

DOI 10.15507/2079-6900.27.202501.49-68

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.958

Групповая классификация нелинейного уравнения теплопроводности с дробно-дифференциальным малым двухфазным запаздыванием

В. О. Лукашук, С. Ю. Лукашук

ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» (г. Уфа, Российская Федерация)

Аннотация. В статье решается задача групповой классификации нелинейного одномерного дробно-дифференциального уравнения теплопроводности с полной памятью и двухфазным запаздыванием, включающим тепловую релаксацию и термическое демпфирование. Характерные времена релаксационных процессов считаются малыми, что учитывается в уравнении введением малого параметра при дробно-дифференциальных релаксационных слагаемых. Все теплофизические параметры считаются функциями температуры. Групповая классификация выполняется с точностью до преобразований эквивалентности по допускаемым уравнением группам приближенных точечных преобразований в линейном приближении по малому параметру. Доказано, что в общем случае допускаемая уравнением приближенная группа является пятипараметрической. Выделены случаи ее расширения до семи- и девятипараметрической, соответственно. Показано также, что рассматриваемое нелинейное уравнение обладает бесконечной группой приближенных симметрий в случае, когда соответствующее невозмущенное уравнение является линейным. Доказано, что рассматриваемое уравнение всегда точно наследует симметрии невозмущенного уравнения. Полученные результаты дают возможность построения приближенно-инвариантных решений рассматриваемого уравнения. В частности, из найденной классификации следует, что рассматриваемое уравнение всегда будет обладать решением типа бегущей волны, а автомодельные решения возможны только в случае степенных зависимостей теплофизических параметров от температуры. Получены анзацы данных типов решений и выполнена симметричная редукция рассматриваемого уравнения к соответствующим обыкновенным дробно-дифференциальным уравнениям.

Ключевые слова: дробно-дифференциальное уравнение теплопроводности, дробная производная Герасимова–Капуто, малый параметр, допускаемая группа приближенных преобразований, приближенно-инвариантное решение

Для цитирования: Лукашук В. О., Лукашук С. Ю. Групповая классификация нелинейного уравнения теплопроводности с дробно-дифференциальным малым двухфазным запаздыванием // Журнал Средневолжского математического общества. 2025. Т. 27, № 1. С. 49–68. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202501.49-68

Об авторах:

Лукашук Вероника Олеговна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высокопроизводительных вычислительных технологий и систем, ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» (450076, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3082-1446>, voluks@gmail.com

© Лукашук В. О., Лукашук С. Ю.



Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.
This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Лукашук Станислав Юрьевич, докт. физ.-мат. наук, профессор кафедры высокопроизводительных вычислительных технологий и систем, ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» (450076, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9209-5155>, lsu@ugatu.su

Original article

MSC2020 70G65

Group classification of nonlinear time-fractional dual-phase-lag heat equation with a small parameter

V. O. Lukashchuk, S. Yu. Lukashchuk

Ufa University of Science and Technology (Ufa, Russian Federation)

Abstract. In this paper, we solve the group classification problem for a nonlinear one-dimensional time-fractional heat conduction equation with full memory and dual-phase-lag, including thermal relaxation and thermal damping. The characteristic times of relaxation processes are assumed to be small enough and therefore a small parameter for fractional differential relaxation terms is introduced. All thermal properties of a medium are considered as functions of temperature. Group classification is performed with respect to groups of approximate point transformations (groups of approximate symmetries) admitted by the equation up to equivalence transformations. We prove that generally the equation admits five-parameter group of approximate transformations, and the cases of its extension to seven- and nine-parameters groups are found. Also, it is shown that the considered nonlinear equation has an infinite approximate symmetry group if the corresponding unperturbed equation is linear. We find that the equation in question always exactly inherits the symmetries of the unperturbed equation. The obtained results make it possible to construct approximately invariant solutions of equation under consideration. In particular, it follows from the classification found that the equation always has a traveling wave solution. The self-similar solutions can be constructed only if the medium thermal properties have power-law dependences on temperature. Ansatzes of these types of solutions are obtained and symmetry reductions of the equation under consideration to the corresponding ordinary fractional differential equations are performed.

Keywords: time-fractional heat equation, Gerasimov–Caputo fractional derivative, small parameter, admitted approximate transformations group, approximately-invariant solution

For citation: V. O. Lukashchuk, S. Yu. Lukashchuk. Group classification of nonlinear time-fractional dual-phase-lag heat equation with a small parameter. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 27:1(2025), 49–68. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202501.49-68

About the authors:

Veronika O. Lukashchuk, Ph.D. in Phys. and Math., Associate Professor, Department of High Performance Computing Systems and Technologies, Ufa University of Science and Technology (32 Zaki Validi St., Ufa 450076, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3082-1446>, voluks@gmail.com

Stanislav Yu. Lukashchuk, Dr.Sci. in Phys. and Math., Professor, Department of High Performance Computing Systems and Technologies, Ufa University of Science and Technology (32 Zaki Validi St., Ufa 450076, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9209-5155>, lsu@ugatu.su

1. Введение

Классический групповой анализ дифференциальных уравнений [1–3] является эффективным математическим инструментом исследования их симметричных свойств, нахождения инвариантных решений и построения законов сохранения. Основы теоретико-группового подхода были заложены в работах С. Ли и в дальнейшем развивались многими отечественными и зарубежными исследователями. В современном групповом анализе [4–6] области применимости теоретико-групповых методов были существенно расширены. В настоящее время эти методы успешно адаптированы для исследования интегро-дифференциальных уравнений [7–8] и дифференциальных уравнений с производными дробных порядков различных типов [9–10]. В [10–14] была разработана теория приближенных групп преобразований для исследования симметричных свойств дифференциальных уравнений с малым параметром. Относительно недавно [15–17] на основе этой теории были предложены алгоритмы нахождения приближенных симметрий и приближенных законов сохранения для дробно-дифференциальных уравнений в случае, когда порядок дробного дифференцирования оказывается близок к целому и, следовательно, в уравнение может быть введен малый параметр.

Классической и практически важной задачей группового анализа является задача групповой классификации [1]. Для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка эта задача была впервые поставлена и частично решена С. Ли [18] (см. также [19]). Одной из первых полностью решенных задач групповой классификации дифференциальных уравнений в частных производных стала решенная академиком Л. В. Овсянниковым задача классификации нелинейного уравнения теплопроводности [20]. В работе [21] данная классификация была расширена на случай уравнения теплопроводности с нелинейным источником. Аналогичная задача для уравнения диффузии с дробной производной типа Римана–Лиувилля по времени рассматривалась в [22–23]. В [24] выполнена групповая классификация по приближенным группам точечных преобразований допускаемых дробно-дифференциальным уравнением теплопроводности с близким к целому порядком дробного дифференцирования, являющаяся дальнейшим расширением классификации Л. В. Овсянникова.

Хорошо известно [25] (см. также [26]), что классическое уравнение теплопроводности, основанное на феноменологическом законе Фурье, не позволяет адекватно описывать быстротекающие процессы теплопереноса (например, при интенсивном лазерном нагреве [27]). Также это уравнение часто оказывается несправедливым на микромасштабах [28] и в гетерогенных сложных средах [29]. В этом случае используются различные модификации закона Фурье [30]. Наиболее известным из них является закон Максвелла–Каттанео, учитывающий эффект тепловой релаксации и приводящий к гиперболическому уравнению теплопроводности [31–32]. Дальнейшей модификацией этого закона является модель с двухфазным запаздыванием, известная в зарубежной литературе как *dual-phase-lag model* [33]. Она вводит в уравнение дополнительный коэффициент запаздывания для градиента температуры, называемый термическим демпфированием, который позволяет учесть влияние микроструктуры при макроскопическом описании быстротекающих тепловых процессов. Недавно в работе [34] была предложена дробно-дифференциальная по времени модификация этой модели, позволяющая дополнительно учесть эффект памяти среды, затухающей по степенному закону. Помимо биологических тканей, такой макроскопический эффект в процессах теплопереноса наблюдается в некоторых пористых средах [35], композитах [36], транзисторных структурах [37]. Вывод этой модели на основе общего реологического соотношения

для однородной и изотропной среды представлен в работе [38].

