DOI 10.15507/2079-6900.27.202501.69-80
Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 512.64

О подобии над кольцом целых чисел верхних треугольных нильпотентных матриц 4-го и 5-го порядков обобщённой жордановой клетке

С. В. Сидоров, Г. В. Уткин

ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

Аннотация. В работе ставится вопрос о том, при каких условиях верхняя треугольная нильпотентная матрица подобна над кольцом целых чисел обобщённой жордановой клетке, т. е. матрице, в которой ненулевыми являются элементы только первой наддиагонали. Получены необходимые и достаточные условия подобия обобщённой жордановой клетке для следующих классов матриц: для матриц четвёртого порядка ранга 3 с ненулевыми элементами первой наддиагонали; для матриц пятого порядка ранга 4 и некоторыми дополнительными ограничениями на элементы первой наддиагонали. Эти условия сформулированы в простых терминах делимости и наибольших общих делителей матричных элементов. Доказано, что если в матрице первый и последний элементы первой наддиагонали взаимно просты, а произведение остальных элементов этой наддиагонали равно 1, то эта матрица подобна обобщённой жордановой клетке. Для получения критерия подобия используется следующий факт: если две нильпотентные верхние треугольные матрицы порядка n и ранга $n-1$ подобны над кольцом целых чисел, то среди трансформирующих матриц существует треугольная матрица. Этот факт сводит задачу распознавания подобия к решению в целых числах системы линейных уравнений. Основным инструментом для получения результатов в статье является критерий совместности в целых числах системы линейных уравнений.

Ключевые слова: подобие матриц, обобщённая жорданова клетка, кольцо целых чисел, нильпотентная матрица, верхняя треугольная матрица

Для цитирования: Сидоров С. В., Уткин Г. В. О подобии над кольцом целых чисел верхних треугольных нильпотентных матриц 4-го и 5-го порядков обобщённой жордановой клетке // Журнал Средневолжского математического общества. 2025. Т. 27, № 1. С. 69–80. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202501.69-80

Об авторах:

Сидоров Сергей Владимирович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (603022, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2883-6427, sesidorov@yandex.ru

Уткин Герман Владимирович, лаборант-исследователь, исследовательский центр в сфере искусственного интеллекта, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (603022, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4794-2591, german.utkingu@gmail.com

Original article

MSC2020 15A04, 15A18, 15A21, 15B36

On the Similarity of Upper Triangular Nilpotent Matrices of the 4th and the 5th Orders to a Generalized Jordan Block over the Ring of Integers

S. V. Sidorov, G. V. Utkin

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

Abstract. In this paper conditions for similarity of an upper triangular nilpotent matrix and a generalized Jordan block (i. e. a matrix where only the elements of the first superdiagonal are non-zero) are considered. The problem is solved over the ring of integers. Necessary and sufficient conditions for similarity to a generalized Jordan block are obtained for the following classes of matrices: the fourth-order matrices of rank 3 with nonzero elements of the first superdiagonal; the fifth-order matrices of rank 4 and some additional restrictions on the elements of the first superdiagonal. These conditions are formulated in simple terms of divisibility and greatest common divisors of matrix elements. It is proved that if the first and last elements of the first superdiagonal are coprime, and the product of the remaining elements of this superdiagonal is equal to 1, then this matrix is similar to a generalized Jordan block. To obtain the similarity criterion, the following statement is used: if two nilpotent upper triangular matrices of order n and rank $n-1$ are similar over the ring of integers, then among the transforming matrices there is a triangular matrix. This statement reduces the problem of recognizing similarity to solving a system of linear equations in integers. The main tool for obtaining the results in the article is the criterion of consistency of a system of linear equations over the ring of integers.

