DOI 10.15507/2079-6900.26.202404.376-391 ISSN 2079-6900 (Print)
Оригинальная статья ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.925.51

Об устойчивости относительно части переменных в некоторых критических случаях

Косов А. А.

Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН (ИДСТУ СО РАН) (Иркутск, Российская Федерация)

Аннотация. Рассматривается задача об устойчивости относительно части переменных и критических случаях, когда необходимо принимать во внимание нелинейные слагаемые в разложениях правых частей уравнений в ряды. Эта задача является нелокальной из-за наличия неконтролируемых переменных, устойчивость по которым не анализируется и имеет ряд особенностей, затрудняющих исследование по сравнению с аналогичной задачей об устойчивости по всем переменным. Обсуждается аналог принципа сведения Ляпунова применительно к данной задаче. Выделены две ситуации, различающиеся характером вхождения критических переменных в уравнения для некритических переменных. Предложены признаки устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных, устанавливаемые на основе аналогичных свойств вспомогательных систем меньшей размерности по сравнению с исходной. Для случая нескольких нулевых корней характеристического уравнения системы линейного приближения получены условия асимптотической устойчивости относительно части переменных, устанавливаемые по выделяемым устойчивым подсистемам с однородной правой частью. Для доказательства используются знакопостоянные скалярные функции Ляпунова, а также векторные функции Ляпунова–Матросова и метод сравнения. Для сопоставления с известными результатами приводится ряд примеров, показывающих эффективность применения доказанных теорем.

Ключевые слова: нелинейные дифференциальные уравнения, устойчивость относительно части переменных, критические случаи

Для цитирования: Косов А. А. Об устойчивости относительно части переменных в некоторых критических случаях // Журнал Средневолжского математического общества. 2024. Т. 26, № 4. С. 376–391. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202404.376-391

Об авторе:

Косов Александр Аркадьевич, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН (664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1352-1828, kosov_idstu@mail.ru

Original article

MSC2020 34D20, 34H15, 70E50

On Stability with Respect to Part of Variables in some Critical Cases

A. A. Kosov

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (Irkutsk, Russian Federation)

Abstract. We consider the problem of stability with respect to a part of variables in critical cases, when it is necessary to take into account nonlinear summands in series expansions of the right-hand sides of equations. This problem is nonlocal because of presence of uncontrolled variables (the stability with respect to them is not analyzed), and has a number of features that complicate the study in comparison with the analogous problem of stability with respect to all variables. We discuss an analogue of the Lyapunov reduction principle as applied to this problem. Two situations, differing in the way for critical variables entering the equations for non-critical variables, are distinguished. We propose the signs of stability, asymptotic stability and instability with respect to a part of variables. They are established basing on similar properties of auxiliary systems of smaller dimension. For the case when the characteristic equation for the linear approximation system has several zero roots we obtain the conditions of asymptotic stability with respect to a part of variables, which are established on the basis of stable subsystems with homogeneous right-hand side. For the proof, the sign-constant scalar Lyapunov functions as well as vector Lyapunov – Matrosov functions and the comparison method are used. In order to compare our results with known ones, we present a number of examples that show the effectiveness of the application of the proved theorems.

Keywords: nonlinear differential equations, stability with respect to a part of variables, critical cases

For citation: *A. A. Kosov.* On Stability with Respect to Part of Variables in some Critical Cases. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 26:4(2024), 376–391. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202404.376-391

About the author:

Alexander A. Kosov, Ph. D. (Mathematics and Physics), Leading researcher, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (134 Lermontov Str., Irkutsk 664033, Russian Federation), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1352-1828, kosov_idstu@mail.ru

1. Введение

Задача об устойчивости движения относительно части переменных в критических случаях имеет ряд особенностей, затрудняющих исследование по сравнению с аналогичной задачей по отношению ко всем координатам. Поэтому имеется сравнительно небольшое число публикаций по названной задаче. Случай одного нулевого корня рассматривался в [1]. В [2] изучался случай k пар чисто мнимых корней. В [3–4] на основе установления асимптотической эквивалентности по отдельным координатам с решениями системы линейного приближения были получены условия устойчивости (неустойчивости) по части переменных в случае кратного нулевого корня с кратными элементарными делителями. Случай $2n$ нулевых корней с $2n$ группами решений рассматривался в [5].

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{w} = Pw + F(w,z), \quad \dot{z} = Qw + Sz + f(w,z), \tag{2.1}$$

где $w \in \mathbb{R}^N$ — вектор размерности $N = k + n$, составленный из тех компонент вектора состояния системы, относительно которых требуется установить свойства устойчивости; $z \in \mathbb{R}^p$ — вектор размерности p, включающий те компоненты вектора состояния, по которым свойства устойчивости не анализируются; P, Q, S — постоянные матрицы соответствующих размерностей; $F(w,z)$, $f(w,z)$ — вектор-функции размерностей N и p соответственно, компоненты которых представляют собой не содержащие линейных слагаемых ряды по степеням w_i и z_j, абсолютно сходящиеся в области $\Gamma_1 = \{(w,z) : ||w|| < H_1 \leq +\infty, ||z|| \leq H_2 < \infty\}$ равномерно относительно z. Будем считать также, что все решения системы (2.1) z — ограничены, т. е. на всех возмущенных движениях $||z(t)|| \leq H_2 < \infty$ (в частности, это заведомо так в случае, когда переменные z_j угловые по модулю 2π).

Предположим, что функция $F(w,z)$ удовлетворяет в области Γ_1 условию

$$||F(w,z)|| \leq r_1 ||w||, \tag{2.2}$$

где r_1 — достаточно малое положительное число, т. е. $r_1 = r_1(H_1) \to 0$ при $H_1 \to 0$ (таким образом, область Γ_1 всегда можно выбрать так, чтобы r_1 было достаточно малым числом).