Целью данной работы является решение задачи групповой классификации дробно-дифференциального по времени уравнения теплопроводности с двухфазным запаздыванием в предположении зависимости от температуры всех теплофизических параметров модели. Также предполагается, что влияние релаксационных эффектов мало по сравнению с эффектом молекулярной теплопроводности, описываемой классическим законом Фурье. Это дает возможность ввести в уравнение малый параметр при всех производных дробного порядка. В результате групповая классификация проводится по приближенным группам преобразований, допускаемым рассматриваемым уравнением в линейном приближении по малому параметру. Насколько известно авторам, задача приближенной групповой классификации дробно-дифференциального уравнения с малым параметром при дробных производных в данной работе решается впервые.

2. Постановка задачи и метод решения

Объектом исследования в данной работе является нелинейное одномерное дробно-дифференциальное уравнение теплопроводности

$$u_t + \varepsilon g(u) D_t^\alpha u_t = (k(u) u_x)_x + \varepsilon (f(u) D_t^\alpha u_x)_x, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (2.1)$$

Здесь t, x — независимые переменные (время и пространственная координата), $u = u(t, x)$ — зависимая переменная (температура), $0 < \varepsilon \ll 1$ — малый параметр, $k(u)$ — коэффициент температуропроводности, $g(u)$ и $f(u)$ — переменные коэффициенты, связанные с тепловой релаксацией и термическим демпфированием, соответственно,

$$(D_t^\alpha v)(t, x) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_{-\infty}^t \frac{v_s(s, x)}{(t - s)^\alpha} ds \quad (2.2)$$

— дробная производная типа Герасимова–Капуто [39] порядка $\alpha \in (0, 1)$, определенная на всей временной оси $t \in (-\infty, \infty)$, $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

Уравнение (2.1) получается из уравнения энергии в форме первого закона термодинамики и обобщенного феноменологического соотношения для процесса теплопроводности в среде с полной памятью и двухфазным запаздыванием (тепловой релаксацией и термическим демпфированием) в предположении зависимости основных теплофизических характеристик среды от температуры. Малый параметр ε учитывает малость характерного времени соответствующих релаксационных процессов. Полная память системы определяется бесконечным нижним пределом в интеграле (2.2). Заметим, что в этом случае из естественного физического требования конечности энергии системы следует справедливость равенств $u_t|_{t \rightarrow -\infty} = u_x|_{t \rightarrow -\infty} = 0$. В этом случае дробные производные типа Герасимова–Капуто в уравнении (2.1) будут совпадать с дробными производными типа Римана–Лиувилля [40].

Решается задача групповой классификации уравнения (2.1) по допускаемым группам приближенных точечных преобразований относительно функций $k(u)$, $f(u)$ и $g(u)$. При этом все вычисления выполняются приближенно относительно малого параметра ε с точностью до $o(\varepsilon)$.

В дальнейшем будет удобно использовать развернутую форму уравнения (2.1):

$$u_t = k(u) u_{xx} + k'(u) u_x^2 + \varepsilon [f(u) D_t^\alpha u_{xx} + f'(u) u_x D_t^\alpha u_x - g(u) D_t^\alpha u_t]. \quad (2.3)$$

Здесь учтено, что оператор дробного дифференцирования D_t^α коммутирует с оператором дифференцирования по пространственной переменной x .

Инфинитезимальный оператор (генератор) приближенной с точностью до $o(\varepsilon)$ группы точечных преобразований имеет вид [11–12]

$$X = (\tau^0 + \varepsilon\tau^1)\frac{\partial}{\partial t} + (\xi^0 + \varepsilon\xi^1)\frac{\partial}{\partial x} + (\eta^0 + \varepsilon\eta^1)\frac{\partial}{\partial u}, \quad (2.4)$$

где τ^0 , τ^1 , ξ^0 , ξ^1 , η^0 и η^1 являются функциями t , x , u . Уравнение (2.3) включает в себя дифференциальные u_t , u_x , u_{xx} и дробно-дифференциальные $D_t^\alpha u_t$, $D_t^\alpha u_x$, $D_t^\alpha u_{xx}$ переменные. Для решения поставленной задачи оператор (2.4) продолжается на эти переменные:

$$\begin{aligned} \tilde{X} = X + (\zeta_t^0 + \varepsilon\zeta_t^1)\frac{\partial}{\partial u_t} + (\zeta_x^0 + \varepsilon\zeta_x^1)\frac{\partial}{\partial u_x} + (\zeta_{xx}^0 + \varepsilon\zeta_{xx}^1)\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \\ + \zeta_t^\alpha \frac{\partial}{\partial D_t^\alpha u_t} + \zeta_x^\alpha \frac{\partial}{\partial D_t^\alpha u_x} + \zeta_{xx}^\alpha \frac{\partial}{\partial D_t^\alpha u_{xx}}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь учтено, что все дробно-дифференциальные переменные входят в рассматриваемое уравнение только в ε -порядке, поэтому в продолжении оператора для соответствующих координат оставлен только нулевой порядок по ε .

Для нахождения координат продолженного оператора (2.5) может быть использована единая формула (доказательство см., например, в [10])

$$\zeta \equiv \zeta^0 + \varepsilon\zeta^1 = \mathcal{D}(W) + (\tau^0 + \varepsilon\tau^1)D_t(\mathcal{D}u) + (\xi^0 + \varepsilon\xi^1)D_x(\mathcal{D}u),$$

где

$$W = \eta^0 + \varepsilon\eta^1 - (\tau^0 + \varepsilon\tau^1)u_t - (\xi^0 + \varepsilon\xi^1)u_x$$

и в качестве оператора $\mathcal{D}$ выступают операторы D_t , D_x , D_x^2 , $D_t^\alpha D_t$, $D_t^\alpha D_x$ и $D_t^\alpha D_x^2$ для нахождения ζ_t , ζ_x , ζ_{xx} , ζ_t^α , ζ_x^α и ζ_{xx}^α , соответственно. При вычислении координат дробно-дифференциальных переменных используются формулы

$$\begin{aligned} D_t^\alpha D_x(tu) &= tD_t^\alpha u_x + \alpha D_t^{\alpha-1} u_x, \\ D_t^\alpha D_t(tu) &= tD_t^{\alpha+1} u + (\alpha+1)D_t^\alpha u, \\ D_t^\alpha D_x(tu_t) &= tD_t^{\alpha+1} u_x + \alpha D_t^\alpha u_x, \\ D_t^\alpha D_t(tu_t) &= tD_t^{\alpha+2} u + (\alpha+1)D_t^{\alpha+1} u, \\ D_t^\alpha D_x(t^2 u_t) &= t^2 D_t^{\alpha+1} u_x + 2\alpha t D_t^\alpha u_x + \alpha(\alpha-1)D_t^{\alpha-1} u_x, \\ D_t^\alpha D_t(t^2 u_t) &= t^2 D_t^{\alpha+2} u + 2(\alpha+1)tD_t^{\alpha+1} u + \alpha(\alpha+1)D_t^\alpha u, \end{aligned} \quad (2.6)$$

справедливость которых проверяется непосредственными вычислениями с учетом соотношения $D_t^\alpha D_t = D_t^{\alpha+1}$.

