Математика

DOI 10.15507/2079-6900.27.202502.111-126
Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.651

Об ортогонализации сплайнов Шенберга

В. Л. Леонтьев

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, (г. Санкт-Петербург, Российская Федерация)

Аннотация. Статья посвящена применению авторской процедуры ортогонализации финитных функций, не разрушающей их конечные носители, к сплайнам Шенберга третьей степени. Описывается общий алгоритм модификации материнского сплайна Шенберга в рамках этой процедуры ортогонализации. Показано, что в случае использования восьми ступенчатых функций для модификации материнского сплайна Шенберга третьей степени достигается ортогонализация порождаемого им сеточного набора сплайнов без изменения конечных носителей сплайнов. Найдены шестнадцать вариантов ортогонализации сплайнов Шенберга третьей степени ступенчатыми функциями. В первой группе восьми вариантов все коэффициенты модифицирующих ступенчатых функций имеют действительные значения, но сплайны Шенберга после такой модификации не являются четными или нечетными функциями. В каждом из восьми вариантов второй группы два коэффициента являются комплексными, а остальные шесть коэффициентов имеют действительные значения. Модифицированные сплайны Шенберга второй группы представляют собой суммы четной и нечетной функций. Доказана теорема о порядке аппроксимации любой функции пространства Соболева линейными комбинациями построенных ортогональных сплайнов Шенберга.

Ключевые слова: кубические сплайны Шенберга, материнский сплайн, процедура ортогонализации Грама-Шмидта, ступенчатые функции, авторская процедура ортогонализации финитных функций, порядок аппроксимации ортогональными сплайнами Шенберга, смешанные вариационно-сеточные методы

Для цитирования: Леонтьев В. Л. Об ортогонализации сплайнов Шенберга // *Журнал Средневолжского математического общества.* 2025. Т. 27, № 2. С. 111–126. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202502.111-126

Об авторе:
Леонтьев Виктор Леонтьевич, докт. физ.-мат. наук, профессор Научного Центра мирового уровня «Передовые цифровые технологии» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (195251, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29В), ORCID: http: //orcid.org/0000-0002-8669-1919, leontiev_vl@spbstu.ru

Original article

MSC2020 41A15

On orthogonalization of Schoenberg splines

V. L. Leontiev

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (St. Petersburg, Russian Federation)

Abstract. The article is devoted to the application of the author's orthogonalization procedure of finite functions, which does not destroy their finite supports, to Schoenberg splines of the third degree. A general algorithm for modifying the Schoenberg mother spline within the framework of this orthogonalization procedure is described. It is shown that orthogonalization of the grid set of splines generated by the Schoenberg spline is achieved without changing the finite supports of the splines in the case of using eight step functions to modify the mother spline. Sixteen variants of orthogonalization for the cubic Schoenberg splines by step functions are found. In the first group of eight variants, all coefficients of the modifying step functions have real values, but the Schoenberg splines after such modification are not even or odd functions. In each of the eight variants of the second group, two coefficients are complex, and the remaining six coefficients have real values. The modified Schoenberg splines of the second group are sums of even and odd functions. A theorem on the order of approximation of any function from the Sobolev space by linear combinations of constructed orthogonal Schoenberg splines is proved.

Keywords: cubic Schoenberg splines, mother spline, Gram-Schmidt orthogonalization procedure, step functions, author's orthogonalization procedure for finite functions, order of approximation by orthogonal Schoenberg splines, mixed variational-grid methods

For citation: *V. L. Leontiev.* On orthogonalization of Schoenberg splines. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 27:2(2025), 111–126. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202502.111-126

About the author:
Victor L. Leontiev, D. Sci. (Phys. and Math.), Professor of World-Class Research Center for Advanced Digital Technologies, Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University (29, Politechnicheskaya str., litera B, St. Petersburg, 195251, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-8669-1919, leontiev_vl@spbstu.ru

1. Введение

В 1946 году в статье [1] I. J. Schoenberg впервые построил кусочно-полиномиальные сплайны третьей степени, имеющие конечные носители $[-2, 2]$. Материнский сплайн Шенберга состоит из четырех кубических функций, заданных на отрезках $[-2, -1]$, $[-1, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 2]$, которые в точках с координатам (-1), 0, 1 сопрягаются друг с другом, его масштабирование и трансляция порождает сеточную систему сплайнов Шенберга. В точках сопряжения кубических частей общий график сплайна Шенберга не имеет разрывов и изломов, поскольку во всех точках области определения сплайна имеется непрерывность сплайна и его первой производной. Непрерывной во всех точках области определения, в том числе, во всех точках сопряжения частей сплайна является также его вторая производная, что определяет величину дефекта сплайна равную единице. Это характеризует высокий уровень непрерывности и гладкости сплайнов Шенберга и объясняет их широкое применение в теории аппроксимации и в методах вычислительной математики и механики. Теория сплайнов возникла в 1946 году после создания сплайнов Шенберга и начала быстро развиваться. Появился класс B-сплайнов, одним из важнейших примеров которых явились сплайны Шенберга – B-сплайны третьей степени. Термин B-сплайн был предложен И. Шенбергом. В современной теории сплайнов B-сплайном называют функцию с минимальным конечным носителем для заданной степени сплайна и порядка его гладкости. Оказалось, что до создания сплайнов Шенберга и до начала теории сплайнов уже были известны системы сеточных ступенчатых базисных функций [2] и системы сеточных финитных кусочно-линейных базисных функций Фабера-Шаудера [3–4], которые соответствуют B-сплайнам соответственно нулевой и первой степеней. Но системы ступенчатых и кусочно-линейных сеточных финитных базисных функций, созданные в 1910 году, не привели тогда к появлению и развитию теории сплайнов поскольку для них, в отличие от сплайнов Шенберга, идея сопряжения конечных частей многочленов в пределах конечного носителя материнского сплайна не находилась, по-видимому, на переднем плане процедуры их построения.