При указанных условиях вопрос об устойчивости нулевого решения $w = 0$, $z = 0$ системы (2.1) по переменным w в широком классе случаев решается по знакам вещественных частей $Re\,\lambda_j(P)$ собственных чисел $\lambda_j(P)$ матрицы P: если $Re\,\lambda_j(P) < 0$, $j = \overline{1,N}$, то нулевое решение системы (2.1) асимптотически w – устойчиво [6]; если для некоторого $1 \leq i \leq N$ будет $Re\,\lambda_i(P) > 0$, то нулевое решение системы (2.1) w–неустойчиво [1]. Такие случаи названы в [1] некритическими случаями задачи об устойчивости относительно части переменных. Если же $Re\,\lambda_j(P) \leq 0$, $j = \overline{1,N}$, причем для некоторого $1 \leq i \leq N$ выполняется равенство $Re\,\lambda_i(P) = 0$, то вопрос о w–устойчивости нулевого решения системы (2.1) линейным приближением не решается [1], и требуется рассмотрение слагаемых более высоких порядков, входящих в разложения правых частей (2.1) в ряды. Такие случаи названы в [1] критическими случаями задачи об устойчивости по части переменных. Основная цель данной статьи состоит в том, чтобы получить достаточные условия устойчивости по части переменных для некоторых критических случаев.

Для решения задачи об устойчивости по всем переменным в критических случаях А. М. Ляпуновым был предложен метод [7–8], названный впоследствии принципом сведения Ляпунова. Основная идея этого метода состоит в том, чтобы свести задачу об устойчивости для исходной системы к аналогичной задаче для некоторой вспомогательной системы меньшей размерности, иногда называемой «критической», «укороченной», «модельной» и т. п. ([9], с. 22). Принцип сведения Ляпунова, являющийся основным методом исследования критических случаев, получил существенное обобщение и развитие в работах [9–14]. Предположим, что матрица P имеет $k \geq 1$ собственных чисел с нулевыми и $n \geq 1$ с отрицательными вещественными частями. Следуя основной идее указанных выше работ, с помощью не особого линейного преобразования $w = T\overline{w}$, где вектор $\overline{w}$ размерности $N = k+n$ представляет собой вектор $\overline{w} = \mathrm{col}(x, y)$, составленный из векторов $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^n$, приведем систему (2.1) к виду

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P_{11}x + P_{12}y + X(x, y, z), \\ \dot{y} &= P_{22}y + Y(x, y, z), \\ \dot{z} &= P_{31}x + P_{32}y + P_{33}z + Z(x, y, z), \end{aligned} \tag{2.3}$$

где P_{ij} — постоянные матрицы соответствующих размерностей, причем $Re\,\lambda_j(P_{11}) = 0$, $Re\,\lambda_i(P_{22}) < 0$, а вектор-функции X, Y, Z соответствующих размерностей представляют собой ряды по степеням x_i, y_j, z_m, не содержащие линейных членов, причем для X, Y выполняются условия типа (2.2).

Очевидно, что задача о $w-$устойчивости нулевого решения системы (2.1) эквивалентна задаче о $(x, y)-$устойчивости решения $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ системы (2.3). Введем обозначения: $\overline{X}(x, z) = P_{11}x + X(x, 0, z)$, $\overline{Y}(x, z) = Y(x, 0, z)$, $\overline{Z}(x, z) = P_{31}x + P_{33}z + Z(x, 0, z)$, $\overline{\overline{X}}(x, y, z) = P_{11}x+P_{12}y+X(x, y, z)-\overline{X}(x, z)$, $\overline{\overline{Y}}(x, y, z) = Y(x, y, z)-\overline{Y}(x, z)$, $\overline{\overline{Z}}(x, y, z) = P_{31}x+P_{32}y+P_{33}z+Z(x, y, z)-\overline{Z}(x, z)$. Тогда систему (2.3) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \overline{X}(x, z) + \overline{\overline{X}}(x, y, z), \\ \dot{y} &= P_{22}y + \overline{Y}(x, z) + \overline{\overline{Y}}(x, y, z), \\ \dot{z} &= \overline{Z}(x, z) + \overline{\overline{Z}}(x, y, z). \end{aligned} \tag{2.4}$$

При этом нетрудно видеть, что в области $\Gamma_2 = \{(x, y, z) : ||x||+||y|| < H_1, ||z|| \leq H_2 < +\infty\}$ будут выполняться условия:

$$||\overline{\overline{X}}(x, y, z)|| + ||\overline{\overline{Z}}(x, y, z)|| \leq c_1||y||, \quad ||\overline{Y}(x, z)|| \leq c_2||x||, \quad ||\overline{\overline{Y}}(x, y, z)|| \leq r_2||y||, \tag{2.5}$$

где c_1, c_2 и r_2 – положительные постоянные, причем r_2 можно считать достаточно малой. В качестве «укороченной» для системы (2.4) естественно рассматривать систему

$$\dot{x} = \overline{X}(x, z), \quad \dot{z} = \overline{Z}(x, z). \tag{2.6}$$

Таким образом, задача об устойчивости по части переменных в критических случаях может быть сформулирована следующим образом.

Задача А. Указать условия, при выполнении которых $x-$устойчивость (асимптотическая $x-$устойчивость, $x-$неустойчивость) нулевого решения $x = 0$, $z = 0$ системы (2.6) влечет $(x, y)-$устойчивость (соответственно асимптотическую $(x, y)-$устойчивость, $(x, y)-$неустойчивость), правые части которой удовлетворяют в области Γ_2 условиям (2.5), а все решения $z-$ограничены $||z(t)|| \leq H_2 < +\infty$.