Как и в классическом групповом анализе [1], действие продолженного оператора (2.5) на дробно-дифференциальное уравнение (2.3) дает определяющее уравнение

$$\begin{aligned} \left[(\eta^0 + \varepsilon\eta^1)(k'u_{xx} + k''u_x^2) - \varepsilon\eta^0(f'D_t^\alpha u_{xx} + f''u_x D_t^\alpha u_x - g'D_t^\alpha u_t) + (\zeta_{xx}^0 + \varepsilon\zeta_{xx}^1)k + \right. \\ \left. + 2(\zeta_x^0 + \varepsilon\zeta_x^1)ku_x + \varepsilon(\zeta_{xx}^\alpha f + \zeta_x^\alpha f'u_x + \zeta_x^0 f'D_t^\alpha u_x - \zeta_t^\alpha g) - \zeta_t^0 - \varepsilon\zeta_t^1 \right]_{(2.3)} = o(\varepsilon), \end{aligned} \quad (2.7)$$

которое должно выполняться с точностью до $o(\varepsilon)$ для любой допускаемой уравнением приближенной группы в силу самого уравнения. При этом отметим одну важную особенность. Так как используются дробные производные на всей оси, то есть конечный постоянный предел интегрирования в дробно-дифференциальном операторе отсутствует, то никаких дополнительных требований на сохранение такого предела при групповом преобразовании не возникает. Детальное обсуждение этого вопроса для дробных производных на отрезке можно найти, например, в [9].

Нетрудно заметить, что при $\varepsilon = 0$ уравнение (2.1) превращается в классическое нелинейное уравнение теплопроводности

$$u_t = (k(u)u_x)_x, \quad (2.8)$$

задача групповой классификации которого была решена академиком Л. В. Овсянниковым [20]. Соответствующие значения координат τ^0 , ξ^0 и η^0 для различных неэквивалентных случаев функции $k(u)$ могут быть записаны следующим образом [1]:

1) $k(u)$ — произвольная,

$$\tau^0 = C_1 + 2C_3t, \quad \xi^0 = C_2 + C_3x, \quad \eta^0 = 0; \quad (2.9)$$

2) $k(u) = e^u$,

$$\tau^0 = C_1 + (2C_3 - C_4)t, \quad \xi^0 = C_2 + C_3x, \quad \eta^0 = C_4; \quad (2.10)$$

3) $k(u) = u^\sigma$ ($\sigma \neq 0$),

$$\tau^0 = C_1 + 2C_3t, \quad \xi^0 = C_2 + C_3x + C_4\sigma x - C_5x^2, \quad \eta^0 = (2C_4 + 3C_5x)u, \quad (2.11)$$

причем $C_5 \neq 0$ только при $\sigma = -4/3$;

4) $k(u) = 1$,

$$\begin{aligned} \tau^0 &= C_1 + 2C_3t - 4C_5t^2, \quad \xi^0 = C_2 + C_3x - 2C_4t - 4C_5tx, \\ \eta^0 &= (C_6 + C_4x + C_5x^2 + 2C_5t)u + h(t, x), \end{aligned} \quad (2.12)$$

где функция $h(t, x)$ — произвольное решение уравнения $h_t = h_{xx}$.

В (2.9)–(2.12) через C_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) обозначены произвольные постоянные. В результате задача групповой классификации уравнения (2.1) по группам приближенных преобразований сводится к исследованию наследования известных групп различных видов невозмущенного уравнения при его соответствующем дробно-дифференциальном возмущении.

Отметим еще один важный момент. Решение задачи групповой классификации всегда должно проводиться с точностью до преобразований эквивалентности, общая методика построения которых изложена в [1]. Конструктивный алгоритм построения группы преобразований эквивалентности был предложен в работе [41] и распространен на дробно-дифференциальные уравнения в работе [22]. Однако для рассматриваемого уравнения (2.1) вследствие наличия одновременно малого параметра и производных дробного порядка задача построения полной группы приближенных преобразований эквивалентности становится достаточно сложной и трудоемкой задачей. Тем не менее, поскольку классификация по функции $k(u)$ уже известна, а функции $f(u)$ и $g(u)$

стоят при малом параметре, для выделения их классов эквивалентности оказывается достаточно знать преобразования эквивалентности только в нулевом порядке по ε . Эти преобразования легко получаются из известных для уравнения теплопроводности с источником [21] и имеют вид

$$\begin{aligned}\bar{t} &= a_1^2 t, & \bar{x} &= a_1 a_2 x, & \bar{u} &= a_3 u + a_4, & \bar{k}(\bar{u}) &= a_2^2 k(a_3 u + a_4), \\ \bar{f}(\bar{u}) &= (a_1^2 a_2)^2 f(a_3 u + a_4), & \bar{g}(\bar{u}) &= a_1^{2\alpha} g(a_3 u + a_4).\end{aligned}\quad (2.13)$$

Здесь a_i ($i = 1, 2, 3, 4$) — произвольные постоянные.

Для рассматриваемой задачи преобразования (2.13) не должны изменять приведенную выше классификацию функции $k(u)$. Поэтому для конкретных видов этой функции данные преобразования дополнительно упрощаются. Имеем

1) $k(u)$ — произвольная: справедливы преобразования (2.13);

2) $k(u) = e^u$: $a_2^2 = 1$, $a_3 = 1$, $a_4 = 0$, следовательно

$$\bar{t} = a_1^2 t, \quad \bar{x} = \pm a_1 x, \quad \bar{u} = u, \quad \bar{f}(\bar{u}) = a_1^{2\alpha} f(u), \quad \bar{g}(\bar{u}) = a_1^{2\alpha} g(u); \quad (2.14)$$

3) $k(u) = u^\sigma$ ($\sigma \neq 0$): $a_2^2 = a_3^{-\sigma}$, $a_3 > 0$, $a_4 = 0$, следовательно

$$\begin{aligned}\bar{t} &= a_1^2 t, & \bar{x} &= \pm a_1 a_3^{-\sigma/2} x, & \bar{u} &= a_3 u, \\ \bar{f}(\bar{u}) &= a_1^{2\alpha} a_3^{-\sigma} f(a_3 u), & \bar{g}(\bar{u}) &= a_1^{2\alpha} g(a_3 u);\end{aligned}\quad (2.15)$$

4) $k(u) = 1$: $a_2^2 = 1$, следовательно

$$\begin{aligned}\bar{t} &= a_1^2 t, & \bar{x} &= \pm a_1 x, & \bar{u} &= a_3 u + a_4, \\ \bar{f}(\bar{u}) &= a_1^{2\alpha} f(a_3 u + a_4), & \bar{g}(\bar{u}) &= a_1^{2\alpha} g(a_3 u + a_4).\end{aligned}\quad (2.16)$$

В данной работе групповая классификация уравнения (2.1) проводится с точностью до преобразований эквивалентности (2.13) – (2.16).

3. Результаты групповой классификации

Рассмотрим наследование уравнением (2.1) группы невозмущенного нелинейного уравнения теплопроводности отдельно для каждого из случаев (2.9)–(2.12) его классификации.

1) *Случай произвольного $k(u)$.*

Подстановка (2.9) в (2.7) дает определяющее уравнение, которое будет содержать только слагаемые первого порядка по ε . Расщепление полученного уравнения по независимым переменным $D_t^{\alpha+1}u$ и $D_t^\alpha u_{xx}$ приводит к уравнениям

$$C_3 g = 0, \quad C_3 f = 0.$$

Решение $f = g = 0$ является тривиальным, так как приводит к вырождению уравнения (2.1) в классическое уравнение теплопроводности (2.8), поэтому в дальнейшем не

рассматривается. В результате из полученных уравнений следует, что $C_3 = 0$, а функции $f(u)$ и $g(u)$ являются произвольными. Применение преобразований эквивалентности (2.13) в данном случае не требуется.

Оставшаяся часть определяющего уравнения не содержит постоянных C_1, C_2 и оказывается идентичной определяющему уравнению для (2.8). В результате находим

$$\tau^1 = c_1 + 2c_3t, \quad \xi^1 = c_2 + c_3x, \quad \eta^1 = 0, \quad (3.1)$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные.