Процедура Грама-Шмидта ортогонализации систем функций, применяемая для ортогонализации наборов сплайнов на каждой сетке из последовательности сеток, возникающей при сгущении сеток в области, разрушает конечные носители исходной системы сплайнов. Следовательно, ортогонализация сплайнов с помощью процедуры Грама-Шмидта, что отмечается в монографии [5], приводит к утрате важнейшего для многих алгоритмов вариационно-сеточных методов (ВСМ), в частности, метода конечных элементов, свойства финитности базисных функций. Именно свойство финитности сплайнов позволило в середине 20 века устранить основной недостаток матриц систем сеточных уравнений, возникающих в ВСМ, а именно, тот недостаток, который связан с плохой обусловленностью таких матриц, вызванный применением не финитных базисных функций. Поэтому в алгоритмах ВСМ, в частности, метода конечных элементов, начали активно применяться системы сплайнов, не обладавшие свойством ортогональности даже на отдельных сетках.

В ВСМ [6], основанных на вариационном принципе Лагранжа и связанных с применением сплайнов, отсутствие у сплайнов свойства ортогональности не оказалось критичным и не привело к замедлению развития таких методов.

Однако, отсутствие свойства ортогональности сплайнов на каждой отдельной сетке значительно затормозило в конце 20 века развитие смешанных ВСМ [6], основанных на вариационных принципах Рейсснера и Ху-Вашицу механики деформируемого твердого тела. Причиной этого явилось то, что в таких методах с каждым узлом сетки связано в несколько раз больше узловых неизвестных по сравнению с ВСМ, основанными на вариационном принципе Лагранжа (например, в теории упругости девять узловых неизвестных – шесть компонент тензора напряжений и три компоненты вектора перемещений в смешанном ВСМ, вместо трех неизвестных – в ВСМ, основанном на вариационном принципе Лагранжа). В итоге оказалось, что матрица сеточных уравнений смешанного ВСМ содержит примерно на порядок больше элементов по сравнению с ВСМ, основанным на вариационном принципе Лагранжа. Это потребовало значительного увеличения вычислительных затрат при решении, например, задачи упругости. Но смешанный ВСМ дает на той же сетке более гладкие и более точные решения для деформаций и силовых факторов – производных компонент вектора перемещений. Это достоинство смешанных ВСМ и другие их положительные характеристики, например, определяемые отсутствием необходимости удовлетворять какие-либо граничные условия до варьирования функционала Рейсснера или функционала Ху-Вашицу и до решения системы сеточных уравнений, поскольку все граничные условия являются естественными, привело к поиску пути преодоления общего недостатка смешанных ВСМ, вызванного возрастанием объема вычислительных затрат на получение решений по сравнению с ВСМ, основанным на вариационном принципе Лагранжа.

С 1993 года, в котором были впервые созданы ортогональные кусочно-линейные сплайны, автором данной статьи и его учениками были построены и исследованы ортогональные кусочно-квадратичные сплайны на конечных отрезках, а также кусочно-линейные и кусочно-квадратичные сплайны на прямоугольных и треугольных конечных носителях. Эти и другие ортогональные сплайны представлены и систематизированы в книге [6], в которой указываются основные научные работы автора и его учеников, посвященные возникновению в 1993 году теории ортогональных сплайнов и ее дальнейшему развитию. Например, в [7] показывается применение ортогональных сплайнов в алгоритмах численных методов, а в [8] – при построении нового потенциала взаимодействия атомов, снижающего время расчета динамики наносистем атомов с помощью компьютера. Основная цель создания в 1993 году ортогональных сплайнов была связана с преодолением указанного выше недостатка смешанных ВСМ. Этот недостаток смешанных ВСМ был преодолен, поскольку ортогональные сплайны позволили исключать все силовые узловые неизвестные из глобальной системы сеточных уравнений до начала решения этой системы уравнений на компьютере, причем такое исключение оказалось возможным проводить также в аналитической форме при формировании системы сеточных уравнений.

В книге [6] были предложены две процедуры ортогонализации сплайнов с сохранением при этом, в отличие от процедуры ортогонализации Грама-Шмидта, размеров конечных носителей сплайнов. При этом, данные процедуры были использованы для ортогонализации кусочно-линейных и кусочно-квадратичных сплайнов. Примеры ортогональных кусочно-кубических сплайнов Шенберга в [6] не приводятся.

С дальнейшим развитием и с широким применением полиномиальных сплайнов Шенберга связаны многие статьи, в том числе, статьи И. Шенберга, например, [9]. В математической статистике, вычислительной математике, статистической радиотехнике и в других областях науки и техники применяются полиномиальные сплайны Шенберга нечетных степеней до 13-й степени включительно [10–11]. В работе [10] впервые приводятся точные формулы для сплайна Шенберга 15-й степени. В статье [12] отмечается центральная роль и в настоящее время сплайнов Шенберга в численном анализе, рассматриваются теоретические вопросы проблемы Шенберга [12], связанной с построением сплайнов. В работе [13] сообщается, что эффективное решение задач восстановления векторных и тензорных полей по результатам просвечивания исследуемых объектов в медицине, биологии, электронной микроскопии было получено с использованием в качестве аппроксимирующей последовательности потенциальных и соленоидальных векторных полей, построенных на основе двумерных B-сплайнов. В работе [14] приводятся результаты теоретических исследований зависимости погрешности приближения достаточно гладкой функции B-сплайнами третьей степени от величины параметра смещения исходных данных. Получены условия, при выполнении которых кубический B-сплайн восстанавливает многочлены до n-й степени. В статье [15] дается обзор развития теории сплайнов Шенберга. Развития, которое является актуальным направлением теории аппроксимации и сейчас, ему посвящены многие статьи, например, [16–17].

В данной статье рассматривается применение авторской геометрической процедуры ортогонализации сплайнов [6] к сплайнам Шенберга. Описан общий алгоритм модификации материнского кубического сплайна Шенберга в рамках геометрической процедуры, который может быть использован также для ортогонализации сплайнов Шенберга других нечетных степеней до 15-й степени включительно [10]. Показано, что в случае использования восьми ступенчатых функций для модификации материнского сплайна Шенберга третьей степени достигается возможность его ортогонализации на сетке без изменения конечного носителя сплайна. Найдены несколько вариантов ортогонализации сплайнов Шенберга третьей степени ступенчатыми функциями, имеющими не только действительные, но и комплексные коэффициенты, а также имеющими только действительные коэффициенты. Доказана теорема о порядке аппроксимации любой функции пространства Соболева линейными комбинациями построенных ортогональных сеточных сплайнов Шенберга.