Аналогичную задачу можно поставить и для систем более общего вида, чем (2.4).

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \overline{X}(t,x,z) + \overline{\overline{X}}(t,x,y,z), \\ \dot{y} &= P(t)y + \overline{Y}(t,x,z) + \overline{\overline{Y}}(t,x,y,z), \\ \dot{z} &= \overline{Z}(t,x,z) + \overline{\overline{Z}}(t,x,y,z), \end{aligned} \tag{2.7}$$

которая удовлетворяет следующим условиям:

а) правые части непрерывны в области $\Gamma_3 = \{(t,x,y,z) : ||x|| + ||y|| < H_1\}$, обеспечивают в этой области единственность и $z-$продолжимость [15] решений;

б) матрица $P(t)$ ограничена и такова, что нулевое решение линейной системы $\dot{y} = P(t)y$ экспоненциально устойчиво, т. е. для каждого решения $y(t,y_0,t_0)$ этой системы имеет место оценка $y(t,y_0,t_0) \le \beta_1||y_0|| \exp(-\beta_2(t-t_0))$, где β_1 и β_2 — положительные постоянные;

в) $||\overline{\overline{X}}(t,x,y,z)|| + ||\overline{\overline{Z}}(t,x,y,z)|| \le c_1||y||$, $||\overline{Y}(t,x,z)|| \le c_2||x||$, $||\overline{\overline{Y}}(t,x,y,z)|| \le r_2||y||$, где c_1, c_2 и r_2 – положительные постоянные, причем r_2 можно считать достаточно малой;

г) система (2.7) имеет нулевое решение $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Задача Б. Указать условия, при выполнении которых $x-$устойчивость (асимптотическая $x-$устойчивость, $x-$неустойчивость) нулевого решения $x = 0$, $z = 0$ системы

$$\dot{x} = \overline{X}(t,x,z), \quad \dot{z} = \overline{Z}(t,x,z). \tag{2.8}$$

влечет (x,y) – устойчивость (соответственно асимптотическую $(x,y)-$устойчивость, $(x,y)-$неустойчивость) нулевого решения системы (2.7), правые части которой удовлетворяют в области Γ_3 условиям а)–г).

Задачи А и Б будем считать основными, поскольку, как показано выше, задача об устойчивости по части переменных в критических случаях [1] сводится к ним. При решении этих задач будем различать два случая. Первый случай, когда $\overline{Y}(t,x,z) \equiv 0$ (т. е. критические переменные слабо влияют на поведение некритических переменных). Второй случай, когда $\overline{Y}(t,x,z) \ne 0$. Рассмотрим сначала более простой, первый случай.

3. Случай, когда $\overline{Y}(t,x,z) \equiv 0$

В этом случае очевидно, что множество $M = \{(x,y,z) : ||y|| = 0\}$ является инвариантным множеством для системы (2.7), и движения на этом множестве описываются системой (2.8). Отсюда сразу вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 3.1. [16] *Если правые части системы* (2.7) *удовлетворяют условиям а)–г) и* $\overline{Y}(t,x,z) \equiv 0$, *то* $x-$*неустойчивость нулевого решения* $x = 0$, $z = 0$ *системы* (2.8) *влечет* $x-$*неустойчивость нулевого решения* $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ *системы* (2.7).

Теперь рассмотрим ситуацию, когда нулевое решение системы (2.8) асимптотически $x-$устойчиво.

Т е о р е м а 3.2. *Пусть правые части системы* (2.7) *удовлетворяют в области* Γ_3 *условиям* а)– г), *условиям* [17], *обеспечивающим существование предельных систем,* $\overline{Y}(t,x,z) \equiv 0$ *и пусть все решения равномерно* z *– ограничены в* Γ_3. *Тогда, если нулевое решение* $x = 0$, $z = 0$ *системы* (2.8) *равномерно асимптотически* x *– устойчиво в целом по* z, *то нулевое решение* $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ *системы* (2.7) *равномерно асимптотически* (x,y) *– устойчиво.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия б) следует [18], что существует квадратичная форма $V_2 = V_2(t,y)$ переменных y, удовлетворяющая условиям

$$l_1||y||^2 \leq V_2(t,y) \leq l_2||y||^2, \quad ||grad_y V_2(t,y)|| \leq l_3||y||, \quad \dot{V}\bigg|_{\dot{y}=P(t)y} \leq -l_4||y||^2. \tag{3.1}$$

Учитывая условия в) и (3.1) для производной $\dot{V}_2$ функции $V_2(t,y)$, в силу системы (2.7) получим в области Γ_3 оценку

$$\dot{V}_2 \leq -W = -\gamma V_2, \tag{3.2}$$

где $\gamma = l_4 l_2^{-1} - l_3 l_1^{-1} r_2 > 0$ при достаточно малом $r_2 > 0$. Для знакопостоянных функций $V_2(t,y) \geq 0$ и $W(t,y) \geq 0$ находим множества $M = V_2^{-1}(\infty,0) = \{(x,y,z) : ||y|| = 0\}$, $M_{(x,y)} = \{(x,y,z) : ||x|| = ||y|| = 0\}$, $W^{-1}(\infty,0) = \{(x,y,z) : ||y|| = 0\} = M$. На множестве M система (2.7) принимает вид (2.8), поэтому из условий теоремы следует, что множество $M_{(x,y)}$ равномерно асимптотически устойчиво относительно множества M, функция $V_2(t,y)$ допускает бесконечно малый высший предел, а множество $W^{-1}(\infty,0) \setminus M = M \setminus M = \varnothing$ и поэтому не содержит целых траекторий предельных к (2.7) систем.