Keywords: similarity of matrices, generalized Jordan block, ring of integers, nilpotent matrix, upper triangular matrix

For citation: *S. V. Sidorov, G. V. Utkin.* On the Similarity of Upper Triangular Nilpotent Matrices of the 4th and the 5th Orders to a Generalized Jordan Block over the Ring of Integers. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 27:1(2025), 69–80. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202501.69-80

About the authors:

Sergey V. Sidorov, Ph. D. in Phys. and Math., Associate Professor, Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Gagarina Av., Nizhny Novgorod 603022, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2883-6427, sesidorov@yandex.ru

German V. Utkin, Laboratory Researcher, Artificial Intelligence Research Center, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Gagarina Av., Nizhny Novgorod 603022, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4794-2591, german.utkingu@gmail.com

1. Введение

Из линейной алгебры хорошо известно (см., например, [1]), что любая нильпотентная матрица A порядка n ранга $n-1$ подобна над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ жордановой клетке J_n

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Это означает, что $AX = XJ_n$ для некоторой матрицы $X \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Q})$.

Понятие подобия матриц над $\mathbb{Q}$ естественным образом переносится на кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$. Через $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$, как обычно, обозначается множество обратимых над $\mathbb{Z}$ целочисленных матриц порядка n. Другими словами, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ — это множество всех унимодулярных матриц порядка n, т. е. целочисленных матриц, определитель которых равен 1 или -1.

Определение 1.1. *Будем говорить, что матрица $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ подобна матрице $B \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$, если существует такая матрица $X \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$, что $AX = XB$. При этом матрица X называется трансформирующей матрицей.*

Отметим, что задача классификации целочисленных матриц относительно подобия над $\mathbb{Z}$ находит приложение в топологии (см., например, [2, 3, 4]).

Если матрица A подобна над $\mathbb{Z}$ матрице B, то будем обозначать это через $A \sim B$.

Над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ упомянутый выше факт подобия жордановой клетке J_n перестаёт быть верным уже для $n = 2$ (см., например, [5, 6, 7, 8]). К примеру, любая матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, подобна над $\mathbb{Q}$ матрице J_2. Но над $\mathbb{Z}$ такая матрица A подобна жордановой клетке J_2 тогда и только тогда, когда $a \in \{1, -1\}$.

Обобщённой жордановой клеткой назовём целочисленную матрицу вида

$$\mathrm{superdiag}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

где $a_i \neq 0$, $(i = 1, 2, \dots, n-1)$. Это название обусловлено тем, что обычная жорданова клетка $J_n = \mathrm{superdiag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n-1})$.

Возникает естественный вопрос: любая ли целочисленная нильпотентная матрица порядка n ранга $n-1$ подобна над $\mathbb{Z}$ обобщённой жордановой клетке (1.2)? Ответ на него отрицательный для $n \geq 3$. Действительно, пусть $\text{НОД}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) > 1$. Рассмотрим матрицу A, полученную из матрицы вида (1.2) заменой хотя бы одного 0 выше диагонали на 1. Тогда легко видеть, что A не подобна $\mathrm{superdiag}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ над $\mathbb{Z}$.

Известно (см. [7, 9, 10]), что если все собственные числа матрицы $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ лежат в $\mathbb{Z}$, то A подобна над $\mathbb{Z}$ верхней треугольной матрице с собственными числами на диагонали. Поскольку у нильпотентных матриц все собственные числа нулевые, то, без ограничения общности, будем рассматривать верхние треугольные нильпотентные матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & 0 & a_{2,3} & a_{2,4} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{3,4} & \dots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2,n-1} & a_{n-2,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

где $a_{i,i+1} \neq 0$, $(i = 1, 2, \dots, n-1)$. Хотелось бы получить критерий подобия таких матриц обобщённой жордановой клетке.

Такая попытка была сделана в [11] для матриц вида (1.3) с двумя ненулевыми супердиагоналями, т. е. при дополнительных ограничениях $a_{i,j} = 0$, $j \geq i+3$. В [11] был получен ряд необходимых условий подобия над $\mathbb{Z}$ для таких матриц обобщённой жордановой клетке. Эти условия сформулированы в простых терминах делимости и наибольших общих делителей элементов матриц.

Кроме того, при $n = 3$ и $n = 4$ в [11] были получены критерии подобия. В частности, в [11] доказано, что матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $a_1, a_2 \neq 0$, подобны над $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда $b_1 \,\vdots\, \text{НОД}(a_1, a_2)$.

Заметим, что из доказательств теорем о канонических матрицах классов подобия для $n = 3$ в работах [5, 6] можно вывести тот же результат.

Также в [11] был получен следующий критерий подобия для $n = 4$.