2. Сплайны Шенберга третьей степени и процедура их ортогонализации, не изменяющая конечные носители сплайнов

Материнский сплайн Шенберга третьей степени имеет вид [1], [18]

$$\varphi^{(3)}(x) = \begin{cases} 0, \ x \geq 2, \\ (2-x)^3/6, \ 1 \leq x \leq 2, \\ [1 + 3(1-x) + 3(1-x)^2 - 3(1-x)^3]/6, \ 0 \leq x \leq 1, \\ \varphi^{(3)}(-x), \ \ x \leq 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Для ортогонализации сеточных сплайнов Шенберга каждый из четырех отрезков $[-2,\ -1]$, $[-1,\ 0]$, $[0,\ 1]$, $[1,\ 2]$, вместе составляющих конечный носитель сплайна Шенберга третьей степени, разбивается на N участков одинаковой длины равной $1/N$. Некоторые из этих участков в пределах каждого из отрезков $[-2,\ -1]$, $[-1,\ 0]$, $[0,\ 1]$, $[1,\ 2]$ выбираются в качестве конечных носителей вспомогательных финитных функций, предназначенных для модификации сплайнов Шенберга с целью их ортогонализации на каждой конкретной сетке.

В случае $N = 10$ в качестве двух конечных носителей вспомогательных функций, например, на отрезке $[0,\ 1]$, могут быть взяты два объединения четырех из десяти участков, а именно:

$$[0,\ 0.1] \cup [0.1,\ 0.2] \cup [0.2,\ 0.3] \cup [0.3,\ 0.4],$$

$$[0.6,\ 0.7] \cup [0.7,\ 0.8] \cup [0.8,\ 0.9] \cup [0.9,\ 1.0].$$

Вспомогательными функциями на этих двух конечных носителях являются две функции, полученные из материнского сплайна Шенберга его сжатием в десять раз и перемещением вправо соответственно на 0.2 и 0.8 (масштабированием и транслированием) вдоль оси Ox. Аналогичным образом на соответствующих частях отрезков $[-2,\ -1]$, $[-1,\ 0]$, $[1,\ 2]$ формируются и располагаются еще шесть вспомогательных масштабированных и транслированных сплайнов Шенберга. Все восемь вспомогательных сплайнов Шенберга используются для модификации материнского сплайна Шенберга с целью ортогонализации порождаемой таким материнским сплайном системы сеточных функций подобно тому, как это проводится и исследуется далее в случае ступенчатых вспомогательных функций.

При $N = 5$ в другом варианте построения вспомогательных функций используются ступенчатые функции

$$\varphi_i\,(x) = \left\{\begin{array}{ll} 1, & x \in [a_i, b_i], \\ 0, & x \notin [a_i, b_i], \end{array}\right. \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad \psi_i\,(x) = \left\{\begin{array}{ll} 1, & x \in [c_i, d_i], \\ 0, & x \notin [c_i, d_i], \end{array}\right. \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

причем конечные носители $[a_i, b_i]$ функций φ_i имеют вид [0.2, 0.4], [0.6, 0.8], [1.2, 1.4], [1.6, 1.8] соответственно для $i = 1, 2, 3, 4$, а конечные носители $[c_i, d_i]$ функций ψ_i имеют вид [−0.4, −0.2], [−0.8, − 0.6], [−1.4, −1.2], [−1.8, −1.6] соответственно для $i = 1, 2, 3, 4$.

Материнский сплайн Шенберга третьей степени после модификации имеет вид

$$\Phi(x) = \varphi^{(3)}(x) + \sum_{i=1}^{4} \big[A_i \psi_i(x) + B_i \varphi_i(x) \big], \tag{2.2}$$

где A_i, B_i−неизвестные постоянные коэффициенты. Значения этих восьми коэффициентов находятся из условий ортогональности

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)\Phi(x-3)dx = 0, \tag{2.3}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)\Phi(x-2)dx = 0, \tag{2.4}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)\Phi(x-1)dx = 0, \tag{2.5}$$

модифицированного материнского сплайна (2.2) и трех сплайнов $\Phi(x-3)$, $\Phi(x-2)$, $\Phi(x-1)$, полученных перемещением вдоль оси Ox модифицированного материнского сплайна и имеющих непустые пересечения их конечных носителей с конечным носителем сплайна $\Phi(x)$.

Наряду с условиями ортогональности должны также выполняться два необходимых условия аппроксимации различных функций модифицированными сплайнами Шенберга:

$$A_1 + A_3 + B_2 + B_4 = 0, \quad A_2 + A_4 + B_1 + B_3 = 0, \tag{2.6}$$

сформированных с учетом расположения конечных носителей функций φ_i, ψ_i на каждой из четырех основных частей конечных носителей функций $\Phi(x)$, $\Phi(x-3)$, $\Phi(x-2)$, $\Phi(x-1)$. Необходимость этих условий для того, чтобы модифицированные сплайны Шенберга обладали свойствами аппроксимации, будет показана далее в доказательстве теоремы.

3. Условия ортогональности модифицированных сплайнов Шенберга

Условие ортогональности (2.3) двух сплайнов Шенберга, смещенных друг относительно друга на три шага сетки, имеет вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)\Phi(x-3)dx = \int_{1}^{2} \Phi(x)\Phi(x-3)dx =$$
$$= \int_{1}^{2} \big[(2-x)^3/6 + B_3\varphi_3(x) + B_4\varphi_4(x)\big]\big[(x-1)^3/6 + A_4\varphi_3(x) + A_3\varphi_4(x)\big]dx = 0$$

и приводит к уравнению

$$0.007142857143/36+0.006A_3/6+0.07A_4/6+ \\ +0.006B_3/6+0.07B_4/6+0.2(A_3B_4+A_4B_3)=0. \quad (3.1)$$

Условие ортогональности (2.4) двух сплайнов Шенберга, смещенных друг относительно друга на два шага сетки, записывается в форме