Таким образом, выполнены все условия Теоремы 3 из [19], на основании которой нулевое решение системы (2.7) равномерно асимптотически (x,y) – устойчиво.

П р и м е р 3.1. Рассмотрим трехмерную систему в критическом случае одного нулевого корня

$$\dot{x} = -x^3 + 4yz, \quad \dot{y} = -y + y^2xz, \quad \dot{z} = z(1 - z^2). \tag{3.3}$$

Покажем, что нулевое решение асимптотически (x,y) – устойчиво. Легко проверить, что для системы (3.3) выполнены все условия Теоремы 2.2, на основании которой и получаем требуемое. Отметим, что Теорема 4 из [1] здесь неприменима, поскольку функция $V = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}y^2$ не является для системы (3.3) функцией Ляпунова в области $\{|x| + |y| < h, |z| \leq 1\}$, сколь бы малым ни выбиралось число $h > 0$. Действительно, на кривой $y = x^3$ получаем, что производная $\dot{V} = 2x^6 - 4x^6z - x^{10}z$ при $z > \frac{1}{2}$ и достаточно малых $|x| > 0$ принимает значения одного знака с функцией V.

Рассмотрим теперь случай, когда нулевое решение системы (2.8) является x – устойчивым, но не асимптотически.

Т е о р е м а 3.3. *Пусть правые части системы* (2.7) *удовлетворяют в области* Γ_3 *условиям* а)–г) *и* $\overline{Y}(t,x,z) \equiv 0$. *Тогда если нулевое решение системы* (2.7) x *– устойчиво, причем это установлено на основании теоремы В. В. Румянцева* [20] *с помощью функции Ляпунова* $V_1 = V_1(t,x,z)$, *удовлетворяющей в области* Γ_3 *условию*

$$||grad_x V_1(t,x,z)|| + ||grad_z V_1(t,x,z)|| \leq l < +\infty, \tag{3.4}$$

то нулевое решение системы (2.7) (x,y) *– устойчиво.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следуя [21], построим двухкомпонентную вектор-функцию Ляпунова (ВФЛ). В качестве первой компоненты ВФЛ возьмем функцию $V_1(t,x,z)$, указанную в условиях Теоремы 2.3, а в качестве второй компоненты – квадратичную форму $V_2(t,y)$, построенную при доказательстве Теоремы 2.2. Для производных $\dot{V}_1$ и $\dot{V}_2$ в силу системы (2.7) на основании условий б), (3.1), (3.2), (3.4), получаем в области Γ_3 оценки

$$\dot{V}_1 \le d\sqrt{V_2}, \quad \dot{V}_2 \le -\gamma\sqrt{V_2}, \tag{3.5}$$

где $d = 2lc_1 l_1^{-1/2} > 0$, а $\gamma > 0$ — то же, что и в (3.2). Соответствующая (3.5) система сравнения имеет вид

$$\dot{u}_1 = d\sqrt{u_2}, \quad \dot{u}_2 = -\gamma u_2. \tag{3.6}$$

Легко проверить [21], что правые части системы (3.6) удовлетворяют условию Важевского, а нулевое решение этой системы равномерно устойчиво.

Таким образом, выполнены все условия теоремы об устойчивости по части переменных с ВФЛ ([15], Теорема 3), на основании которой нулевое решение системы (2.7) будет (x,y)−устойчиво.

Рассмотрим теперь пример, являющийся некоторым обобщением примера 1 из [16].

П р и м е р 3.2. Рассмотрим механическую систему с $n+m+p$ обобщенными координатами $(q_1,\ldots,q_n,Q_1,\ldots,Q_m,Q_{m+1},\ldots,Q_{m+p})$, $\tilde{Q} = \mathrm{col}(Q_1,\ldots,Q_m)$, кинетической энергией $T = (q,\tilde{Q},\dot{q},\dot{Q}) = T^{(1)}(q,\tilde{Q},\dot{q}) + T^{(2)}(\tilde{Q},\dot{Q})$ ($T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ — определенно-положительные квадратичные формы $\dot{q}$ и $\dot{Q}$ соответственно), потенциальной энергией $U(q,\tilde{Q}) = U_2^{(1)}(q) + U^{(2)}(\tilde{Q})$, где $U_2^{(1)}(q)$ — определенно-положительная квадратичная форма, а $U^{(2)}(\tilde{Q})$ — некоторая аналитическая функция, которая, в частности, может быть однородной формой второй или более высокой степени.

Предположим, что на систему действуют гироскопические силы $g_i = g_i(\dot{q})$, $i=\overline{1,n}$ и $G_j = G_j(\dot{Q})$, $j = \overline{1,m+p}$, диссипативные силы $d_i = d_i(\dot{q})$,$i = \overline{1,n}$ и $D_j = D_j(\dot{Q})$, $j = \overline{1,m+p}$, а также некоторые дополнительные силы $F_i^{(1)} = F_i^{(1)}(q,\dot{q},Q,\dot{Q})$, $i = \overline{1,n}$ и $F_j^{(2)} = F_j^{(2)}(q,\dot{q},Q,\dot{Q})$, $i = \overline{1,m+p}$, т. е. уравнения движения имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^{(1)}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T^{(1)}}{\partial q_i} = -\frac{\partial U_2^{(1)}}{\partial q_i} + g_i + d_i + F_i^{(1)}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{3.7}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^{(2)}}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial T^{(1)}}{\partial Q_j} = -\frac{\partial U^{(2)}}{\partial Q_j} + G_j + D_j + F_j^{(2)}, \quad j = \overline{1,m+p}, \tag{3.8}$$

