.е. при $t_{k+1} > t_k$, $Z(t_k) \notin Z(t_{k+1})$. Проинтегрируем на промежутке $(t_k, t_{k+1}]$ систему дифференциальных уравнений (1.1) с начальными условиями $x(t_k) = x_k, x(t_k) = x^{(j)}$, $j = \overline{2, s}$ при некотором управлении $u^{**}(\tau) \in U$. Полученные управления обозначим через u_{k+1} и $u^{(j)}$, $j = \overline{2, s}$,

$$u_{k+1} = \begin{cases} u^k(\tau), & \tau \in [0, t_k] \\ u^{**}(\tau), & \tau \in (t_k, t_{k+1}] \end{cases} \quad u^{(j)} = \begin{cases} u^{(j)}(\tau), & \tau \in [0, t_k] \\ u^{**}(\tau), & \tau \in (t_k, t_{k+1}] \end{cases},$$

а соответствующие этим управлениям векторы будем обозначать $x_{k+1} = x(t_{k+1})$, $x^{(j)} = x^{(j)}(t_{k+1})$, $j = \overline{2, s}$. Параллельно вычислим

$$R_{k+1} = R(u_{k+1}, t_{k+1}) = R_k + \sum_{i=1}^{q} \int_{t_k}^{t_{k+1}} r_i^2(x(u_{k+1}, \tau), u_{k+1}(\tau), \tau) d\tau,$$

$$R^{(j)} = R(u^{(j)}, t_{k+1}) = R(u^{(j)}, t_k) + \sum_{i=1}^{q} \int_{t_k}^{t_{k+1}} r_i^2(x(u^{(j)}, \tau), u^{(j)}(\tau), \tau) d\tau, \quad j = \overline{2, s}.$$

Шаг 4. Удалим среди точек $x^{(j)}(t_{k+1})$, $j=\overline{2,s}$ точку, наиболее удаленную от точки 0_p в смысле функционала (5.1). Перенумеруем полученную последовательность точек, начиная с $j=3$. Положим $x^{(2)}(t_{k+1})=\tilde{x}(t_k)$, $u^{(2)}(\tau)=\tilde{u}(\tau)$, $\tau\in[0,t_{k+1}]$ и вычислим

$$R^{(2)}=R(u^{(2)},t_{k+1})=\sum_{i=1}^{q}\int_0^{t_{k+1}} r_i^2(x(u^{(2)},\tau),u^{(2)}(\tau),\tau)d\tau.$$

Положим $k=k+1$, $t_k=t_{k+1}$ и переходим к шагу 5.

Шаг 5. Используя полученные точки x_k, $x^{(j)}(t_k)$, $j=\overline{2,s}$ в соответствии с пунктом 6, найдем элемент $f_{s,n}=(g_{s,n},y_{s,n})$ и, согласно соотношению (6.2), управление $u_{s,n}(\tau)$, $\tau\in[0,t_k]$. Если

$$\rho(f_{s,n},t_k)<\varepsilon_2,$$

где ε_2 – заданная точность решения задачи, то задача решена и время быстродействия $t^0=t_k$, а оптимальное управление имеет вид

$$\omega^o(\tau)=(0_{L_2^q[0,T]},u_{s,n}(\tau)),\tau\in[0,t_k]).$$

Иначе, вычислив

$$R_k=R(u_{s,n},t_k)=\sum_{i=1}^{q}\int_0^{t_k} r_i^2(x(u_{s,n},\tau),u_{s,n}(\tau),\tau)d\tau$$

и положив $u_k=u_k(\tau)=u_{s,n}(\tau)$, $\tau\in[0,t_k]$, $x_k=x(u_k,t_k)$, переходим к шагу 1.