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(x)\Phi(x-2)dx=\int_0^1\Phi(x)\Phi(x-2)dx+\int_1^2\Phi(x)\Phi(x-2)dx= \\ =\int_0^1\{[1+3(1-x)+3(1-x)^2-3(1-x)^3]/6+B_1\varphi_1(x)+ \\ +B_2\varphi_2(x)\}[x^3/6+A_4\varphi_1(x)+A_3\varphi_2(x)]dx+ \\ +\int_1^2[(2-x)^3/6+B_3\varphi_3(x)+B_4\varphi_4(x)]\{[1+3(x-1)+3(x-1)^2- \\ -3(x-1)^3]/6+A_2\varphi_3(x)+A_1\varphi_4(x)\}dx=0$$

и дает уравнение

$$0.4285714286/18+0.006(A_1+B_1)/6+0.07(A_2+B_2)/6+0.418(A_3+B_3)/6+ \\ +0.706(A_4+B_4)/6+0.2(A_1B_4+A_2B_3+A_3B_2+A_4B_1)=0. \quad (3.2)$$

Условие ортогональности (2.5) двух сплайнов Шенберга, смещенных друг относительно друга на один шаг сетки, имеющее вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(x)\Phi(x-1)dx=\int_{-1}^0\Phi(x)\Phi(x-1)dx+\int_0^1\Phi(x)\Phi(x-1)dx+\int_1^2\Phi(x)\Phi(x-1)dx= \\ =\int_{-1}^0\{[1+3(1+x)+3(1+x)^2-3(1+x)^3]/6+A_1\psi_1(x)+ \\ +A_2\psi_2(x)\}[(x+1)^3/6+A_3\psi_1(x)+A_4\psi_2(x)]dx+ \\ +\int_0^1\{[1+3(1-x)+3(1-x)^2-3(1-x)^3]/6+B_1\varphi_1(x)+ \\ +B_2\varphi_2(x)\}\{[1+3x+3x^2-3x^3]/6+A_1\varphi_2(x)+A_2\varphi_1(x)\}dx+ \\ +\int_1^2[(2-x)^3/6+B_3\varphi_3(x)+B_4\varphi_4(x)]\{[1+3(2-x)+ \\ +3(2-x)^2-3(2-x)^3]/6+B_1\varphi_3(x)+B_2\varphi_4(x)]\}dx=0,$$

преобразуется в уравнение

$$8.5071428568/36+0.488(A_1+B_1)/6+0.712(A_2+B_2)/6+ \\ +0.706(A_3+B_3)/6+0.418(A_4+B_4)/6+ \\ +0.2(A_1B_2+A_2B_1+A_1A_3+A_2A_4+B_1B_3+B_2B_4)=0. \quad (3.3)$$

4. Решения системы уравнений ортогональности и аппроксимации

4.1. Первая процедура ортогонализации

Решение системы семи уравнений для восьми неизвестных коэффициентов A_i, B_i, $i = 1, 2, 3, 4$, состоящей из трех условий ортогональности (3.1), (3.2), (3.3), а также из четырех дополнительних условий

$$A_1 = -B_2,\ A_2 = -B_1,\ A_3 = -B_4, A_4 = -B_3,$$

обеспечивающих выполнение необходимых условий аппроксимации (2.6) и являющихся по сравнению с условиями (2.6) более жесткими ограничениями на искомые коэффициенты, дает восемь вариантов значений искомых восьми коэффициентов, в каждом из которых два коэффициента имеют комплексные значения, а шесть коэффициентов – действительные значения:

4.1.1) $A_1 = -B_2 = -0.1200000000 - 0.6860771393\, i$, $A_2 = -B_1 = -1.221676965$,
$A_3 = -B_4 = -0.02666666667$, $A_4 = -B_3 = -0.02246871482$;

4.1.2) $A_1 = -B_2 = -0.1200000000 + 0.6860771393\, i$, $A_2 = -B_1 = -1.221676965$,
$A_3 = -B_4 = -0.02666666667$, $A_4 = -B_3 = -0.02246871482$;

4.1.3) $A_1 = -B_2 = -0.1200000000 - 0.6860771393\, i$ $A_3 = -B_4 = -0.02666666667$,
$A_2 = -B_1 = 1.461676965$, $A_4 = -B_3 = 0.07580204816$;

4.1.4) $A_1 = -B_2 = -0.1200000000 + 0.6860771393\, i$ $A_2 = -B_1 = 1.461676965$,
$A_3 = -B_4 = -0.02666666667$, $A_4 = -B_3 = 0.07580204816$;

4.1.5) $A_1 = -B_2 = -1.272994032$ $A_2 = -B_1 = 0.1200000000$,
$A_3 = -B_4 = -0.08384285986$, $A_4 = -B_3 = 0.02666666667 - 0.02923749910\, i$;

4.1.6) $A_1 = -B_2 = 1.032994032$ $A_2 = -B_1 = 0.1200000000$,
$A_3 = -B_4 = 0.03050952652$, $A_4 = -B_3 = 0.02666666667 - 0.02923749910\, i$;

4.1.7) $A_1 = -B_2 = -1.272994032$ $A_2 = -B_1 = 0.1200000000$,
$A_3 = -B_4 = -0.08384285986$, $A_4 = -B_3 = 0.02666666667 + 0.02923749910\, i$;

4.1.8) $A_1 = -B_2 = 1.032994032$ $A_2 = -B_1 = 0.1200000000$,
$A_3 = -B_4 = 0.03050952652$, $A_4 = -B_3 = 0.02666666667 + 0.02923749910\, i$;

где i – мнимая единица.

4.2. Вторая процедура ортогонализации

Решение системы восьми уравнений для восьми неизвестных коэффициентов A_i, B_i, $i = 1, 2, 3, 4$, состоящей из трех условий ортогональности (3.1), (3.2), (3.3), а также из условия аппроксимации

$$A_1 + A_3 + B_2 + B_4 = 0$$

и четырех дополнительних условий

$$A_2 = 0,\ A_4 = 0,\ B_1 = 0, B_3 = 0,$$

задающих значения четырех коэффициентов и обеспечивающих выполнение второго необходимого условия аппроксимации (2.6), дает восемь вариантов значений ненулевых четырех коэффициентов, в каждом из которых все коэффициенты имеют действительные значения:

4.2.1) $A_1 = -0.4542027438,\quad A_3 = -0.05736803426,$
$B_2 = 1.242145729,\quad B_4 = -0.7305749508;$

4.2.2) $A_1 = 1.056525497,\quad A_3 = -0.04522084077,$
$B_2 = -0.9528901871,\quad B_4 = -0.05841446882;$