Таким образом, в случае произвольных функций $k(u), f(u)$ и $g(u)$ допускаемая уравнением (2.1) приближенная группа точечных преобразований является пятипараметрической, соответствующей пяти постоянным C_1, C_2, c_1, c_2, c_3 .

2) *Случай* $k(u) = e^u$.

Подставляя (2.10) в (2.7) и приравнявая к нулю выражения при дробно-дифференциальных переменных $D_t^{\alpha+1}u$, $D_t^\alpha u_{xx}$ и $u_x D_t^\alpha u_x$, приходим к следующей системе:

$$\begin{aligned} C_4 g' - \alpha(2C_3 - C_4)g &= 0, \\ C_4 f' - [(\alpha - 1)(2C_3 - C_4) + 2C_3]f &= 0, \\ C_4 f'' - [(\alpha - 1)(2C_3 - C_4) + 2C_3]f' &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Легко видеть, что третье уравнение в (3.2) является дифференциальным следствием второго. Таким образом, первое уравнение в (3.2) является классифицирующим для функции $g(u)$, а второе — для функции $f(u)$. Оба уравнения выполняются тождественно при $C_3 = C_4 = 0$ и произвольных f и g . Этот случай включается в уже рассмотренный выше. Так как $\alpha \in (0, 1)$, то к нему же сводится случай $C_4 = 0$. Поэтому важным для классификации является только случай $C_4 \neq 0$, при этом решение (3.2) имеет вид

$$f(u) = f_0 e^{(1+\beta)u}, \quad g(u) = g_0 e^{\beta u}, \quad (3.3)$$

где f_0, g_0, β — произвольные постоянные и выполнено условие

$$2\alpha C_3 - (\alpha + \beta)C_4 = 0. \quad (3.4)$$

В результате будет наследоваться группа, определяемая линейной комбинацией (3.4).

Применение преобразований эквивалентности (2.14) к (3.3) позволяет выделить два неэквивалентных случая:

$$\begin{aligned} f(u) &= \pm e^{(1+\beta)u}, \quad g(u) = g_0 e^{\beta u}, \quad g_0 = \text{const}; \\ f(u) &= 0, \quad g(u) = \pm e^{\beta u}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Разрешение оставшейся части определяющего уравнения дает ε -порядок допускаемой группы:

$$\tau^1 = c_1 + (2c_3 - c_4)t, \quad \xi^1 = c_2 + c_3x, \quad \eta^1 = c_4, \quad (3.6)$$

где c_i ($i = 1, 2, 3, 4$) — произвольные постоянные.

Таким образом, в обоих случаях из (3.5) уравнение (2.1) допускает семипараметрическую группу приближенных точечных преобразований.

3) *Случай* $k(u) = u^\sigma$ ($\sigma \neq 0$).

В данном случае определяющее уравнение, получающееся после подстановки (2.11) в (2.7), будет содержать уже четыре дробно-дифференциальные переменные: $D_t^{\alpha+1}u$, $D_t^\alpha u$, $D_t^\alpha u_{xx}$ и $D_t^\alpha u_x$. Приравнивание к нулю выражений, выступающих множителями при этих переменных, приводит к системе

$$\begin{aligned}(2C_4 + 3C_5x)ug' - 2\alpha C_3g &= 0, \\ C_5f' &= 0, \\ (2C_4 + 3C_5x)uf' - (2\sigma C_4 + 2\alpha C_3 - 4C_5x)f &= 0, \\ u_x[(2C_4 + 3C_5x)uf'' - (2\sigma C_4 + 2\alpha C_3 - 2C_4 - 2C_5x)f'] + 3C_5uf' + 10C_5f &= 0.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Так как f и g являются функциями только переменной u , данная система может быть дополнительно расщеплена по u_x и x . Отсюда следует, что если $C_5 \neq 0$, то есть $\sigma = -4/3$, то

$$f(u) = 0, \quad g(u) \equiv g_0 = \text{const}.\tag{3.8}$$

При этом из первого уравнения (3.7) дополнительно следует $C_3 = 0$. Применение преобразований эквивалентности (2.15) позволяет привести (3.8) к виду

$$f(u) = 0, \quad g(u) = \pm 1.\tag{3.9}$$

При $C_5 = 0$ четвертое уравнение в (3.7) становится дифференциальным следствием третьего. В результате классифицирующие соотношения для функций $f(u)$ и $g(u)$ принимают вид

$$C_4ug' - \alpha C_3g = 0, \quad C_4uf' - (\sigma C_4 + \alpha C_3)f = 0.$$

При $C_4 = 0$ получаем либо $C_3 = 0$ и произвольные f и g , либо $f = g = 0$ и произвольное C_3 . Оба эти случая уже рассмотрены ранее. Поэтому наследование группы возможно только при $C_4 \neq 0$. В этом случае интегрирование приведенных уравнений дает

$$f(u) = f_0u^{\gamma+\sigma}, \quad g(u) = g_0u^\gamma,\tag{3.10}$$

где f_0 , g_0 и γ — произвольные постоянные и выполнено условие

$$\gamma C_4 - \alpha C_3 = 0.$$

Применение к (3.10) преобразований эквивалентности (2.15) дает два неэквивалентных случая:

$$\begin{aligned}f(u) &= \pm u^{\gamma+\sigma}, \quad g(u) = g_0u^\gamma, \quad g_0 = \text{const}, \\ f(u) &= 0, \quad g(u) = \pm u^\gamma.\end{aligned}\tag{3.11}$$

Оставшаяся часть определяющего уравнения дает ε -порядок группы:

$$\tau^1 = c_1 + 2c_3t, \quad \xi^1 = c_2 + c_3x + c_4\sigma x - c_5x^2, \quad \eta^1 = (2c_4 + 3c_5x)u,\tag{3.12}$$

где c_i ($i = 1, \dots, 5$) — произвольные постоянные, причем $c_5 \neq 0$ только при $\sigma = -4/3$.

Таким образом, допускаемая уравнением (2.1) приближенная группа является семипараметрической в случаях из (3.11) и девятипараметрической в случае (3.9).

4) *Случай* $k(u) = 1$.

Данный случай соответствует линейному невозмущенному уравнению и является с точки зрения анализа наиболее трудоемким. В результате подстановки (2.12) в (2.7) получается определяющее уравнение, содержащее восемь различных переменных дробного порядка. Расщепление по ним определяющего уравнения приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
 D_t^{\alpha-1} u_{xxx} : \quad & (C_4 + 2C_5 x) f = 0, \\
 D_t^\alpha u_{xx} : \quad & f' h + (C_6 + C_4 x + C_5 x^2 + 2C_5 t) u f' + \\
 & + [2(4\alpha - 1)C_5 t - 2\alpha C_3 + 4\alpha(\alpha + 1)C_5] f = 0, \\
 D_t^{\alpha-1} u_{xx} : \quad & (C_4 + 2C_5 x) f' u_x = 0, \\
 D_t^\alpha u_x : \quad & [(C_6 + C_4 x + C_5 x^2 + 2C_5 t) u + h] f'' u_x + f' h_x + (C_4 + 2C_5 x) u f' + \\
 & + (C_6 + C_4 x + C_5 x^2 + 2C_5 t - 2\alpha C_3) f' u_x + 2(C_4 + 2C_5 x) f - \\
 & - 2(\alpha + 1)(C_4 + 2C_5 x) g = 0, \\
 D_t^{\alpha-1} u_x : \quad & C_5 f' u_x = 0, \\
 D_t^{\alpha+1} u : \quad & (C_6 + C_4 x + C_5 x^2 + 2C_5 t) u g' + h g' + 2\alpha(4C_5 t - C_3) g = 0, \\
 D_t^\alpha u : \quad & (C_4 + 2C_5 x + 8\alpha C_5 t) f' u_x - 2(2\alpha + 1)(\alpha + 1)C_5 g + 2C_5 f = 0, \\
 D_t^{\alpha-1} u : \quad & C_5 f = 0.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Из первого уравнения сразу следует, что либо $f = 0$, либо