Теорема 7.1. *Последовательности, построенные согласно приведенному выше алгоритму, таковы, что если* $t_k\to\infty$, *то задача* (1.2) *не имеет решения, иначе* $\lim_{k\to\infty}t_k=t^0$ *и для любых* ε_3 *и* $\varepsilon_4>0$ *существует номер* k^*, *такой что при* $k>k^*$

$$\| x(u_k,t_k)\|\le\varepsilon_3,\quad \sum_{i=1}^{q}\int_0^{t_k} r_i^2(x(u_k,\tau),u(\tau),\tau)d\tau\le\varepsilon_4$$

предел $u^0(\tau)$, $\tau\in[0,t^0]$ *любой слабосходящейся подпоследовательности* $u_k(\tau)$ *есть оптимальное управление.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2 в [17].

8. Результаты вычислительного эксперимента

Предложенный алгоритм был апробирован на задаче оптимального по быстродействию управлении внешним нагревом неограниченной пластины до заданной постоянной по сечению температуры. Требовалось, чтобы нагреваемое изделие в процессе нагрева не разрушилось от возникающих сжимающих и растягивающих термонапряжений.

Процесс нагрева описывается следующим одномерным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}=a\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2},\quad 0<x<\overline{x},\quad t>0, \tag{8.1}$$

$$T(x,0)=T^0=const,\quad x\in[0,\overline{x}], \tag{8.2}$$

$$\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=\overline{x}} = \alpha(T_c(t) - T(\overline{x},t)), \quad t \geq 0, \tag{8.3}$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad t \geq 0, \tag{8.4}$$

где $T(x,t)$ – температура, °C, x – пространственная координата, $\overline{x}$ – половина толщины пластины, м, a – коэффициент температуропроводности, м^2/час, λ – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·°C), α – коэффициент теплообмена, Вт/(м^2·°C), $T_c(t)$ – температура греющей среды (управляющий параметр), $T_c(t) \in L_2[0,\overline{t}]$ и почти при всех $t \in [0,\overline{t}]$ принимает значения из отрезка $[T^-, T^+]$, $T^+ > T^- \geq T^0$.

Будем считать, что нагреваемое изделие хрупкое. Тогда [18] ограничения на термонапряжения запишутся в виде

$$-\sigma_c(T) \leq \sigma_{ii}(r,T) \leq \sigma_p(T), \tag{8.5}$$

где $\sigma_c(T)$, $\sigma_p(T)$ – значения пределов прочности на сжатие и растяжение, мПа, $\sigma_{ii}(r,T)$, $i = x, y$ – главные компоненты тензора напряжений, мПа, которые в рассматриваемом случае находятся из решения уравнения Дюамеля-Неймана аналитически.

Аналогично работам [12], [17] запишем соотношения (8.1)-(8.4) в безразмерных единицах и выполним замену переменных так, чтобы заданное конечное состояние стало нулевым. К полученным уравнениям применим интегральное косинус преобразование Фурье. В результате решение уравнения теплопроводности запишется в виде ряда

$$\theta(l,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n x_n(\tau)\cos(\mu_n l), \quad l \in [0,1], \tag{8.6}$$

где μ_n, $n = 1, 2, ...$ – корни уравнения

$$B_i \cos(\mu_n) - \mu_n \sin(\mu_n) = 0, \quad B_i = \frac{\alpha \overline{x}}{\lambda}, \quad D_n = \frac{2B_i^2}{(\mu_n^2 + B_i^2 + B_i)\sin(\mu_n)},$$

$x_n(\tau)$, $n = 1, 2, ...$ – решение дифференциального уравнения

$$\frac{dx_n(\tau)}{d\tau} = -\mu_n^2 x_n(\tau) + \mu_n u(\tau), \quad x_n(0) = x_0, \quad n = 1, 2, ... \tag{8.7}$$

$u(\tau)$ – безразмерная температура греющей среды (безразмерный управляющий параметр).