В этих уравнениях

$$g_i = \sum_{s=1}^{n} g_{is}\dot{q}_s, \quad g_{is} = -g_{si}, \quad i = \overline{1,n}, \quad G_i = \sum_{s=1}^{m+p} G_{js}\dot{Q}_1, \quad G_{js} = -G_{sj}, \quad j = \overline{1,m+p},$$

$$d_i = -\frac{\partial f^{(1)}}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = \overline{1,n}, \quad D_j(\dot{Q}) = -\frac{\partial f^{(2)}}{\partial \dot{Q}_j}, \quad j = \overline{1,m+p},$$

где $f^{(1)} = f^{(1)}(\dot{q})$ — определенно-положительная квадратичная форма, $f^{(2)} = f^{(2)}(\dot{Q})$ — неотрицательная квадратичная форма, дополнительные силы $F^{(1)} = F^{(1)}(q,\dot{q},Q,\dot{Q})$ и $F^{(2)} = F^{(2)}(q,\dot{q},Q,\dot{Q})$ удовлетворяют в области

$$\Gamma_4 = \{(q,\dot{q},Q,\dot{Q}) : ||q|| + ||\dot{q}|| + ||\tilde{Q}|| + ||\dot{Q}|| \le H_4 < +\infty\}$$

условиям

$$||F^{(1)}(q,\dot q,Q,\dot Q)|| \le a_1\left(||q||+||\dot q||\right)^{1+\alpha}, \quad \alpha>0, \quad a_1>0,$$
$$||F^{(2)}(q,\dot q,Q,\dot Q)|| \le a_2\left(||q||+||\dot q||\right), \quad a_2>0.$$

Отметим, что если $p=0$, $Q=\tilde Q$, $T^{(2)}$ не зависит от $\tilde Q$, $U^{(2)}(Q)$ квадратичная форма, $f^{(2)}(\dot Q)\equiv 0$, функции $F_j^{(2)}$ не содержат линейных по q, $\dot q$ членов, то уравнения (3.7), (3.8) переходят в рассмотренные в примере 1 из [16]. В системе (3.7), (3.8) переменные $Q_{m+1},\dots,Q_{m+p}$ выступают в роли неконтролируемых переменных z, устойчивость относительно которых не анализируется, переменные q, $\dot q$ играют роль некритических переменных y, а переменные $\tilde Q$, $\dot Q$ являются критическими переменными x.

Уравнения линейного приближения для (3.7) записываются так:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_0^{(1)}}{\partial \dot q_i} = -\frac{\partial U_2^{(1)}}{\partial q_i} + \sum_{s=1}^{n} g_{is}\dot q_s - \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \dot q_i}, \quad T_0^{(1)} = T_0^{(1)}(0,0,\dot q), \quad i=\overline{1,n}$$

и имеют экспоненциально устойчивое нулевое решение $q=\dot q=0$ [16].

Полагая в (3.8) $q=\dot q=0$, получим систему

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^{(2)}}{\partial \dot Q_j} - \frac{\partial T^{(1)}}{\partial Q_j} = -\frac{\partial U_2^{(2)}}{\partial Q_i} + G_j + D_j, \quad j=\overline{1,m+p}. \tag{3.9}$$

Взяв в качестве функции Ляпунова для системы (3.9) полную энергию $V=T^{(2)}+U^{(2)}$, получим [6] для производной в силу системы следующее выражение:

$$\dot V = -2f^{(2)}(\dot Q) \le 0. \tag{3.10}$$

При этом, очевидно, что в области Γ_4 все частные производные $\frac{\partial V}{\partial Q_j}$, $\frac{\partial V}{\partial \dot Q_j}$ ограничены. На основании Теоремы 2.3 получаем, что если функция $U^{(2)}(\tilde Q)$ определенно-положительная, то состояние равновесия $q=\dot q=0$, $Q=\dot Q=0$ системы (3.7), (3.8) устойчиво по q, $\dot q$, $\tilde Q$, $\dot Q$.

Далее будем считать, что квадратичная форма $f^{(2)}(\dot Q)$ положительно определена и, следовательно, производная в силу системы (3.10) – отрицательно определенная форма относительно скоростей $\dot Q$. Предположим также, что из каких-либо соображений известно, что координаты $Q_{m+1},\dots,Q_{m+p}$ на всех возмущенных движениях ограничены. Последнее условие выполняется, например, в том случае, когда эти координаты угловые по модулю 2π.

Если функция $U^{(2)}(\tilde Q)$ определенно-положительна и в множестве $U^{(2)}(\tilde Q)>0$ нет состояний равновесия системы (3.9), то, как показано в [6], решение $Q=\dot Q=0$ системы (3.9) будет равномерно асимптотически устойчиво по $\tilde Q$ и $\dot Q$, причем в целом по $Q_{m+1},\dots,Q_{m+p}$, поскольку функция $V=T^{(2)}+U^{(2)}$ допускает в области Γ_4 бесконечно малый высший предел по $\tilde Q$ и $\dot Q$. Применяя теперь теорему 2.2, получаем, что состояние равновесия $q=\dot q=0$, $Q=\dot Q=0$ системы (3.7), (3.8) равномерно асимптотически устойчиво по q, $\dot q$, $\tilde Q$, $\dot Q$.