$$C_4 = C_5 = 0. \tag{3.14}$$

Тогда из последнего уравнения из (3.13) вытекает, что если (3.14) не выполнено, то $g = 0$. Однако этот случай является тривиальным. Поэтому наследование группы возможно только при выполнении условия (3.14), при этом первое, третье, пятое, седьмое и восьмое уравнения из (3.13) выполняются тождественно. Из оставшихся уравнений четвертое дополнительно расщепляется по u_x . В результате определяющая система для функций $f(u)$ и $g(u)$ приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned}
 (C_6 u + h) f' - 2\alpha C_3 f &= 0, \\
 (C_6 u + h) f'' + (C_6 - 2\alpha C_3) f' &= 0, \\
 (C_6 u + h) g' - 2\alpha C_3 g &= 0, \\
 f' h_x &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Легко заметить, что второе уравнение является дифференциальным следствием первого и поэтому может быть опущено. Из последнего уравнения следует, что либо $f(u) \equiv f_0 = \text{const}$, либо $h(t, x) \equiv h_0 = \text{const}$ (так как $h_t = h_{xx}$).

При $f = f_0 \neq 0$ из первого уравнения в (3.15) следует $C_3 = 0$. Тогда третье уравнение дает либо $g(u) \equiv g_0 = \text{const}$, либо $C_6 = h = 0$ при произвольной функции $g(u)$. Последний случай соответствует произвольному $k(u)$ и поэтому отдельно не выделяется. Таким образом, выделяется случай

$$f(u) \equiv f_0 = \text{const} \neq 0, \quad g(u) \equiv g_0 = \text{const}, \quad C_3 = C_4 = C_5 = 0. \tag{3.16}$$

Если $f = 0$, то из третьего уравнения в (3.15) при $h \neq \text{const}$ следует $g \equiv g_0 = \text{const}$ и $C_3 = 0$, при этом сохраняется $C_6 \neq 0$. Этот случай включается в (3.16) как расширение $f_0 = 0$.

Заметим, что при (3.16) уравнение (2.1) становится линейным. В силу очевидного при этом соотношения $\varepsilon u = \varepsilon u_{xx}$ получаем, что $\varepsilon D_t^\alpha u_{xx} = D_t^\alpha u_t$ и дробно-дифференциальные слагаемые в уравнении (2.1) объединяются в единое слагаемое $(g_0 - f_0)D_t^\alpha u_t$. Поэтому с точностью до преобразований эквивалентности (2.16) получаем

$$f(u) = 0, \quad g(u) = \pm 1. \quad (3.17)$$

При $h \equiv h_0 = \text{const}$ выделяются случаи

$$f(u) = f_0 e^{\delta u}, \quad g(u) = g_0 e^{\delta u}, \quad 2\alpha C_3 - \delta h_0 = 0, \quad C_6 = 0 \quad (3.18)$$

и

$$f(u) = f_0(u+a)^\gamma, \quad g(u) = g_0(u+a)^\gamma, \quad C_6 a - h_0 = 0, \quad 2\alpha C_3 - \gamma C_6 = 0. \quad (3.19)$$

Здесь f_0, g_0, δ, a и γ — произвольные постоянные.

Применение преобразований эквивалентности (2.16) к (3.18) и (3.19) дает

$$\begin{aligned} f(u) &= \pm e^u, \quad g(u) = g_0 e^u, \quad g_0 = \text{const}; \\ f(u) &= 0, \quad g(u) = \pm e^u \end{aligned} \quad (3.20)$$

и

$$\begin{aligned} f(u) &= \pm u^\gamma, \quad g(u) = g_0 u^\gamma, \quad g_0 = \text{const}; \\ f(u) &= 0, \quad g(u) = \pm u^\gamma. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Разрешая оставшуюся часть определяющего уравнения, находим

$$\begin{aligned} \tau^1 &= c_1 + 2c_3 t - 4c_5 t^2, \quad \xi^1 = c_2 + c_3 x - 2c_4 t - 4c_5 t x, \\ \eta^1 &= (c_6 + c_4 x + c_5 x^2 + 2c_5 t)u + q(t, x), \end{aligned} \quad (3.22)$$

где c_i ($i = 1, \dots, 6$) — произвольные постоянные и функция $q = q(t, x)$ является произвольным решением уравнения $q_t = q_{xx} + (f_0 - g_0)D_t^\alpha h_t$.

Таким образом, допускаемая группа приближенных преобразований во всех случаях (3.17), (3.20), (3.21) является бесконечной, при этом нетривиальная конечномерная ее часть является девятипараметрической.

На этом задача групповой классификации решена полностью. Полученный результат может быть сформулирован в терминах n -мерных алгебр Ли L^n инфинитезимальных операторов групп приближенных точечных преобразований, допускаемых уравнением (2.1). Такие алгебры называются кратко алгебрами Ли приближенных симметрий данного уравнения. Таким образом, доказана

Т е о р е м а 3.1. *Нелинейное уравнение (2.1) в случае произвольных $k(u)$, $f(u)$ и $g(u)$ обладает алгеброй Ли L^5 приближенных точечных симметрий с базисом*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = 2\varepsilon t \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon x \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_4 = \varepsilon X_1, \quad X_5 = \varepsilon X_2.$$

Данная алгебра расширяется в следующих случаях:

1) до L^7 ну $k(u) = e^u$ и $f(u) = \pm e^{(1+\beta)u}$, $g(u) = g_0 e^{\beta u}$ или $f(u) = 0$, $g(u) = \pm e^{\beta u}$:

$$X_6 = 2\beta t \frac{\partial}{\partial t} + (\alpha + \beta)x \frac{\partial}{\partial x} + 2\alpha \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_7 = \varepsilon u \frac{\partial}{\partial u};$$

2) до L^7 ну $k(u) = u^\sigma$ ($\sigma \neq 0, -4/3$) и $f(u) = \pm u^{\gamma+\sigma}$, $g(u) = g_0 u^\gamma$ или $f(u) = 0$, $g(u) = \pm u^\gamma$:

$$X_6 = 2\gamma t \frac{\partial}{\partial t} + (\gamma + \alpha\sigma)x \frac{\partial}{\partial x} + 2\alpha u \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_7 = \varepsilon\sigma x \frac{\partial}{\partial x} + 2\varepsilon u \frac{\partial}{\partial u};$$

3) до L^9 ну $k(u) = u^{-\frac{4}{3}}$, $f(u) = 0$, $g(u) = \pm 1$:

$$X_6 = 2x \frac{\partial}{\partial x} - 3u \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_7 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} - 3xu \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_8 = \varepsilon X_6, \quad X_9 = \varepsilon X_7;$$

4) до $L^9 \oplus L^\infty$ ну $k(u) = 1$ и $f(u) = \pm e^u$, $g(u) = g_0 e^u$ или $f(u) = 0$, $g(u) = \pm e^u$:

$$X_6 = 2t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + 2\alpha u \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_7 = \varepsilon u \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_8 = 2\varepsilon t \frac{\partial}{\partial x} - \varepsilon xu \frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_9 = 4\varepsilon t^2 \frac{\partial}{\partial t} + 4\varepsilon tx \frac{\partial}{\partial x} - \varepsilon(x^2 + 2t)u \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_\infty = \varepsilon q(t, x) \frac{\partial}{\partial u},$$

где $q(t, x)$ — произвольное решение уравнения $q_t = q_{xx}$;