4.2.3) $A_1 = 1.008878332,\quad A_3 = 0.06310933384,$
$B_2 = -1.061220362,\quad B_4 = -0.01076730437;$

4.2.4) $A_1 = -1.179353124,\quad A_3 = 1.591327502,$
$B_2 = -0.4065498075,\quad B_4 = -0.005424570197;$

4.2.5) $A_1 = 1.002145729,\quad A_3 = -0.7839082841,$
$B_2 = -0.2142027438,\quad B_4 = -0.004034700930;$

4.2.6) $A_1 = -1.192890187\quad A_3 = -0.1117478022,$
$B_2 = 1.296525497,\quad B_4 = 0.008112492567;$

4.2.7) $A_1 = -1.301220362,\quad A_3 = -0.06410063771,$
$B_2 = 1.248878332,\quad B_4 = 0.1164426672;$

4.2.8) $A_1 = -0.6465498075\quad A_3 = -0.05875790353,$
$B_2 = -0.9393531243,\quad B_4 = 1.644660835.$

Варианты решений 4.2.1-4.2.8 содержат восемь действительных значений коэффициентов A_i, B_i ступенчатых функций $\varphi_i(x)$, $\psi_i(x)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Функция, модифицирующая материнский сплайн Шенберга и состоящая из четырех ступенчатых функций, не является четной или нечетной, поэтому сплайн Шенберга после модификации остается действительной функцией, которая не является четной или нечетной.

Каждое решение из 4.1.1-4.1.8 содержит два комплексных значения и шесть действительных значений коэффициентов A_i, B_i ступенчатых функций $\varphi_i(x)$, $\psi_i(x)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Сплайн Шенберга после модификации становится функцией с комплексными значениями, которая представляет собой сумму четной и нечетной функций, поскольку функция, модифицирующая материнский сплайн Шенберга и состоящая из четырех ступенчатых функций, является нечетной. Следует отметить, что в четырех вариантах решений 4.1.1-4.1.8 величины действительной и мнимой частей комплексных коэффициентов почти на два порядка меньше величин максимальных значений действительных коэффициентов.

5. Исследование аппроксимативных свойств ортогональных сплайнов Шенберга

В исследовании свойств модифицированных сплайнов Шенберга при аппроксимации функций с помощью линейных комбинаций сеточных сплайнов, порожденных модифицированным материнским сплайном Шенберга, здесь рассматривается масштабированный материнский сплайн Шенберга третьей степени

$$\varphi_m^{(3)}(x) = \varphi^{(3)}(x/5) \equiv \begin{cases} 0, \ x \geq 10, \\ (2 - x/5)^3/6, \ 5 \leq x \leq 10, \\ [1 + 3(1 - x/5) + 3(1 - x/5)^2 - 3(1 - x/5)^3]/6, \ 0 \leq x \leq 5, \\ \varphi^{(3)}(-x/5), \ x \leq 0. \end{cases}$$

С учетом масштабирования материнского сплайна с конечного носителя $[-2, 2]$ на конечный носитель $[-10, 10]$ конечные носители $[a_i, b_i]$ функций φ_i также масштабируются и берутся в виде: $[1, 2]$, $[3, 4]$, $[6, 7]$, $[8, 9]$ соответственно для $i = 1, 2, 3, 4$, а конечные носители $[c_i, d_i]$ функций ψ_i – в виде: $[-2, -1]$, $[-4, -3]$, $[-7, -6]$, $[-9, -8]$ соответственно для $i = 1, 2, 3, 4$.

Теорема 5.1. *Для любой функции $u \in W_2^2(R)$ существуют такие коэффициенты $\{u_i\}$, что при $h \to 0$*

$$\left\| u(x) - \sum_{(i)} u_i \Phi_i(x) \right\|_{W_2^0} \leq C \cdot h^2 \left\| u \right\|_{W_2^2}, \quad \sum_{(i)} \left| u_i \right|^2 \leq c \left\| u \right\|_{W_2^0}^2, \tag{5.1}$$

если выполняются условия

$$A_1 + A_3 + B_2 + B_4 = 0, A_2 + A_4 + B_1 + B_3 = 0.$$

Здесь h – шаг сетки, C, c – постоянные, не зависящие от h и от $u(x)$, $\Phi_i(x)$ – сеточные сплайны, полученные масштабированием и смещением вдоль оси Ox модифицированного ступенчатыми функциями материнского сплайна Шенберга $\Phi(x)$ третьей степени, W_2^0, W_2^2 – гильбертовы пространства Соболева.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Преобразование Фурье

$$\hat{\Phi}(\xi)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(x)e^{-i\xi x}dx,$$

модифицированного ступенчатыми функциями материнского сплайна Шенберга

$$\Phi(x)=\varphi_m^{(3)}(x)+\sum_{i=1}^{4}(A_i\psi_i(x)+B_i\varphi_i(x))$$

имеет вид

$$\hat{\Phi}(\xi)=\hat{\varphi}_m^{(3)}(\xi)+\sum_{i=1}^{4}(A_i\hat{\psi}_i(\xi)+B_i\hat{\varphi}_i(\xi)).$$

Поскольку

$$(2\pi)^{1/2}\hat{\varphi}_m^{(3)}(\xi)=\frac{1}{5^3i^4\xi^4}\left(e^{-10i\xi}-4e^{-5i\xi}+6-4e^{5i\xi}+e^{10i\xi}\right)=$$

$$=\frac{1}{5^3i^4\xi^4}\left(e^{i\frac{5}{2}\xi}-e^{-i\frac{5}{2}\xi}\right)^4=5\left(\frac{\sin(\frac{5}{2}\xi)}{\frac{5}{2}\xi}\right)^4, \quad (5.2)$$