Неравенства (8.5) запишутся в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n \big[1 - \frac{6\Gamma}{\mu_n^2} - \frac{1+3\Gamma}{\mu_n^2} B_i + \frac{6\Gamma}{\mu_n^2 \cos(\mu_n)}\big] \leq \sigma_c(\theta(1,\tau)), \tag{8.8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n \big[\frac{(1+3\Gamma)B_i + 6\Gamma}{\mu_n^2} - \frac{1}{\cos(\mu_n)}(1 - \frac{6\Gamma}{\mu_n^2})\big] \leq \sigma_p(\theta(0,\tau)). \tag{8.9}$$

Здесь $F_n = \dfrac{2B_i \mu_n}{\mu_n^2 + B_i^2 + B_i}$.

Параметр $\Gamma \in [0,1]$ характеризует степень защемления от поворота краев пластины. $\Gamma = 0$ в случае жесткого защемления, $\Gamma = 1$ для свободных краев пластины. В настоящей работе рассматривалось жесткое защемление, т.е. $\Gamma = 0$.

Перейдем к конечномерной аппроксимации задачи. Ограничимся в соотношениях (8.6)–(8.9) первыми N членами ($n = \overline{1, N}$). Предположим, что $\sigma_c(\theta(1,\tau))$ и $\sigma_p(\theta(0,\tau))$ являются выпуклыми и непрерывно дифференцируемыми, производная по θ удовлетворяет условию Липшица. Тогда для решения задачи поиска управления $u^0(\tau)$, переводящего систему (8.7) из x_0 в нуль за минимальное время, можно воспользоваться вышеуказанным алгоритмом.

Приведем результаты вычислительного эксперимента. Будем считать, что значения механических и теплофизических коэффициентов, кроме пределов хрупкой прочности на сжатие $\sigma_c(\theta)$ и растяжение $\sigma_p(\theta)$, являются постоянными и равными $\lambda =$ 23 Вт/(м·°С), $a = 0,0153$ м^2/час, $\overline{x} = 0,23$ м, $\alpha = 200$ Вт/(м^2·°С), $\alpha_T = 0,18 \cdot 10^{-4}$ 1/°С, $E = 0,145 \cdot 10^{12}$ мПа, $\nu = 0,3$, где α_T – коэффициент линейного расширения, E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона.

Начальная температура принималась равной 20°С, конечная температура – 920°С. Температура греющей среды $T_c(t) \in$ [800°С,1600°С]. Данные зависимости от температуры пределов хрупкой прочности на сжатие и растяжение для рассматриваемого материала представлены в таблице 8.1. Эти данные были получены экспериментальным путем в Институте проблем сверхпластичности металлов РАН (г. Уфа).

Таблица 8.1. Зависимость пределов хрупкой прочности на сжатие и растяжение от температуры

Table 8.1. Dependence of brittle compressive and tensile strength limits on temperature

Температура, °С		20	975	1050	1100	1150
Предел прочности, мПа	сжатие	1500	700	470	310	210-240
	растяжение	980	540	370	200	140

Табличные значения пределов прочности на сжатие и растяжение после перехода к безразмерным величинам, аппроксимировались функциями

$$\sigma_c(\theta) = (-0,023 \cdot e^{0,0003030\theta} + 0,747),$$

$$\sigma_p(\theta) = (-0,003 \cdot e^{0,00046\theta} + 0,476),$$

которые являются выпуклыми по безразмерной температуре θ.

Задача решалась для случая $N = 6$, поскольку при дальнейшем увеличении N время быстродействия изменялось незначительно. Ниже на рисунке 8.1 представлены результаты расчетов.

Из рисунка 8.1 следует, что оптимальное управление имеет достаточно много точек переключения , особенно, в первой половине времени нагрева. Анализ результатов расчёта показывает, что скорость нагрева материала с вышеуказанными свойствами ограничивается сжимающими термонапряжениями на поверхности нагреваемой пластины. Следует подчеркнуть, что в научной литературе обычно рассматриваются материалы, в которых скорость нагрева ограничивается растягивающими термонапряжениями [19].