5) до $L^9 \oplus L^\infty$ ну $k(u) = 1$ и $f(u) = \pm u^\gamma$, $g(u) = g_0 u^\gamma$ или $f(u) = 0$, $g(u) = \pm u^\gamma$:

$$X_6 = 2\gamma t \frac{\partial}{\partial t} + \gamma x \frac{\partial}{\partial x} + 2\alpha u \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_7 = \varepsilon u \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_8 = 2\varepsilon t \frac{\partial}{\partial x} - \varepsilon xu \frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_9 = 4\varepsilon t^2 \frac{\partial}{\partial t} + 4\varepsilon tx \frac{\partial}{\partial x} - \varepsilon(x^2 + 2t)u \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_\infty = \varepsilon q(t, x) \frac{\partial}{\partial u},$$

где $q(t, x)$ — произвольное решение уравнения $q_t = q_{xx}$;

6) до $L^9 \oplus L^\infty$ ну $k(u) = 1$, $f(u) = 0$, $g(u) = \pm 1$:

$$X_6 = u \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_7 = \varepsilon X_6, \quad X_8 = 2\varepsilon t \frac{\partial}{\partial x} - \varepsilon xu \frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_9 = 4\varepsilon t^2 \frac{\partial}{\partial t} + 4\varepsilon tx \frac{\partial}{\partial x} - \varepsilon(x^2 + 2t)u \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_\infty = [h(t, x) + \varepsilon q(t, x)] \frac{\partial}{\partial u},$$

где $h(t, x)$ — произвольное решение уравнения $h_t = h_{xx}$ и $q(t, x)$ — произвольное решение уравнения $q_t = q_{xx} \mp D_t^\alpha h_t$.

Здесь $\alpha \in (0, 1)$ и $g_0, \beta, \gamma, \sigma$ — произвольные постоянные.

4. Обсуждение результатов групповой классификации

Теорема 3.1 показывает, что уравнение (2.1) точно наследует операторы группы симметрий соответствующего невозмущенного уравнения, то есть ε -часть в инфинитезимальных операторах не возникает. Причина этого заключается в том, что возмущенная часть уравнения (2.1) является исключительно дробно-дифференциальной. В определяющем уравнении дифференциальные переменные целого и дробного порядков

являются независимыми, что и определяет полученную структуру операторов. Очевидно, что это будет справедливо для любых уравнений с малым параметром, являющихся дифференциальными уравнениями целого порядка в нулевом приближении и содержащими в возмущенной части только дробно-дифференциальные слагаемые.

Наличие дробно-дифференциального возмущения в уравнении (2.1) приводит к уменьшению количества симметрий в нулевом порядке по ε . В целом, это характерно для любых дифференциальных уравнений с малым параметром. В приближенном групповом анализе полное наследование группы невозмущенного уравнения уравнением с малым параметром является скорее исключением, чем правилом. Тем не менее, размерность алгебры Ли приближенных симметрий всегда оказывается больше размерности алгебры Ли симметрий соответствующего невозмущенного уравнения, что дает возможность построения большего числа неподобных приближенно-инвариантных решений.

Уравнение (2.1) во всех случаях допускает преобразования переноса по t и x , определяемые операторами X_1 и X_2 , соответственно. Следовательно, это уравнение всегда будет обладать решением типа бегущей волны вида

$$u(t, x) = \varphi(\kappa x - \omega t), \quad (4.1)$$

являющегося инвариантным решением, соответствующим группе преобразований с оператором $X = \kappa X_1 + \omega X_2$. Подстановка (4.1) в (2.1) приводит к редуцированному обыкновенному дробно-дифференциальному уравнению

$$k(\varphi)\varphi'' + k'(\varphi)(\varphi')^2 + a\varphi' + \varepsilon(-\omega)^\alpha [f(\varphi)D_\xi^\alpha \varphi'' + f'(\varphi)\varphi' D_\xi^\alpha \varphi' + ag(\varphi)D_\xi^\alpha \varphi'] = 0, \quad (4.2)$$

где $\varphi = \varphi(\xi)$, $\xi = \kappa x - \omega t$, $a = \omega \kappa^{-2}$. В простейшем случае, приближенное решение (4.2) можно искать в виде $\varphi(\xi) = \varphi_0(\xi) + \varepsilon \varphi_1(\xi)$, что сводит задачу к поиску общего решения системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Возможность построения решения этой системы в явном виде определяется исключительно видом функций $k(u)$, $f(u)$ и $g(u)$.

Из теоремы 3.1 следует, что уравнение (2.1) не наследует оператор группы растяжений

$$X = 2t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x},$$

который допускается невозмущенным уравнением при любой функции $k(u)$. Данный оператор входит в допускаемую группу возмущенного уравнения только в первом порядке по ε . Это означает, что в общем случае уравнение (2.1) не обладает автомодельным решением.

Тем не менее, уравнение (2.1) будет обладать автомодельным решением при степенной зависимости его коэффициентов от u — пункты 2) и 5) теоремы 3.1. В этих случаях автомодельное решение является инвариантным решением, соответствующим однопараметрической группе преобразований растяжения с оператором X_6 . При $\gamma + \alpha\sigma \neq 0$ это решение будет иметь вид

$$u = x^{\frac{2\alpha}{\gamma + \alpha\sigma}} \varphi \left(tx^{-\frac{2\gamma}{\gamma + \alpha\sigma}} \right),$$

где функция $\varphi(\xi)$ является решением редуцированного уравнения

$$\begin{aligned} (\gamma + \alpha\sigma)^2 [\varphi' + \varepsilon g_0 \varphi^\gamma D_\xi^\alpha \varphi'] &= 2\varphi^\sigma [(2\alpha - \alpha\sigma - \gamma)\psi - 2\gamma\xi\psi'] + 4\sigma\varphi^{\sigma-1}\psi^2 \pm \\ &\pm 2\varepsilon\varphi^{\gamma+\sigma-1} [(\alpha\sigma + 2\alpha - \gamma)\varphi D_\xi^\alpha \psi - 2\gamma(\gamma + \sigma)\xi\varphi' D_\xi^\alpha \psi - 2\gamma\xi\varphi D_\xi^\alpha D_\xi^\alpha \psi]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь для сокращения введены обозначения $\xi = tx^{-\frac{2\gamma}{\gamma+\alpha\sigma}}$ и $\psi(\xi) = \alpha\varphi(\xi) - \gamma\xi\varphi'(\xi)$.

При $\gamma = -\alpha\sigma$ инвариантное решение упрощается и принимает вид

$$u = t^{-\frac{1}{\sigma}}\varphi(x),$$

а соответствующее редуцированное уравнение становится обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\Gamma\left(1 - \alpha - \frac{1}{\sigma}\right)[\sigma(\varphi^\sigma\varphi')' + \varphi] + \varepsilon\Gamma\left(-\frac{1}{\sigma}\right)[g_0\varphi^{1-\alpha\sigma} \mp (\varphi^{(1-\alpha)\sigma}\varphi')'] = 0. \quad (4.4)$$

Заметим, что в случаях 3) и 4) теоремы также имеются автомодельные решения, соответствующие операторам X_6 в каждом из случаев. Поскольку эти операторы являются частными случаями уже рассмотренного оператора группы преобразований растяжения, то соответствующие анзацы инвариантных решений и редуцированные уравнения также являются частными случаями уже рассмотренных выше. В завершение отметим, что нахождение решений полученных редуцированных уравнений (4.1), (4.3), (4.4) является нетривиальной задачей, решение которой может рассматриваться в качестве одного из возможных направлений дальнейшей работы.

5. Заключение

В работе решена задача групповой классификации нелинейного одномерного уравнения теплопроводности с малыми дробно-дифференциальными слагаемыми, учитывающими эффекты тепловой релаксации и термического демпфирования в приближении полной степенной памяти среды. Доказано, что рассматриваемое уравнение с малым параметром точно наследует симметрии соответствующего невозмущенного уравнения. Этот факт является общим для тех дробно-дифференциальных уравнений, которые содержат дробные производные только при малом параметре. Показано, что эффект полной памяти среды сохраняет в рассматриваемом уравнении теплопроводности группу преобразований переноса по времени, что дает возможность строить приближенно-инвариантные решения типа бегущей волны. Также в случае степенной зависимости теплофизических параметров от температуры рассматриваемое уравнение будет обладать автомодельными решениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
2. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.
3. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 639 с.
4. CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations / Ed. by N. H. Ibragimov. Boca Raton, FL: CRC Press, 1994. Vol. 1. 448 p.

5. CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations / Ed. by N. H. Ibragimov. Boca Raton, FL: CRC Press, 1995. Vol. 2. 576 p.
6. CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations / Ed. by N. H. Ibragimov. Boca Raton, FL: CRC Press, 1996. Vol. 3. 560 p.
7. Grigoriev Yu. N., Ibragimov N. H., Kovalev V. F., Meleshko S. V. Symmetries of integro-differential equations: with applications in mechanics and plasma physics. Dordrecht: Springer, 2010. 318 p.
8. Григорьев Ю. Н., Ковалев В. Ф., Мелешко С. В. Симметрии нелокальных уравнений: Теория и приложения. Новосибирск: Наука, 2018. 436 с.
9. Gazizov R. K., Kasatkin A. A., Lukashchuk S. Yu. Symmetries and group invariant solutions of fractional ordinary differential equations // Ed. A. Kochubei, Y. Luchko, Vol 2. Fractional Differential Equations. Boston: De Gruyter, 2019. P. 65–90. DOI: 10.1515/9783110571660-004
10. Gazizov R. K., Kasatkin A. A., Lukashchuk S. Yu. Symmetries, conservation laws and group invariant solutions of fractional PDEs // Ed. A. Kochubei, Y. Luchko, Vol. 2. Fractional Differential Equations. Boston: De Gruyter, 2019. P. 353–382. DOI: 10.1515/9783110571660-016
11. Байков В. А., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х. Приближенные симметрии // Матем. сб. 1988. Т. 136, № 4. С. 435–450.
12. Байков В. А., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х. Методы возмущений в групповом анализе // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Нов. достиж. 1989. Т. 34. С. 85–147.
13. Байков В. А., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х. Приближенные симметрии и законы сохранения // Тр. МИАН. 1991. Т. 200. С. 35–45.
14. Байков В. А., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х. Приближенные группы преобразований // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 10. С. 1712–1732.
15. Gazizov R. K., Lukashchuk S. Yu. Approximations of Fractional Differential Equations and Approximate Symmetries // IFAC-PapersOnLine. 2017. Vol. 50, No. 1. P. 14022–14027. DOI:10.1016/j.ifacol.2017.08.2426
16. Lukashchuk S. Yu., Saburova R. D. Approximate symmetry group classification for a nonlinear fractional filtration equation of diffusion-wave type // Nonlinear Dyn. 2018. Vol. 93, No. 2. Pp. 295–305.
17. Lukashchuk S. Yu. Approximate conservation laws for fractional differential equations // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2019. Vol. 68. Pp. 147–159. DOI:10.1016/j.cnsns.2018.08.011
18. Lie S. Classification und integration von gewöhnlichen differential-gleichungen zwischen x, y, die gruppe von transformationen gestatten // Arch. Math. Natur. Christiania. 1883. Vol. 9. P. 371–393.

19. Овсянников Л. В. Групповая классификация уравнений вида $y'' = f(x, y)$ // Прикл. мех. техн. физ. 2004. Т. 45, № 2. С. 5–10.
20. Овсянников Л. В. Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности // Докл. АН СССР. 1959. Т. 125, № 3, С. 492–495.
21. Дородницын В. А. Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1982. Т. 22, № 6, С. 1393–1400.
22. Lukashchuk S. Yu., Makunin A. V. Group classification of nonlinear time-fractional diffusion equation with a source term // Appl. Math. Comput. 2015. Vol. 257, P. 335–343.
23. Лукашук С. Ю. Симметричная редукция и инвариантные решения нелинейного дробно-дифференциального уравнения аномальной диффузии с источником // Уфимский математический журнал. 2016. Т. 8, № 4, С. 114–126.
24. Лукашук С. Ю. Групповая классификация одного нелинейного приближенного уравнения субдиффузии // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2016. Т. 20, № 4. С. 603–619. DOI : 10.14498/vsgtu1520
25. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
26. Костановский А. В., Костановская М. Е. Критерий применения параболического уравнения теплопроводности // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34, № 12. С. 6–11.
27. Qiu T. Q., Tien C. L. Heat Transfer Mechanisms During Short-Pulse Laser Heating of Metals // J. Heat Transfer. 1993. Vol. 115, No. 4. P. 835–841. DOI: 10.1115/1.2911377
28. Wang H. D., Cao B. Y., Guo Z. Y. Non-Fourier Heat Conduction in Carbon Nanotubes // J. Heat Transfer. 2012. Vol. 134, No. 5. 051004.
29. Roetzel W., Putra N., Das S. K. Experiment and analysis for non-Fourier conduction in materials with non-homogeneous inner structure // Int. J. Therm. Sci. 2003. Vol. 42, No. 6. P. 541–552.
30. Жмакин А. И. Теплопроводность за пределами закона Фурье // ЖТФ. 2021. Т. 91, № 1. С. 5–25. DOI: 10.21883/JTF.2021.01.50267.207-20
31. Cattaneo C. A form of heat equation which eliminates the paradox of instantaneous propagation // Comptes Rendus de l'Academie des Sciences. 1958. Vol. 247. P. 431–433.
32. Vernotte P. Paradoxes in the continuous theory of the heat equation // Comptes Rendus de l'Academie des Sciences. 1958. Vol. 246. P. 3154–3155.
33. Tzou D. Y. A unified approach for heat conduction from macro to micro-scales // ASME J. Heat Transfer. 1995. Vol. 117. P. 8–16. DOI: 10.1115/1.2822329
34. Xu H.-Y., Jiang X.-Y. Time fractional dual-phase-lag heat conduction equation // Chin. Phys. B. 2015. Vol. 24, No. 3. Article number 034401. DOI:10.1088/1674-1056/24/3/034401

35. Sobhani H., Azimi A., Noghrehabadi A., Mozafarifard M. Numerical study and parameters estimation of anomalous diffusion process in porous media based on variable-order time fractional dual-phase-lag model // Numerical Heat Transfer, Part A: Applications. 2023. Vol. 83, No. 7. P. 679–710. DOI: 10.1080/10407782.2022.2157915
36. Zhuang Q., Yu B., Jiang X. An inverse problem of parameter estimation for time-fractional heat conduction in a composite medium using carbon–carbon experimental data // Phys. B: Condens. Matter. 2015. Vol. 456. P. 9–15. DOI:10.1016/j.physb.2014.08.011
37. Fotovvat M. H., Shomali Z. A time-fractional dual-phase-lag framework to investigate transistors with TMTC channels (TiS₃, In₄Se₃) and size-dependent properties // Micro and Nanostructures. 2022. Vol. 168. 207304. DOI:10.48550/arXiv.2203.06523
38. Lukashchuk S. Yu. A semi-explicit algorithm for parameters estimation in a time-fractional dual-phase-lag heat conduction model // Modelling. 2024. Vol. 5, No. 3. P. 776–796. DOI:10.3390/modelling5030041
39. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.
40. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
41. Ахатов И. Ш., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х. Нелокальные симметрии. Эвристический подход // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Нов. до-стиж. 1989. Т. 34. С. 3–83.

*Поступила 23.09.2024; доработана после рецензирования 10.12.2024;
принята к публикации 26.02.2025*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. L. V. Ovsyannikov, *Group Analysis of Differential Equations*, Academic Press, New York, 1982, 416 p.
2. N. H. Ibragimov, *Transformation groups applied to mathematical physics*, Reidel, Dordrecht, 1985, 394 p.
3. P. J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1986, 497 p.
4. *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations*. Vol. 1, ed. N. H. Ibragimov, CRC Press, Boca Raton, FL, 1994, 448 p.
5. *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations*. Vol. 2, ed. N. H. Ibragimov, CRC Press, Boca Raton, FL, 1995, 576 p.