и

$$(2\pi)^{1/2}\sum_{i=1}^{4}(A_i\hat{\psi}_i(\xi)+B_i\hat{\varphi}_i(\xi))=$$

$$=A_1\frac{2}{\xi}\left(\cos\frac{3\xi}{2}\sin\frac{\xi}{2}+i\,\sin\frac{3\xi}{2}\sin\frac{\xi}{2}\right)+A_2\frac{2}{\xi}\left(\cos\frac{7\xi}{2}\sin\frac{\xi}{2}+i\,\sin\frac{7\xi}{2}\sin\frac{\xi}{2}\right)+$$

$$+A_3\frac{2}{\xi}\left(\cos\frac{13\xi}{2}sin\frac{\xi}{2}+i\,\sin\frac{13\xi}{2}\sin\frac{\xi}{2}\right)+A_4\frac{2}{\xi}\left(\cos\frac{17\xi}{2}\sin\frac{\xi}{2}+i\,\sin\frac{17\xi}{2}\sin\frac{\xi}{2}\right)+$$

$$+B_1\frac{2}{\xi}\left(\cos\frac{3\xi}{2}\sin\frac{\xi}{2}-i\,\sin\frac{3\xi}{2}\sin\frac{\xi}{2}\right)+B_2\frac{2}{\xi}\left(\cos\frac{7\xi}{2}\sin\frac{\xi}{2}-i\,\sin\frac{7\xi}{2}\sin\frac{\xi}{2}\right)+$$

$$+B_3\frac{2}{\xi}\left(\cos\frac{13\xi}{2}\sin\frac{\xi}{2}-i\,\sin\frac{13\xi}{2}\sin\frac{\xi}{2}\right)+B_4\frac{2}{\xi}\left(\cos\frac{17\xi}{2}\sin\frac{\xi}{2}-i\,\sin\frac{17\xi}{2}\sin\frac{\xi}{2}\right)=$$

$$=\frac{2}{\xi}\sin\frac{\xi}{2}\left(A_1\cos\frac{3\xi}{2}+A_3\cos\frac{13\xi}{2}+B_2\cos\frac{7\xi}{2}+B_4\cos\frac{17\xi}{2}\right)-$$

$$-i\frac{2}{\xi}\sin\frac{\xi}{2}\left(-A_1\sin\frac{3\xi}{2}-A_3\sin\frac{13\xi}{2}+B_2\sin\frac{7\xi}{2}+B_4\sin\frac{17\xi}{2}\right)+$$

$$+\frac{2}{\xi}\sin\frac{\xi}{2}\left(A_2\cos\frac{7\xi}{2}+A_4\cos\frac{17\xi}{2}+B_1\cos\frac{3\xi}{2}+B_3\cos\frac{13\xi}{2}\right)-$$

$$-i\frac{2}{\xi}\sin\frac{\xi}{2}\left(-A_2\sin\frac{7\xi}{2}-A_4\sin\frac{17\xi}{2}+B_1\sin\frac{3\xi}{2}+B_3\sin\frac{13\xi}{2}\right), \quad (5.3)$$

то

$$\hat{\Phi}(0)\neq 0, \quad (5.4)$$

так как в соответствии с (5.2)

$$\hat{\varphi}_m^{(3)}(0)=\frac{5}{(2\pi)^{1/2}}\lim_{\xi\to 0}\left(\frac{\sin(\frac{5}{2}\xi)}{\frac{5}{2}\xi}\right)^4=\frac{5}{(2\pi)^{1/2}},$$

а из (5.3) следует, что

$$\sum_{i=1}^{4}(A_i\hat{\psi}_i(\xi) + B_i\hat{\varphi}_i(\xi)\,)\Big|_{\xi=0} = 0.$$

Имеем далее

$$(2\pi)^{1/2}\frac{d}{d\xi}\hat{\varphi}_m^{(3)}\,(\xi) = 20\left(\frac{\sin(\frac{5}{2}\xi)}{\frac{5}{2}\xi}\right)^3 \frac{\xi\cos(\frac{5}{2}\xi) - \frac{2}{5}\sin(\frac{5}{2}\xi)}{\xi^2}, \tag{5.5}$$

а также

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^{1/2}\frac{d}{d\xi}\sum_{i=1}^{4}(A_i\hat{\psi}_i(\xi) + B_i\hat{\varphi}_i(\xi)\,) = \\
&\quad = 2\left(-\frac{1}{\xi^2}\sin\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2\xi}\cos\frac{\xi}{2}\right)\left[A_1\cos\frac{3\xi}{2} + A_3\cos\frac{13\xi}{2} + B_2\cos\frac{7\xi}{2} + B_4\cos\frac{17\xi}{2}\right] - \\
&\qquad - \frac{2}{\xi}\sin\frac{\xi}{2}\left(A_1\frac{3}{2}\sin\frac{3\xi}{2} + A_3\frac{13}{2}\sin\frac{13\xi}{2} + B_2\frac{7}{2}\sin\frac{7\xi}{2} + B_4\frac{17}{2}\sin\frac{17\xi}{2}\right) + \\
&\quad - 2i\left(-\frac{1}{\xi^2}\sin\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2\xi}\cos\frac{\xi}{2}\right)\left(-A_1\sin\frac{3\xi}{2} - A_3\sin\frac{13\xi}{2} + B_2\sin\frac{7\xi}{2} + B_4\sin\frac{17\xi}{2}\right) - \\
&\qquad - i\frac{2}{\xi}\sin\frac{\xi}{2}\left(-A_1\frac{3}{2}\cos\frac{3\xi}{2} - A_3\frac{13}{2}\cos\frac{13\xi}{2} + B_2\frac{7}{2}\cos\frac{7\xi}{2} + B_4\frac{17}{2}\cos\frac{17\xi}{2}\right) + \\
&\quad + 2\left(-\frac{1}{\xi^2}\sin\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2\xi}\cos\frac{\xi}{2}\right)\left[A_2\cos\frac{7\xi}{2} + A_4\cos\frac{17\xi}{2} + B_1\cos\frac{3\xi}{2} + B_3\cos\frac{13\xi}{2}\right] - \\
&\qquad - \frac{2}{\xi}\sin\frac{\xi}{2}\left(A_2\frac{7}{2}\sin\frac{7\xi}{2} + A_4\frac{17}{2}\sin\frac{17\xi}{2} + B_1\frac{3}{2}\sin\frac{3\xi}{2} + B_3\frac{13}{2}\sin\frac{13\xi}{2}\right) - \\
&\quad - 2i\left(-\frac{1}{\xi^2}\sin\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2\xi}\cos\frac{\xi}{2}\right)\left(-A_2\sin\frac{7\xi}{2} - A_4\sin\frac{17\xi}{2} + B_1\sin\frac{3\xi}{2} + B_3\sin\frac{13\xi}{2}\right) - \\
&\qquad - i\frac{2}{\xi}\sin\frac{\xi}{2}\left(-A_2\frac{7}{2}\cos\frac{7\xi}{2} - A_4\frac{17}{2}\cos\frac{17\xi}{2} + B_1\frac{3}{2}\cos\frac{3\xi}{2} + B_3\frac{13}{2}\cos\frac{13\xi}{2}\right).
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Согласно (5.5) получим

$$\frac{d}{d\xi}\hat{\varphi}_m^{(3)}\,(2\pi j) = 0 \quad \forall j : 0 \neq j \in \mathbf{Z}.$$