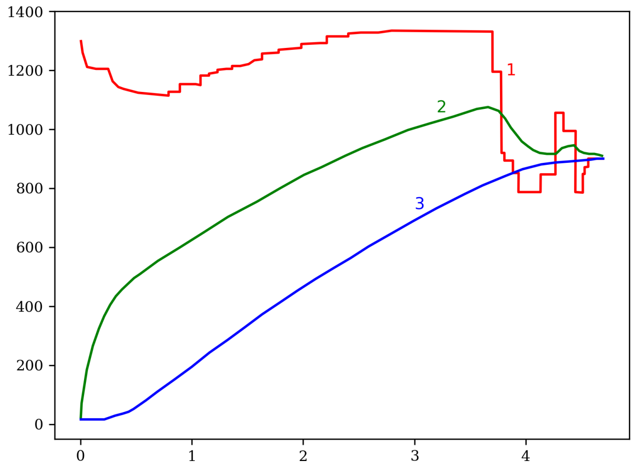

Рис. 8.1. График изменения во времени оптимального по быстродействию управления (1) и графики изменения во времени температуры поверхности (2), температуры центра (3) при полученном оптимальном управлении

Fig. 8.1. Graph of the change in time of the control speed setting (1) and graphs of the change in time of the panel temperature (2) and the center temperature (3) for the obtained control mode

Список литературы

1. Красовский Н. Н. Об одной задаче оптимального регулирования // *Прикладная математика и механика.* 1957. Т. 21, вып. 5. С. 670–677.

2. Neustadt L. W. Synthesizing of Time Optimal Control Systems *Math. Anal, and Appl.* 1960. Vol. 1, no. 4. P. 484–993. DOI: 10.1016/0022-247X(60)90015-9

3. La Salle J. P. The time optimal control problem. Reprinted from: Contribution to the Theory of Nonlinear oscillations. Princeton University Press, 1959. Vol. 5. 24 p.

4. Eaton J. H. An Iterative Solution to Time Optimal Control *Math. Anal, and Appl.*. 1962. Vol. 5, no. 2. P. 329–344. DOI: 10.1016/S0022-247X(62)80015-8.

5. Пшеничный Б. Н. Численный метод расчета оптимального по быстродействию управления для линейных систем // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 1964. Т. 4, № 1. С. 52-60.

6. Fadden E. J., Gilbert E. G. Computational Aspects of the Time-Optimal Control Problem *Computing methods in optimization problems.* New York: Academic Press. 1964. P. 167–182.

7. Пшеничный Б. Н., Соболенко Л.А. Ускоренный метод решения задачи линейного быстродействия // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 1968. Т. 8, № 6. С. 1345–1351.

8. Кирин Н. Е. Об одном численном методе в задаче о линейных быстродействиях // Методы вычислений. Л.: Издательство Ленинградского университета, 1963. С. 67–74.

9. Кирин Н. Е. Вычислительные методы теории оптимального управления. Л.: ЛГУ, 1968. 146 с.

10. Кирин Н. Е. Методы последовательных оценок в задачах оптимизации управляемых систем. Л.: ЛГУ, 1975. 160 с.

11. Морозкин Н. Д. О сходимости некоторых алгоритмов решения задачи линейного быстродействия // Математические методы анализа управляемых процессов. Ленинград: ЛГУ, 1986. Вып. 8. С. 147–154.

12. Морозкин Н. Д. Оптимальное управление одномерным нагревом с учетом фазовых ограничений // *Математическое моделирование.* 1996. Т. 8, № 3. С. 91–110.

13. Болтянский В. Г. Математическая методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408 с.

14. Карманов В. Г. Математическое программирование. Учебное пособие. М.: Физматлит, 2004. 264 с.

15. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. В 2-х кн. Часть II. М.: МЦНМО, 2011. 433 с.

16. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 488 с.