6. *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations*. Vol.3, ed. N.H. Ibragimov, CRC Press, Boca Raton, FL, 1996, 560 p.
7. Yu.N. Grigoriev, N.H. Ibragimov, V.F. Kovalev, S.V. Meleshko, *Symmetries of integro-differential equations: with applications in mechanics and plasma physics*, Springer, Dordrecht, 2010, 305 p.
8. Yu.N. Grigoriev, V.F. Kovalev, S.V. Meleshko, *Symmetries of non-local equations: Theory and Applications*, Nauka, Novosibirsk, 2018 (In Russ.), 436 p.
9. R.K. Gazizov, A.A. Kasatkin, S.Yu. Lukashchuk, "Symmetries and group invariant solutions of fractional ordinary differential equations", *Volume 2 Fractional Differential Equations*, eds. A. Kochubei, Yu. Luchko, De Gruyter, Boston, 2019, 65–90 DOI: 10.1515/9783110571660-004.
10. R.K. Gazizov, A.A. Kasatkin, S.Yu. Lukashchuk, "Symmetries, conservation laws and group invariant solutions of fractional PDEs", *Volume 2 Fractional Differential Equations*, eds. A. Kochubei, Yu. Luchko, De Gruyter, Boston, 2019, 353–382 DOI: 10.1515/9783110571660-016.
11. V.A. Baikov, R.K. Gazizov, N.Kh. Ibragimov, "Approximate symmetries", *Math. USSR-Sb.*, **64**:2 (1989), 427–441.
12. V.A. Baikov, R.K. Gazizov, N.Kh. Ibragimov, "Perturbation methods in group analysis", *J. Soviet Math.*, **55**:1 (1991), 1450–1490.
13. V.A. Baikov, R.K. Gazizov, N.Kh. Ibragimov, "Approximate symmetries and preservation laws", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **200** (1993), 35–47.
14. V.A. Baikov, R.K. Gazizov, N.H. Ibragimov, "Approximate groups of transformations", *Differ. Equ.*, **29**:10 (1993), 1487–1504.
15. R.K. Gazizov, S.Yu. Lukashchuk, "Approximations of Fractional Differential Equations and Approximate Symmetries", *IFAC-PapersOnLine*, **50**:1 (2017), 14022–14027. DOI: 10.1016/j.ifacol.2017.08.2426.
16. S.Yu. Lukashchuk, R.D. Saburova, "Approximate symmetry group classification for a nonlinear fractional filtration equation of diffusion-wave type", *Nonlinear Dyn.*, **93**:2 (2018), 295–305.
17. S.Yu. Lukashchuk, "Approximate conservation laws for fractional differential equations", *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **68** (2019), 147–159. DOI: 10.1016/j.cnsns.2018.08.011.
18. S. Lie, "Classification und integration von gewöhnlichen differential-gleichungen zwischen x, y, die gruppe von transformationen gestatten", *Arch. Math. Natur. Christiania.*, **9** (1883), 371–393.
19. L.V. Ovsyannikov, "Group classification of equations of the form $y'' = f(x, y)$ ", *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **45**:2 (2004), 153–157.
20. L.V. Ovsyannikov, "Group properties of nonlinear heat-conduction equations", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **125**:3 (1959), 492–495 (In Russ.).

21. V. A. Dorodnitsyn, “On invariant solutions of the equation of non-linear heat conduction with a source”, *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, **22**:6 (1982), 115–122.
22. S. Yu. Lukashchuk, A. V. Makunin, “Group classification of nonlinear time-fractional diffusion equation with a source term”, *Appl. Math. Comput.*, **257** (2015), 335–343.
23. S. Yu. Lukashchuk, “Symmetry reduction and invariant solutions for nonlinear fractional diffusion equation with a source term”, *Ufa Math. J.*, **8**:4 (2016), 111–122.
24. S. Yu. Lukashchuk, “An approximate group classification of a perturbed subdiffusion equation”, *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.*, **20**:4 (2016), 603–619. DOI: 10.14498/vsgtu1520 (In Russ.).
25. A. V. Luikov, *Analytical Heat Diffusion Theory*, Academic Press, New York, 1968, 685 p.
26. A. V. Kostanovskiy, M. E. Kostanovskaya, “A criterion of applicability of the parabolic heat conduction equation”, *Tech. Phys. Lett.*, **34**:6 (2008), 500–502.
27. T. Q. Qiu, C. L. Tien, “Heat Transfer Mechanisms During Short-Pulse Laser Heating of Metals”, *J. Heat Transfer.*, **115**:4 (1993), 835–841. DOI: 10.1115/1.2911377.
28. H. D. Wang, B. Y. Cao, Z. Y. Guo, “Non-Fourier Heat Conduction in Carbon Nanotubes”, *J. Heat Transfer*, **134**:5 (2012), 051004.
29. W. Roetzel, N. Putra, S. K. Das, “Experiment and analysis for non-Fourier conduction in materials with non-homogeneous inner structure”, *Int. J. Therm. Sci.*, **42**:6 (2003), 541–552.
30. A. I. Zhmakin, “Heat Conduction Beyond the Fourier Law”, *Tech. Phys.*, **66**:1 (2021), 1–22. DOI: 10.21883/JTF.2021.01.50267.207-20.
31. C. Cattaneo, “A form of heat equation which eliminates the paradox of instantaneous propagation”, *Comptes Rendus de l’Academie des Sciences*, **247** (1958), 431–433.
32. P. Vernotte, “Paradoxes in the continuous theory of the heat equation”, *Comptes Rendus de l’Academie des Sciences*, **246** (1958), 3154–3155.
33. D. Y. Tzou, “A unified field approach for heat conduction from macro to micro-scales”, *ASME J. Heat Transfer.*, **117** (1995), 8–16. DOI: 10.1115/1.2822329.
34. H.-Y. Xu, X.-Y. Jiang, “Time fractional dual-phase-lag heat conduction equation”, *Chin. Phys. B.*, **24**:3 (2015), 034401. DOI: 10.1088/1674-1056/24/3/034401.
35. H. Sobhani, A. Azimi, A. Noghrehabadi, M. Mozafarifard, “Numerical study and parameters estimation of anomalous diffusion process in porous media based on variable-order time fractional dual-phase-lag model”, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, **83**:7 (2023), 679–710. DOI: 10.1080/10407782.2022.2157915.
36. Q. Zhuang, B. Yu, X. Jiang, “An inverse problem of parameter estimation for time-fractional heat conduction in a composite medium using carbon–carbon experimental data”, *Phys. B: Condens. Matter.*, **456** (2015), 9–15. DOI: 10.1016/j.physb.2014.08.011.

37. M. H. Fotovvat, Z. Shomali, “A time-fractional dual-phase-lag framework to investigate transistors with TMTC channels (TiS₃, In₄Se₃) and size-dependent properties”, *Micro and Nanostructures*, **168** (2022), 207304. DOI: 10.48550/arXiv.2203.06523.
38. S. Yu. Lukashchuk, “A semi-explicit algorithm for parameters estimation in a time-fractional dual-phase-lag heat conduction model”, *Modelling*, **5**:3 (2024), 776–796. DOI: 10.3390/modelling5030041.
39. A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam, 2006, 523 p.
40. S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives: theory and applications*, Gordon and Breach, New York, 1993, 976 p.
41. I. Sh. Akhatov, R. K. Gazizov, N. Kh. Ibragimov, “Nonlocal symmetries. Heuristic approach”, *J. Soviet Math.*, **55**:1 (1991), 1401–1450.

Submitted 23.09.2024; Revised 10.12.2024; Accepted 26.02.2025

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.