Если же функция $U^{(2)}(\tilde Q)$ в любой окрестности точки $\tilde Q=0$ может принимать отрицательные значения, а в множестве $U^{(2)}(\tilde Q)<0$ нет состояний равновесия системы (3.9), то из (3.10) на основании Теоремы 3 из [6] следует, что решение $Q=\dot Q=0$ системы (3.9) неустойчиво по переменным $\tilde Q$ и $\dot Q$, а тогда по Теореме 2.1 положение равновесия $q = \dot{q} = 0$, $Q = \dot{Q} = 0$ системы (3.7), (3.8) также неустойчиво по этим переменным $\tilde{Q}$ и $\dot{Q}$.

Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда $\overline{Y}(t,x,z) \neq 0$. Для этого случая будут указаны условия, при выполнении которых из равномерной асимптотической $x-$устойчивости нулевого решения системы (2.8) будет следовать равномерная асимптотическая $(x,y)-$устойчивость нулевого решения системы (2.7). Неустойчивость и неасимптотическая устойчивость здесь не рассматриваются.

4. Случай, когда $\overline{Y}(t,x,z) \neq 0$

Далее будем считать, что в области Γ_3 выполняется условие

$$||\overline{Y}(t,x,z)|| < b(||x||), \tag{4.1}$$

где $b(\cdot) \in \mathcal{K}$ — функция класса Хана. Предположим, что нулевое решение системы (2.8) равномерно асимптотически $x-$устойчиво, причем это установлено на основании Теоремы 19 из [15] с помощью функции Ляпунова $V_1 = V_1(t,x,z)$, удовлетворяющей в области Γ_3 условиям (3.4) и

$$a(||x||) \leq V_1(t,x,z) \leq a_1(||x|| + ||z||), \quad \dot{V}_1\Big|_{(2.8)} \leq -c(V_1), \tag{4.2}$$

где $a(\cdot)$, $a_1(\cdot)$ и $c(\cdot)$ — функции класса Хана. Тогда для этой функции V_1 и функции $V_2 = V_2(t,y)$, удовлетворяющей условиям (3.1), на основании б), в), (3.1), (3.4) и (4.2) получим в области Γ_3 оценки производных $\dot{V}_1$ и $\dot{V}_2$ в силу системы (2.7)

$$\dot{V}_1 \leq -c_1(V_1) + d\sqrt{V_2}, \quad \dot{V}_2 \leq -\gamma V_2 + b_1(V_1)\sqrt{V_2}, \tag{4.3}$$

где $\gamma > 0$ и $d > 0$ — те же, что в (3.5), $b_1(r) = l_3 l_1^{-1/2} b(a^{-1}(r)) \in \mathcal{K}$ — функция класса Хана, в которой $a^{-1}(r) \in \mathcal{K}$ есть обратная функция для $a(r) \in \mathcal{K}$. Соответствующая (4.3) система сравнения имеет вид

$$\dot{u}_1 = -c_1(u_1) + d\sqrt{u_2}, \quad \dot{u}_2 = -\gamma u_2 + b_1(u_1)\sqrt{u_2}. \tag{4.4}$$

Правые части (4.4) удовлетворяют условию Важевского в области ($u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$). Из Теоремы 3.1 [22] следует, что для равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения системы (3.4) необходимо и достаточно, чтобы в области $G(r) = \{(u_1,u_2) : 0 < u_i < r\}$, где $r > 0$ — сколь угодно мало, была совместна система неравенств

$$-c_1(u_1) + d\sqrt{u_2} < 0, \quad -\gamma u_2 + b_1(u_1)\sqrt{u_2} < 0. \tag{4.5}$$

Применяя теперь Теорему 23 из [15] об устойчивости при наличии вектор-функции Ляпунова, приходим следующему результату.

Теорема 4.1. *Пусть правые части системы* (2.7) *удовлетворяют условиям* а)–г) *и* (4.1), *а для системы* (2.8) *найдена функция Ляпунова* $V_1 = V_1(t,x,z)$, *удовлетворяющая условиям* (3.4) *и* (4.2). *Тогда если система неравенств* (4.5) *при любом* $r > 0$ *совместна в области* $G(r)$, *то нулевое решение системы* (2.7) *равномерно асимптотически* (x,y) *–устойчиво.*

Замечание 4.1. *Как установлено в* [23], *для широкого класса систем существование функции* $V_1(t,x,z)$, *удовлетворяющей условиям* (3.4) *и* (4.2), *вытекает из равномерной асимптотической* x *–устойчивости нулевого решения системы* (2.7).

Замечание 4.2. *Если функции* $c(r)$ *и* $b_1(r)$ *являются степенными* $c(r) = k_1 r^{\alpha_1}$, $b_1(r) = k_2 r^{\alpha_2}$, *где* k_i, α_i *— положительные постоянные, то система неравенств (4.5) будет совместна, если* $\alpha_2 > \alpha_1$.

Вернемся к системе (2.1). Пусть характеристическое уравнение $\det(P - \lambda E) = 0$ имеет $k \geq 1$ нулевых корней, которым соответствуют простые элементарные делители, и $n \geq 1$ корней с отрицательными вещественными частями. Тогда уравнения движения приводятся к виду (2.4), где разложения функций $\overline{X}_i(x,z)$ в ряды по степеням x_s начинаются с членов не ниже второй степени, а коэффициентами этих разложений являются голоморфные функции переменных z_j.