Теорема 1.1 (см. [11]). *Пусть*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $a_1, a_2, a_3 \neq 0$, $d = \text{НОД}(a_1, a_2, a_3)$. *Тогда*

$$A \sim B \iff \begin{array}{l} \text{1. } b_1 \text{ делится на } d,\ b_2 \text{ делится на } d. \\ \text{2. } b_1 b_2 \text{ делится на } (d \cdot \text{НОД}(a_1, a_3)). \\ \text{3. } (a_1 b_2 + b_1 a_3) \text{ делится на } d a_2. \end{array}$$

В данной статье мы обобщаем эту теорему на произвольные верхние треугольные нильпотентные матрицы 4-го порядка ранга 3, а также обобщаем результат из [12] в случае $n = 5$ при некоторых дополнительных ограничениях.

Ещё одной из причин, по которой представляет интерес получение критерия подобия над $\mathbb{Z}$ матриц вида (1.3) и (1.2), является следующее обстоятельство. Если $a_{1,2} = a_{2,3} = \ldots = a_{n-1,n} = 1$, то матрица вида (1.3) подобна над $\mathbb{Z}$ жордановой клетке J_n при любых

$a_{i,j} \in \mathbb{Z}$, $j \geq i+2$ (см. критерий подобия жордановой клетке в [13]). Оказывается, что есть и другие значения $a_{1,2}, a_{2,3}, \ldots, a_{n-1,n}$ такие, что матрица вида (1.3) подобна над $\mathbb{Z}$ обобщённой жордановой клетке $\mathrm{superdiag}(a_{1,2}, a_{2,3}, \ldots, a_{n-1,n})$ при любых $a_{i,j} \in \mathbb{Z}$, $j \geq i+2$ (см. Следствие 2.3 и Следствие 3.2 ниже).

Отметим два важных момента. Пусть $A = (a_{i,j})$ и $B = (b_{i,j})$ — две нильпотентные верхние треугольные матрицы порядка n, причём все элементы их первых супердиагоналей отличны от 0 (т. е. $a_{i,i+1} \neq 0, b_{i,i+1} \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$). Если $A \sim B$, то

1. $a_{i,i+1} = \pm b_{i,i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ (Лемма 2.1 из [11]). Отсюда легко вывести, что если $A \sim \mathrm{superdiag}(\pm a_{1,2}, \pm a_{2,3}, \ldots, \pm a_{n-1,n})$, то $A \sim \mathrm{superdiag}(a_{1,2}, a_{2,3}, \ldots, a_{n-1,n})$ (Лемма 3.1 из [11]).

2. (см. [11, 14]) если $a_{i,i+1} = b_{i,i+1}$, $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, то существует унитреугольная трансформирующая матрица X (т. е. $AX = XB$ и X — верхняя треугольная матрица с единичной диагональю):

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \ldots & x_1^{(n-2)} & x_1^{(n-1)} \\ 0 & 1 & x_2^{(1)} & \ddots & x_2^{(n-3)} & x_2^{(n-2)} \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & x_3^{(n-4)} & x_3^{(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & x_{n-1}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

(здесь $x_i^{(j)}$ — i-й элемент j-й супердиагонали (наддиагонали), т. е. в стандартных обозначениях $x_i^{(j)} = x_{i,i+j}$).

Следовательно, для получения критерия подобия над $\mathbb{Z}$ матриц вида (1.3) и (1.2) мы можем сразу рассматривать матрицы с одинаковыми первыми супердиагоналями:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_{1,3} & \ldots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & 0 & a_2 & \ldots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-2,n} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

где $a_i \neq 0$, $(i = 1, \ldots, n-1)$.

Так как унитреугольная матрица X вида (1.4) автоматически лежит в $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$, то для матриц A и B вида (1.5) условие $A \sim B$ равносильно совместности в целых числах системы линейных уравнений $AX = XB$. Легко видеть, что если X — унитреугольная матрица, то система $AX = XB$ содержит $(n-2) + (n-3) + \ldots + 2 + 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ уравнений и $(n-1) + (n-2) + \ldots + 2 = \frac{n(n-1)-2}{2}$ неизвестных ($x_1^{(n-1)}$ входит с нулевым коэффициентом). В частности, для $n = 4$ имеем 3 уравнения и 5 неизвестных, а для $n = 5$ — 6 уравнений и 9 неизвестных.