Из (5.6) следует, что

$$\left[\frac{d}{d\xi}\sum_{i=1}^{4}(A_i\hat{\psi}_i(\xi) + B_i\hat{\varphi}_i(\xi)\,)\right]_{\xi=2\pi j} = 0 \;\; \forall j : 0 \neq j \in \mathbf{Z}\,,$$

поскольку, во-первых, в (5.6) две суммы функций $\cos\dfrac{k\xi}{2}$, $k = 3,\, 7,\, 13,\, 17$, находящиеся в квадратных скобках для значений $\xi = 2\pi j$ имеют значения равные нулю, так как все функции $\cos\dfrac{k\xi}{2}$, $k = 3,\, 7,\, 13,\, 17$ в квадратных скобках при этом равны одновременно либо $(+1)$ или (-1) в зависимости от значения j и так как выполняются условия

$$A_1 + A_3 + B_2 + B_4 = 0, \quad A_2 + A_4 + B_1 + B_3 = 0,$$

во-вторых, поскольку для значений $\xi = 2\pi j$ равны нулю значения всех функций $\sin \dfrac{k\xi}{2}$, $k = 1,\, 3,\, 7,\, 13,\, 17$, входящие в выражение (5.6).

Поэтому

$$\frac{d}{d\xi}\hat{\Phi}\,(2\pi j) = 0 \quad \forall j : 0 \neq j \in \mathbf{Z} \tag{5.7}$$

и, следовательно, в соответствии с (5.4) и (5.7) выполняются все условия теоремы Стренга-Фикса [18] для значения параметра $p = 1$ этой теоремы, определяемого порядком производной (5.7).

Поэтому оценка погрешности аппроксимации из формулировки теоремы Стренга-Фикса [18]

$$\left\| u(x) - \sum_{(i)} u_i \Phi_i(x) \right\|_{W_2^s} \leq C \cdot h^{p+1-s} \, \|u\|_{W_2^{p+1}}\,, \qquad \sum_{(i)} |u_i|^2 \leq c\, \|u\|^2_{W_2^0}$$

принимает в рассматриваемом случае для $p = 1$, $s = 0$ вид (5.1).
Доказательство завершено.

Согласно полученной здесь оценке (5.1) аппроксимативных свойств модифицированных сплайнов Шенберга последовательность линейных комбинаций сеточных наборов ортогональных сплайнов Шенберга $\sum_i u_i \Phi_i(x)$ при стремлении величины шага сетки к нулю сходится к аппроксимируемой функции $u(x)$ с достаточно высокой скоростью, пропорциональной квадрату шага сетки.

6. Заключение

В статье с помощью процедуры ортогонализации финитных функций [6] построены, с сохранением размеров конечных носителей сплайнов, шестнадцать различных модифицированных материнских сплайнов Шенберга третьей степени. Первая группа восьми сплайнов содержит сплайны, принимающие комплексные значения, вторая группа восьми различных сплайнов состоит из сплайнов, имеющих только действительные значения.

Ортогональность сеточных наборов построенных модифицированных сплайнов Шенберга наряду со свойством их финитности, порождающим разреженность глобальных матриц сеточных уравнений, является ценнейшим свойством ортогональных сплайнов Шенберга, существенно повышающим эффективность и рациональность алгоритмов аппроксимации [6], [8] и алгоритмов вариационно-сеточных и проекционно-сеточных методов [6–7], значительно снижая для них вычислительные затраты на получение решений по сравнению с алгоритмами, в которых используются классические сплайны Шенберга или другие сплайны, не являющиеся ортогональными на сетках.

Следующая статья, которая явится продолжением данной статьи, будет содержать аналогичные результаты исследований, полученные для случая, в котором ортогонализация сплайнов Шенберга третьей степени выполняется с использованием четырех сплайнов Шенберга, имеющих конечные носители, размеры которых меньше размера конечного носителя материнского сплайна. Доказано, что порядок аппроксимации не уменьшается в результате такой ортогонализации сплайнов Шенберга.

Список литературы

1. Schoenberg I. J. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. *Quart. Appl. Math.* 1946. Vol. 4, no. 2. P. 45-99, P. 112-141.

2. Haar A. Zue Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. *Math. Ann.* 1910. Vol. 69, no. 3. P. 331-371. DOI: 10.1007/BF01456326

3. Faber G. Uber die Orthogonalfunktionen des Herrn Haar. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.* 1910. Vol. 19. P. 104-112.

4. Shauder J. Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonalsystems. *Math. Z.* 1928. Vol. 28, no. 1. P. 317-320. DOI: 10.1007/BF01181164

5. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов: Пер. с англ. – М.: Мир, 1977. – 349 с.

6. Леонтьев В. Л. Ортогональные сплайны и специальные функции в методах вычислительной механики и математики. – СПб: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2021. – 465 с. DOI: 10.18720/SPBPU/2/i21-120

7. Леонтьев В. Л. Об ортогональных финитных функциях и о численных методах, связанных с их применением // *Обозрение прикладной и промышленной математики.* 2002. Т. 9, № 3. С. 497-504.

8. Леонтьев В. Л., Михайлов И. С. О построении потенциала взаимодействия атомов, основанном на ортогональных финитных функциях // *Нано- и микросистемная техника.* 2011. Т. 9, № 134. С. 48-50.

9. I. J.Schoenberg Spline Functions and the problem of Graduation. *Proceedings of the National Academy of Sciences of USA.* 1964. Vol. 52, no. 4. P. 947-950. DOI: 10.1073/pnas.52.4.947

10. Алексеев В. Г., Суходоев В. А. Полиномиальные B-сплайны Шенберга нечетных степеней. Краткий обзор применений //*Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2012. Т. 52, № 10. С. 1756-1767. DOI: 10.1134/S096554251

11. Алексеев В. Г. B-сплайны Шенберга и их применения в радиотехнике и в смежных с ней областях // *Радиотехника.* 2003. Т. 12, № 12. С. 21-23.