Предположим, что такие разложения функций $\overline{X}_i(x,z)$ начинаются с однородных форм $\overline{X}_i^{(m)}(x)$ одной и той же нечетной степени $m \geq 3$, коэффициенты которых не зависят от z_j. Рассмотрим систему уравнений, правые части которой – формы $\overline{X}_i^{(m)}(x)$

$$\dot{x} = \overline{X}^{(m)}(x) \tag{4.6}$$

Теорема 4.2. *Пусть система* (2.1) *в критическом случае* k *нулевых корней с простыми элементарными делителями приведена к виду* (2.4), *где разложения функций* $\overline{X}_i(x,z)$ *в ряды по степеням* x_s *начинаются с однородных форм* $\overline{X}_i^{(m)}(x)$ *одной и той же нечетной степени* $m \geq 3$, *коэффициенты которых не зависят от* z_j. *Тогда если нулевое решение однородной системы* (4.6) *асимптотически устойчиво, а разложения функций* $\overline{Y}_j(x,z)$ *в ряды по степеням* x_s *начинаются с членов не ниже* $m+1$*–й степени, то нулевое решение системы* (2.4) *равномерно асимптотически* (x,y) *–устойчиво.*

Доказательство. Как установлено в [24], если нулевое решение системы (4.6) асимптотически устойчиво, то оно будет $t^{-\alpha}$ — устойчивым, т. е. все решения $x(t)$ системы (4.6) удовлетворяют оценкам $||x(t)|| \leq \beta_1 ||x_0||(1+\beta_2 t)^{-\alpha}$, где β_1, β_2, α — положительные числа. Тогда, как показано в [10, с. 107], существует непрерывно дифференцируемая функция $V_1(x)$, удовлетворяющая оценкам

$$A_1||x||^a \leq V_1(x) \leq A_2||x||^a, \quad ||grad_x V_1(x)|| \leq A_3||x||^{a-1}, \quad \dot{V}_1\Big|_{(4.6)} \leq -A_4||x||^{a-1+m}.$$

Здесь A_i и a — положительные числа, причем $a > 1$.

Из условий Теоремы 3.2 следует, что функцию $\overline{X}(x,z)$ можно записать в виде $\overline{X}(x,z) = \overline{X}^{(m)}(x) + \tilde{X}(x,z)$, при этом $\tilde{X}(x,z)$ и $\overline{Y}(x,z)$ будут удовлетворять в области $\Gamma_5 = \{(x,y,z) : ||x|| + ||y|| < H_5, ||z|| \leq H_2 < +\infty\}$ при достаточно малом $H_5 > 0$ условиям $||\tilde{X}(x,z)|| \leq d_1||x||^{m+1}$, $||\overline{Y}(x,z)|| \leq d_2||x||^{m+1}$, где d_1 и d_2 — положительные числа.

Далее, из условия $Re\, \lambda_j(P_{22}) < 0$ следует существование квадратичной формы $V_2(y)$, удовлетворяющей оценкам (3.1). Оставшаяся часть доказательства является простым повторением доказательства Теоремы 3.1 с учетом замечания 3.2 к ней.

Теперь рассмотрим тот случай, когда в разложениях функций $\overline{X}_i(x,z)$ выделены несколько компонент с разными порядками однородности. Пусть вектор критических переменных x представлен двумя компонентами $x = \mathrm{col}(u,v)$, и система (2.4) имеет вид

$$\begin{aligned}
&\dot u = \Phi_1^{(\mu_1)}(u) + \Phi_{12}(u,v,y,z) + \Psi_1(u,v,y,z),\\
&\dot v = \Phi_2^{(\mu_2)}(v) + \Phi_{21}(u,v,y,z) + \Psi_2(u,v,y,z),\\
&\dot y = P_{22}y + Y_1(u,z) + Y_2(v,z) + \overline{\overline{Y}}(x,y,z), \quad \dot z = \overline{Z}(x,z) + \overline{\overline{Z}}(x,y,z).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Здесь $\Phi_1^{(\mu_1)}(u)$ и $\Phi_2^{(\mu_2)}(v)$ однородные вектор-функции порядков μ_1 и μ_2 соответственно, где μ_1 и μ_2 — положительные рациональные числа с нечетными числителями и знаменателями. Вектор-функции, присутствующие в правых частях системы (4.7), будем считать удовлетворяющими в области $\Gamma_6 = \{(u,v,y,z) : ||u|| + ||v|| + ||y|| < H_6 < < +\infty\}$ оценкам

$$\begin{aligned}
||\Phi_{12}(u,v,y,z)|| \le k_{12}||v||^{\alpha_1}, &\quad ||\Phi_{21}(u,v,y,z)|| \le k_{21}||u||^{\alpha_2},\\
||\Psi_1(u,v,y,z)|| \le q_1||y||^{\beta_1}, &\quad ||\Psi_2(u,v,y,z)|| \le q_2||y||^{\beta_2},\\
||Y_1(u,v,y,z)|| \le p_1||u||^{\gamma_1}, &\quad ||Y_2(u,v,y,z)|| \le p_2||u||^{\gamma_2}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Т е о р е м а 4.3. *Пусть для системы* (4.7) *выполнены условия:*

1. *Все собственные значения матрицы P_{22} имеют отрицательные вещественные части.*
2. *Нулевые решения однородных систем $\dot u = \Phi_1^{(\mu_1)}(u)$ и $\dot v = \Phi_2^{(\mu_2)}(v)$ асимптотически устойчивы.*
3. *Справедливы оценки* (4.8)*, причем показатели степеней удовлетворяют неравенствам $\mu_1 < \beta_1 y_1$, $\mu_2 < \beta_2 y_2$, $\mu_1\mu_2 < \min\{\alpha_1\alpha_2,\ \alpha_1\beta_2\gamma_1,\ \alpha_2\beta_1\gamma_2\}$.*