17. Морозкин Н. Д. О сходимости конечномерных приближений в задаче оптимального одномерного нагрева с учетом фазовых ограничений // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 1996. Т.36, № 10. С. 12-22

18. Филоненко-Бородич М. И. Механические теории прочности. М.: МГУ, 1961. 92 с.

19. Вигак В.М. Управление температурными напряжениями и перемещениями. Киев: Наук. думка, 1988. 318 с.

Поступила 14.03.2025; доработана после рецензирования 26.04.2025; принята к публикации 28.05.2025

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. N. N. Krasovsky, "[On one problem of regulation adjustment]", *Applied Mathematics and Mechanics*, **21**:5 (1957), 670–677.

2. L. W. Neustadt, "Synthesizing of Time Optimal Control Systems", *Math. Anal, and Appl.*, **1**:4 (1960), 484–992. DOI: 10.1016/0022-247X(60)90015-9

3. J. P. La Salle, "The time optimal control problem", *Contribution to the Theory of Nonlinear oscillations.*, **5**, Baltimore, 1959, 30.

4. J. H. Eaton, “An Iterative Solution to Time Optimal Control”, *Math. Anal, and Appl.*, **5**:2 (1962), 329–344.
5. B. N. Pshenichny, “Numerical method for calculating optimal performance for linear systems”, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **4**:1 (1964), 52–60. DOI: 10.1016/0041-5553(64)90216-2
6. E. J. Fadden , E. G. Gilbert, “Computational Aspects of the Time-Optimal Control Problem”, *Computing methods in optimization problems*, Academic Press, New York, 1964, 167–182.
7. B. N. Pshenichny, L. A. Sobolenko, “Accelerated method for solving the problem of linear speed”, *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **8**:6 (1968), 1345–1351. DOI: 10.1016/0041-5553(68)90107-9
8. N. E. Kirin, “On one numerical method in the problem of linear speed-responses”, *Methods of calculations*, Leningrad State University, L., 1963, 67–74.
9. N. E. Kirin, “Computational methods of optimal control theory”, 1968, 144.
10. N. E. Kirin, “Methods of successive estimates in problems of optimization of controlled systems”, 1975, 160.
11. N. D. Morozkin, “On the convergence of some algorithms for solving the linear speed problem”, *Mathematical methods of analysis of controlled processes*, Leningrad State University, L., 1986, 147–154.
12. N. D. Morozkin, “Optimal control of one-dimensional heating taking into account phase constraints”, *Mathematical modeling*, **8**:3 (1996), 91-110.
13. V. G. Boltyansky, *Matematicheskaya metody optimal’nogo upravleniya [Mathematical methods of optimal control]*, Nauka, Moscow, 1969, 408 p.
14. V. G. Karmanov, *Matematicheskoe programmirovanie [Mathematical programming]*, Fizmatlit, Moscow, 2004, 264 p.
15. F. P. Vasiliev, *Metody optimizatsii [Optimization methods]. In 2 books. Part II.*, MCNO, Moscow, 2011, 433 p.
16. R. P. Fedorenko, *Priblizhennoe reshenie zadach optimal’nogo upravleniya [Approximate solution of optimal control problems]*, Nauka, Moscow, 1978, 488 p.
17. N. D. Morozkin, “The convergence of finite-dimensional approximations in the problem of the optimal one-dimensional heating taking phase constraints into account”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **36**:10 (1996), 1331-1339.
18. M. I. Filonenko-Borodich, *Mekhanicheskie teorii prochnosti [Mechanical Theories of Strength]*, Moscow State University, Moscow, 1961, 92 p.
19. V. M. Vigak, *Upravleniye temperaturnymi napryazheniyami i peremeshcheniyami [Control of temperature stresses and displacements]*, Nauk. dumka, Kyiv, 1988, 318 p.

Submitted 14.03.2025; Revised 26.04.2025; Accepted 28.05.2025

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.