Основным инструментом для получения результатов настоящей статьи является следующий критерий совместности в целых числах системы линейных уравнений.

Т е о р е м а 1.2. *(критерий совместности в целых числах системы линейных уравнений, см.* [15, с. 51]*). Пусть $P \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ — матрица ранга m и $b \in \mathbb{Z}^m$. Тогда система $Px = b$ имеет целочисленные решения тогда и только тогда, когда все миноры порядка m расширенной матрицы (P, b) делятся на наибольший общий делитель $\Delta_m(P)$ всех миноров порядка m матрицы P.*

2. Случай матриц 4-го порядка

В этом разделе мы получим критерий подобия над кольцом целых чисел нильпотентных матриц следующего вида:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{superdiag}(a_1, a_2, a_3), \qquad (2.1)$$

где $a_i \neq 0$, $(i = 1, 2, 3)$.

Как уже было отмечено выше, если матрицы A и B вида (2.1) подобны над $\mathbb{Z}$, то существует унитреугольная трансформирующая матрица

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (2.2)$$

В следующей теореме устанавливается критерий подобия над $\mathbb{Z}$ матриц вида (2.1) при условии, что НОД$(a_1, a_2, a_3) = 1$.

Т е о р е м а 2.1. *Рассмотрим матрицы вида (2.1). Пусть $a_1, a_2, a_3 \neq 0$ и НОД$(a_1, a_2, a_3) = 1$. Тогда $A \sim B$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1. *$(a_1b_2 + a_3b_1)$ делится на a_2.*
2. *$(b_1b_2 - a_2c_1)$ делится на НОД(a_1, a_3).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку трансформирующая матрица X имеет вид (2.2), то условие $AX = XB$ равносильно системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} b_1 + a_1x_2 = a_2x_1, \\ b_2 + a_2x_3 = a_3x_2, \\ c_1 + b_1x_3 + a_1y_2 = a_3y_1. \end{cases}$$

Выпишем матрицу этой системы:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & y_1 & y_2 & \\ \hline a_2 & -a_1 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_3 & -a_2 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & -b_1 & a_3 & -a_1 & c_1 \end{array}\right).$$

Выясним, при каких условиях эта система имеет целочисленное решение. Ранг основной матрицы этой системы равен 3, поскольку один из её миноров 3-го порядка равен $a_1a_2a_3 \neq 0$. Следовательно, согласно Теореме 1.2 данная система совместна над $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда все миноры 3-го порядка её расширенной матрицы делятся на Δ_3 — НОД миноров основной матрицы системы. Имеем

$$\Delta_3 = \text{НОД}(-a_2a_3b_1, a_2a_3a_3, -a_1a_2a_3, -a_2a_2a_3, a_1a_2a_2, a_1a_2a_3, -a_1a_1a_2) =$$

$$= a_2 \cdot \text{НОД}(a_3b_1, a_3a_3, a_1a_3, a_2a_3, a_1a_2, a_1a_1) =$$

$$= a_2 \cdot \text{НОД}(a_3 \cdot \text{НОД}(b_1, a_1, a_2, a_3), a_1a_2, a_1a_1) =$$

$$= a_2 \cdot \text{НОД}(a_3, a_1 \cdot \text{НОД}(a_1, a_2)) = a_2 \cdot \text{НОД}(a_1, a_3).$$

Действительно, так как по условию теоремы $\text{НОД}(a_1, a_2, a_3) = 1$, то, во-первых, $\text{НОД}(b_1, a_1, a_2, a_3) = 1$, а, во-вторых, числа a_3 и $\text{НОД}(a_1, a_2)$ взаимно простые, следовательно, $\text{НОД}(a_3, a_1 \cdot \text{НОД}(a_1, a_2)) = \text{НОД}(a_1, a_3)$.