12. Kushpel A., Tas K. On the problem of Schoenberg on R^n. *Journal of Mathematical Analysis.* 2024. Vol. 15, No. 6. P. 71-81. DOI: 10.54379/jma-2024-6-6

13. Светов И. Е. Использование B-сплайнов при численном решении задачи векторной 2-D томографии // Методы сплайн-функций. Российская конференция, посвященная 80-летию со дня рождения Ю. С. Завьялова. (Новосибирск, 31.01.2011-02.02.2011). Новосибирск: ИМ СО РАН, 2011. С. 81-82.

14. Волков Ю. С., Стрелкова Е. В., Шевалдин В. Т. О локальной аппроксимации кубическими сплайнами // Методы сплайн-функций. Российская конференция, посвященная 80-летию со дня рождения Ю. С. Завьялова. (Новосибирск, 31.01.2011-02.02.2011). Новосибирск: ИМ СО РАН, 2011. С. 35-36.

15. Volkov Yu. S., Subbotin Yu. N. Fifty years to Schoenberg's problem on the convergence of spline interpolation. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN.* 2014. Vol. 20, no. 1. P. 52–67. DOI: 10.1134/S0081543815020236

16. K. Jetter, S. D. Riemenschneider, N. Sivakumar Schoenberg's exponential Euler spline curves. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics.* 1991. Vol. 118, no. 1-2. P. 21–33. DOI: 10.1017/S0308210500028869

17. T. Briand, P. Monasse Theory and Practice of Image B-Spline Interpolation. *Image Processing On Line.* 2018. Vol. 8. P. 99-141. DOI: 10.5201 /ipol.2018.221

18. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. – М.: Наука, 1981. – 416 с.

Поступила 22.02.2025; доработана после рецензирования 25.04.2025; принята к публикации 28.05.2025

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

References

1. I. J. Schoenberg, "Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions, Part A and B", *Quart. Appl. Math.*, **4**:2 (1946), 45–99, 112–141.

2. A. Haar, "Zue Theorie der orthogonalen Funktionensysteme", *Math. Ann.*, **69**:3 (1910), 331–371. DOI: 10.1007/BF01456326

3. G. Faber, "Uber die Orthogonalfunktionen des Herrn Haar", *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **19** (1910), 104–112.

4. J. Shauder, "Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonalsystems", *Math. Z.*, **28**:1 (1928), 317–320. DOI: 10.1007/BF01181164

5. G. Strang, G. Fix, *An analysis of the finite element method*, Prentice-Hale. Prestice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1973 (In Russ.), 306 p.

6. V. L. Leontiev, *Orthogonal splines and special functions in methods of computational mechanics and mathematics*, POLITEH-PRESS, SpB, 2021 DOI: 10.18720/SPBPU/2/i21-120 (In Russ.), 466 p.

7. V. L. Leontiev, "Ob ortogonalnih finitnih funkciah i o chislennih metodah, sviazannih s ih primeneniem", *Obozrenie prikladnoy i promishlennoy matematiki*, **9**:3 (2002), 497-504 (In Russ.).

8. V. L. Leontiev, I. S. Milhaylov, "About the building the potential of the atomic interaction based on orthogonal finite functions", *Nano- and microsystems technology*, **9**:134 (2011), 48–50 (In Russ.).

9. I. J. Schoenberg, "Spline Functions and the problem of Graduation", *Proceedings of the National Academy of Sciences of USA*, **52**:4 (October 1964), 947–950. DOI: 10.1073/pnas.52.4.947

10. V. G. Alekseev, V. A. Suhodoev, "Schoenberg's polynomial B-splines of odd degrees: A brief review of application", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **52**:10 (2012), 1331–1341. DOI: 10.1134/S096554251

11. V. G. Alekseev, "B-splyni Schoenberg i ih primenenia v radiotehnike i v smegnih s ney disciplinah", *Radiotehnika*, **12** (2003), 21–23 (In Russ.).

12. A. Kushpel, K. Tas, "On the problem of Schoenberg on R^{n}", *Journal of Mathematical Analysis*, **15**:6 (2024), 71–81. DOI: 10.54379/jma-2024-6-6

13. I. E. Svetov, "Ispolzovanie B-splynov pri chislennom reshenii zadachi vektornoy 2-D tomografii", *Metodi spline-funkciy.*, Rossiyskaya konferencia, posviashennia 80-letiu Yu. S. Zavialova (31.01.2011–02.02.2011, Novosibirsk), Institut matematiki im. S. L. Soboleva Sibirskogo otd. RAN, 2011, 81–82 (In Russ.).

14. Yu. S. Volkov, E. V. Strelkova, V. T. Shevaldin, "O lokalnoy approksimacii kubicheskimi splynami", *Metodi spline-funkciy*, Rossiyskaya konferencia, posviashennia 80-letiu Yu. S. Zavialova (31.01.2011–02.02.2011, Novosibirsk), Institut matematiki im. S. L. Soboleva Sibirskogo otd. RAN, 2011, 35–36 (In Russ.).

15. Yu. S. Volkov, Yu. N. Subbotin, "Fifty years of Schoenberg's problem on the convergence of spline interpolation", *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, **20**:1 (2014), 52–67. DOI: 10.1134/S0081543815020236

16. K. Jetter, S. D. Riemenschneider, N. Sivakumar, "Schoenberg's exponential Euler spline curves", *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, **118**:1–2 (1991), 21–33. DOI: 10.1017/S0308210500028869

17. T. Briand, P. Monasse, "Theory and Practice of Image B-Spline Interpolation", *Image Processing On Line*, **8** (2018), 99–141. DOI: 10.5201/ipol.2018.221

18. G. I. Marchuk, V. I. Agoshkov, *Vvedenie v proektsionno-setochnye metody*, Nauka, M., 1981 (In Russ.), 416 p.

Submitted 22.02.2025; Revised 25.04.2025; Accepted 28.05.2025

The author have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The author declare no conflict of interest.