Выпишем миноры 3-го порядка расширенной матрицы, отличные от миноров основной матрицы:

$$M_1 = a_2a_3c_1,\ M_2 = a_2(b_1b_2 - a_2c_1),\ M_3 = -a_2a_3b_2,\ M_4 = a_1a_2b_2,$$

$$M_5 = -b_1(a_3b_1 + a_1b_2) + a_1a_2c_1,\ M_6 = a_3(a_3b_1 + a_1b_2),$$

$$M_7 = -a_1(a_3b_1 + a_1b_2),\ M_8 = -a_2a_3b_1,\ M_9 = a_1a_2b_1.$$

Заметим, что миноры M_1, M_3, M_4, M_8, M_9 заведомо делятся на $\Delta_3 = a_2 \cdot \text{НОД}(a_1, a_3)$. Минор M_2 делится на Δ_3 тогда и только тогда, когда $(b_1b_2 - a_2c_1) \vdots \text{НОД}(a_1, a_3)$. Обозначив $s = a_3b_1 + a_1b_2$, имеем $M_5 = -b_1s + a_1a_2c_1, M_6 = a_3s, M_7 = -a_1s$. Поскольку $a_1a_2 \vdots \Delta_3$, то M_5, M_6, M_7 кратны Δ_3 тогда и только тогда, когда $b_1s, a_3s, a_1s \vdots \Delta_3$, что в свою очередь равносильно условию:

$$\text{НОД}(a_1s, a_3s, b_1s) = s \cdot \text{НОД}(a_1, a_3, b_1) \vdots (a_2 \cdot \text{НОД}(a_1, a_3)).$$

Это означает, что

$$s \text{ делится на } a_2 \cdot \frac{\text{НОД}(a_1, a_3)}{\text{НОД}(a_1, a_3, b_1)}. \tag{2.3}$$

Поскольку $\text{НОД}(a_1, a_2, a_3) = 1$, то сомножители a_2 и $\frac{\text{НОД}(a_1,a_3)}{\text{НОД}(a_1,a_3,b_1)}$ взаимно простые. Следовательно, свойство (2.3) равносильно тому, что $s = (a_3b_1 + a_1b_2) \vdots a_2$. Доказательство завершено.

Отметим, что доказанная Теорема 2.1 (для произвольного $c_1 \in \mathbb{Z}$) является обобщением Теоремы 4.2 из [11] (в ней $c_1 = 0$).

Следствие 2.1. *Рассмотрим матрицы вида (2.1). Пусть $a_1, a_2, a_3 \neq 0$ и $d = НОД(a_1, a_2, a_3)$. Тогда $A \sim B$ тогда и только тогда, когда*

1. *b_1, b_2, c_1 делятся на d.*
2. *$(b_1b_2 - a_2c_1)$ делится на $d \cdot НОД(a_1, a_3)$.*

3. $(a_1b_2 + a_3b_1)$ *делится на* da_2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $d = \text{НОД}(a_1, a_2, a_3)$. Условие $A \sim B$ равносильно тому, что $c_1, b_1, b_2 \,\vdots\, d$ и $\frac{1}{d}A \sim \frac{1}{d}B$. Поскольку матрицы $\frac{1}{d}A$ и $\frac{1}{d}B$ удовлетворяют условиям Теоремы 2.1, то $\frac{1}{d}A \sim \frac{1}{d}B$ тогда и только тогда, когда

$$\left(\frac{a_1}{d}\frac{b_2}{d} + \frac{a_3}{d}\frac{b_1}{d}\right) \vdots \frac{a_2}{d} \text{ и } \left(\frac{b_1}{d}\frac{b_2}{d} - \frac{a_2}{d}\frac{c_1}{d}\right) \vdots \, \text{НОД}\left(\frac{a_1}{d}, \frac{a_3}{d}\right).$$

Это равносильно тому, что $(a_1b_2 + a_3b_1) \,\vdots\, da_2$ и $(b_1b_2 - a_2c_1) \,\vdots\, (d \cdot \text{НОД}(a_1, a_3))$. С учётом условий $c_1, b_1, b_2 \,\vdots\, d$ получаем требуемое.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

С л е д с т в и е 2.2. *Рассмотрим матрицы вида (2.1). Пусть* $a_1, a_2, a_3 \neq 0$ *и НОД*$(a_1, a_3) = 1$. *Тогда* $A \sim B$ *тогда и только тогда, когда* $(a_1b_2 + a_3b_1) \,\vdots\, a_2$.

С л е д с т в и е 2.3. *Рассмотрим матрицы вида (2.1). Если НОД*$(a_1, a_3) = 1$ *и* $a_2 \in \{1, -1\}$, *то* $A \sim B$ *для любых* $b_1, b_2, c_1 \in \mathbb{Z}$.

3. Случай матриц 5-го порядка

Здесь рассматриваем матрицы следующего вида

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

где $a_i \neq 0$, $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Как уже было отмечено выше, если матрицы A и B вида (3.1) подобны над $\mathbb{Z}$, то существует унитреугольная трансформирующая матрица

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 & w_1 \\ 0 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

В следующей теореме устанавливается критерий подобия над $\mathbb{Z}$ матриц вида (3.1) при некоторых дополнительных ограничениях.

Т е о р е м а 3.1. *Рассмотрим матрицы вида (3.1). Пусть НОД*$(a_1, a_4) = 1$ *и НОД*$(a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4) = 1$. *Тогда* $A \sim B$ *тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1. $(a_1b_2 + a_3b_1)$ *делится на* a_2.

2. $(a_2b_3 + a_4b_2)$ *делится на* a_3.

3. $(a_1a_2b_3 + a_1a_4b_2 + a_3a_4b_1)$ *делится на* a_2a_3.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку трансформирующая матрица имеет вид (3.2), то условие $AX = XB$ равносильно системе линейных уравнений. Выпишем матрицу системы $AX = XB$:

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y_1 & y_2 & y_3 & z_1 & z_2 & \\
\hline
a_2 & -a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\
0 & a_3 & -a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 \\
0 & 0 & a_4 & -a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 \\
\hline
0 & 0 & -b_1 & 0 & a_3 & -a_1 & 0 & 0 & 0 & c_1 \\
0 & 0 & 0 & -b_2 & 0 & a_4 & -a_2 & 0 & 0 & c_2 \\
\hline
0 & 0 & 0 & -c_1 & 0 & 0 & -b_1 & a_4 & -a_1 & d_1
\end{array}\right)$$

и выясним, при каких условиях эта система имеет целочисленное решение. Система $AX = XB$ состоит из трех подсистем.

Третья подсистема, состоящая из одного уравнения $a_4z_1 - a_1z_2 = b_1y_3 + c_1x_4 + d_1$, имеет целочисленные решения z_1, z_2 при любой правой части, так как НОД$(a_1, a_4) = 1$.

Вторая подсистема

$$\begin{cases} a_3y_1 - a_1y_2 = b_1x_3 + c_1 \\ a_4y_2 - a_2y_3 = b_2x_4 + c_2 \end{cases}$$

совместна в целых числах относительно y_1, y_2, y_3 при любых правых частях по Теореме 1.2, так как наибольший общий делитель миноров второго порядка её основной матрицы

$$\begin{pmatrix} a_3 & -a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & -a_2 \end{pmatrix}$$

равен НОД$(a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4) = 1$.

Осталось выяснить, когда первая подсистема

$$\begin{cases} a_2x_1 - a_1x_2 = b_1 \\ a_3x_2 - a_2x_3 = b_2 \\ a_4x_3 - a_3x_4 = b_3 \end{cases} \tag{3.3}$$

имеет целочисленные решения. Наибольший общий делитель миноров третьего порядка её основной матрицы

$$\begin{pmatrix} a_2 & -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & -a_3 \end{pmatrix}$$

равен

$$\Delta_3 = \text{НОД}(a_1a_2a_3, a_2a_2a_3, a_2a_3a_3, a_2a_3a_4) = a_2a_3\text{НОД}(a_1, a_2, a_3, a_4).$$

Поскольку по условию теоремы НОД$(a_1, a_4) = 1$, то НОД$(a_1, a_2, a_3, a_4) = 1$, поэтому $\Delta_3 = a_2a_3$.

Согласно Теореме 1.2 подсистема (3.3) совместна над $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда все миноры 3-го порядка её расширенной матрицы делятся на $\Delta_3 = a_2a_3$. Выпишем те из них, которые отличны от миноров основной матрицы (миноры 3-го порядка основной матрицы автоматически делятся на Δ_3):

$$M_1 = a_2a_3b_3,\ M_2 = -a_2(a_2b_3 + a_4b_2),\ M_3 = a_2a_3b_2,$$

$$M_4 = a_1a_2b_3 + a_1a_4b_2 + a_3a_4b_1,\ M_5 = -a_3(a_1b_2 + a_3b_1),\ M_6 = a_2a_3b_1.$$

Миноры M_1, M_3, M_6 заведомо делятся на $\Delta_3 = a_2a_3$. Минор M_2 делится на $\Delta_3 = a_2a_3$ тогда и только тогда, когда $(a_2b_3+a_4b_2)\,\vdots\, a_3$. Минор M_5 делится на $\Delta_3 = a_2a_3$ тогда и только тогда, когда $(a_1b_2 + a_3b_1)\,\vdots\, a_2$. Наконец, минор M_4 делится на $\Delta_3 = a_2a_3$ тогда и только тогда, когда $(a_1a_2b_3 + a_1a_4b_2 + a_3a_4b_1)\,\vdots\, a_2a_3$.
Доказательство завершено.

Оказывается, что если НОД$(b_2, a_2a_3) = 1$, то третье условие в предыдущей теореме вытекает из первых двух.

Следствие 3.1. *Рассмотрим матрицы вида (3.1). Пусть НОД$(a_1, a_4) = 1$, НОД$(a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4) = 1$, НОД$(b_2, a_2a_3) = 1$. Тогда $A \sim B$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1. *$(a_1b_2 + a_3b_1)$ делится на a_2.*
2. *$(a_2b_3 + a_4b_2)$ делится на a_3.*

Доказательство. Пусть

$$f = a_1b_2 + a_3b_1,\ g = a_2b_3 + a_4b_2,\ h = a_1a_2b_3 + a_1a_4b_2 + a_3a_4b_1.$$

Теорема 3.1 говорит о том, что $A \sim B$ тогда и только тогда, когда $f\,\vdots\, a_2, g\,\vdots\, a_3$, то $h\,\vdots\, a_2a_3$. Заметим, что $fg = (a_1b_2 + a_3b_1)(a_2b_3 + a_4b_2) = b_2h + a_2a_3b_1b_3$, поэтому если $f\,\vdots\, a_2, g\,\vdots\, a_3$, то $b_2h\,\vdots\, a_2a_3$. Стало быть, если НОД$(b_2, a_2a_3) = 1$, то $h\,\vdots\, a_2a_3$.
Доказательство завершено.

Следствие 3.2. *Рассмотрим матрицы вида (3.1). Если НОД$(a_1, a_4) = 1$ и $a_2a_3 = 1$, то $A \sim B$ для любых $b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, d_1 \in \mathbb{Z}$.*

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего».

Список литературы

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М. Наука, 1988. С. 552.
2. Сидоров С. В., Чилина Е. Е. О негиперболических алгебраических автоморфизмах двумерного тора // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 3. С. 295–307. DOI: 10.15507/2079.6900.23.202103.295-307
3. Gorbatsevich V. V. Compact solvmanifolds of dimension at most 4 // Siberian Mathematical Journal. 2009. Vol. 50, no. 2. pp. 239–252.
4. Lerman L. M., Trifonov K. N. Symplectic partially hyperbolic automorphisms of 6-torus // Journal of Geometry and Physics, 2024. Vol. 195, 105038. DOI: 10.1016/j.geomphys.2023.105038

5. Appelgate H., Onishi H. The Similarity Problem for 3×3 Integer Matrices // Linear Algebra Appl. 1982. Vol. 42, no. 2. pp. 159–174. DOI: 10.2307/2043695

6. Сидоров С. В. О подобии матриц третьего порядка над кольцом целых чисел, имеющих приводимый характеристический многочлен // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2009. № 1. С. 119–127.

7. Сидоров С. В. Выделение эффективно разрешимых классов в задаче подобия матриц над кольцом целых чисел : дис. … канд. физ.-мат. наук. Н. Новгород, 2015. 121 с.

8. Шевченко В. Н., Сидоров С. В. О подобии матриц второго порядка над кольцом целых чисел // Известия высших учебных заведений. Математика. 2006. Т. 50, № 4. С. 56–63.

9. Newman M. Integral matrices. NY-London: Academic Press, 1972. 223 p.

10. Сидоров С. В. О подобии матриц с целочисленным спектром над кольцом целых чисел // Известия высших учебных заведений. Математика. 2011. № 3. С. 86–94.

11. Сидоров С В., Уткин Г. В. О подобии над кольцом целых чисел некоторых нильпотентных матриц максимального ранга // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, №4. С. 284–298. DOI: 10.15507/2079-6900.25.202304.284-298

12. Уткин Г. В. Критерий подобия над кольцом целых чисел некоторых нильпотентных матриц пятого порядка // Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии: Труды XXIII Международной конференции, Нижний Новгород, 13–16 ноября 2023 года. Нижний Новгород: Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского. 2023. С. 154-157.

13. Сидоров С. В. О подобии некоторых целочисленных матриц с единственным собственным значением над кольцом целых чисел // Матем. заметки. 2019. Т. 105, № 5. С. 763–770. DOI: 10.4213/mzm11859

14. Husert D. Similarity of integer matrices: PhD Thesis. Paderborn, 2017. 147 p.

15. Schrijver A. Theory of linear and integer programming. Wiley, 1998. 464 p.

Поступила 02.10.2024; доработана после рецензирования 03.12.2024; принята к публикации 26.01.2025

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, M. Nauka, 1988 (In Russ.), 552 p.

2. S. V. Sidorov, E. E. Chilina, “On non-hyperbolic algebraic automorphisms of a two-dimensional torus”, *Zhurnal SVMO*, **23**:3 (2021), 295–307. DOI: 10.15507/2079.6900.23.202103.295-307 (In Russ.).

3. V. V. Gorbatsevich, “Compact solvmanifolds of dimension at most ≤ 4”, *Sib. Math. J*, **50**:2 (2009), 239–252.

4. L. M. Lerman, K. N. Trifonov, “Symplectic partially hyperbolic automorphisms of 6-torus”, *Journal of Geometry and Physics*, **195** (2024), 105038. DOI: 10.1016/j.geomphys.2023.105038.

5. H. Appelgate, H. Onishi, “The Similarity Problem for 3×3 Integer Matrices”, *Linear Algebra Appl.*, **42**:2 (1982), 159–174. DOI: 10.2307/2043695.

6. S. V. Sidorov, “On similarity of matrices of third order over the ring of integers with reducible characteristic polynomial”, *Vestnik Nizhegorodsk. Univ.*, 2009, no. 1, 119–127 (In Russ.).

7. S. V. Sidorov, *Selection of effectively solvable classes in the problem of similarity of matrices over the ring of integers*, PhD Dissertation, Nizhny Novgorod, 2015 (In Russ.).

8. V. N. Shevchenko, S. V. Sidorov, “On the similarity of second-order matrices over the ring of integers”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **50**:4 (2006), 56–63 (In Russ.).

9. M. Newman, *Integral matrices*, Academic Press, New York, 1972, 223 p.

10. S. V. Sidorov, “Similarity of matrices with integer spectra over the ring of integers”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **55**:3 (2011), 77–84 (In Russ.).

11. S. V. Sidorov, G. V. Utkin, “On the Similarity over the Ring of Integers of Certain Nilpotent Matrices of Maximal Rank”, *Zhurnal SVMO*, **25**:4 (2023), 284–298. DOI: 10.15507/2079-6900.25.202304.284-298 (In Russ.).

12. G. V. Utkin, “Similarity criterion over the ring of integers for some nilpotent matrices of the fifth order”, *Mathematical modeling and supercomputer technologies: Proceedings of the XXIII International Conference, Nizhny Novgorod, November 13–16*, 2023, 154–157 (In Russ.).

13. S. V. Sidorov, “On the similarity of certain integer matrices with single eigenvalue over the ring of integers”, *Math Notes*, **105** (2019), 756–762. DOI: 10.1134/S0001434619050122 (In Russ.).

14. D. Husert, *Similarity of integer matrices*, PhD Thesis, University of Paderborn, 2017, 147 p.

15. A. Schrijver, *Theory of linear and integer programming*, Wiley, 1998, 464 p.

Submitted 02.10.2024; Revised 03.12.2024; Accepted 26.01.2025

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.