Тогда нулевое решение системы (4.7) *асимптотически* (u,v,y) *–устойчиво.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия 1 следует существование квадратичной формы $V_3(y)$, для которой выполняются оценки, аналогичные оценкам (3.1). Из условия 2 так же, как в доказательстве Теоремы 3.2, выводится существование однородных функций Ляпунова, удовлетворяющих оценкам

$$A_1||u||^a \le V_1(u) \le A_2||u||^a, \quad ||gradV_1(u)|| \le A_3||u||^{a-1}, \quad \dot V_1\Big|_{\dot u = \Phi_1^{(\mu_1)}(u)} \le -A_4||u||^{a-1+\mu_1},$$

$$B_1||v||^a \le V_2(v) \le B_2||v||^b, \quad ||gradV_2(v)|| \le B_3||v||^{b-1}, \quad \dot V_1\Big|_{\dot v = \Phi_2^{(\mu_2)}(v)} \le -B_4||v||^{b-1+\mu_2},$$

Используя оценки (4.8), для производных в силу системы (4.7) получаем

$$\dot V_1 \le -A_4 A_2^{-\frac{a-1+\mu_1}{a}} V_1^{\frac{a-1+\mu_1}{a}} + A_3 A_1^{-\frac{a-1}{a}} V_1^{\frac{a-1}{a}} \left(k_{12} B_1^{-\frac{\alpha_1}{b}} V_2^{-\frac{\alpha_1}{b}} + q_1 l_1^{-\frac{\beta_1}{2}} V_3^{-\frac{\beta_1}{2}} \right),$$

$$\dot V_2 \le -B_4 B_2^{-\frac{b-1+\mu_2}{b}} V_2^{\frac{b-1+\mu_2}{b}} + B_3 B_1^{-\frac{b-1}{b}} V_2^{\frac{b-1}{b}} \left(k_{21} A_1^{-\frac{\alpha_2}{a}} V_1^{-\frac{\alpha_2}{a}} + q_2 l_1^{-\frac{\beta_2}{2}} V_3^{-\frac{\beta_2}{2}} \right),$$

$$\dot{V}_3 \leq -l_4 l_2^{-1} V_3 + l_3 l_1^{-\frac{1}{2}} V_3^{-\frac{1}{2}} \left(p_1 A_1^{-\frac{\gamma_1}{a}} V_1^{\frac{\alpha_1}{a}} + p_2 B_1^{-\frac{\gamma_2}{b}} V_2^{\frac{\gamma_2}{b}} \right).$$

Соответствующая система сравнения имеет вид

$$\dot{U}_1 = -A_4 A_2^{-\frac{a-1+\mu_1}{a}} U_1^{\frac{a-1+\mu_1}{a}} + A_3 A_1^{-\frac{a-1}{a}} U_1^{\frac{a-1}{a}} \left(k_{12} B_1^{-\frac{\alpha_1}{b}} U_2^{-\frac{\alpha_1}{b}} + q_1 l_1^{-\frac{\beta_1}{2}} U_3^{-\frac{\beta_1}{2}} \right),$$

$$\dot{U}_2 = -B_4 B_2^{-\frac{b-1+\mu_2}{b}} U_2^{\frac{b-1+\mu_2}{b}} + B_3 B_1^{-\frac{b-1}{b}} U_2^{\frac{b-1}{b}} \left(k_{21} A_1^{-\frac{\alpha_2}{a}} U_1^{-\frac{\alpha_2}{a}} + q_2 l_1^{-\frac{\beta_2}{2}} U_3^{-\frac{\beta_2}{2}} \right),$$

$$\dot{U}_3 = -l_4 l_2^{-1} U_3 + l_3 l_1^{-\frac{1}{2}} U_3^{-\frac{1}{2}} \left(p_1 A_1^{-\frac{\gamma_1}{a}} U_1^{\frac{\alpha_1}{a}} + p_2 B_1^{-\frac{\gamma_2}{b}} U_2^{\frac{\gamma_2}{b}} \right).$$

Из Теоремы 3.1 [22] следует, что для равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения этой системы сравнения необходимо и достаточно, чтобы в области $G(r) = \{(U_1, U_2, U_3) : 0 < U_i < r\}$, где $r > 0$ – сколь угодно мало, была совместна система неравенств

$$\begin{gathered} -A_4 A_2^{-\frac{a-1+\mu_1}{a}} U_1^{\frac{\mu_1}{a}} + A_3 A_1^{-\frac{a-1}{a}} \left(k_{12} B_1^{-\frac{\alpha_1}{b}} U_2^{-\frac{\alpha_1}{b}} + q_1 l_1^{-\frac{\beta_1}{2}} U_3^{-\frac{\beta_1}{2}} \right) < 0, \\ -B_4 B_2^{-\frac{b-1+\mu_2}{b}} U_2^{\frac{\mu_2}{b}} + B_3 B_1^{-\frac{b-1}{b}} \left(k_{21} A_1^{-\frac{\alpha_2}{a}} U_1^{-\frac{\alpha_2}{a}} + q_2 l_1^{-\frac{\beta_2}{2}} U_3^{-\frac{\beta_2}{2}} \right) < 0, \\ -l_4 l_2^{-1} U_3^{\frac{1}{2}} + l_3 l_1^{-\frac{1}{2}} U_3^{\frac{1}{2}} \left(p_1 A_1^{-\frac{\gamma_1}{a}} U_1^{\frac{\alpha_1}{a}} + p_2 B_1^{-\frac{\gamma_2}{b}} U_2^{\frac{\gamma_2}{b}} \right) < 0. \end{gathered} \tag{4.9}$$

Найдем условия совместности этой системы неравенств на кривой, заданной параметрически следующими равенствами $U_1 = \tau^{am_1}$, $U_2 = \tau^{bm_2}$, $U_3 = \tau^{2m_3}$. Здесь $\tau > 0$ — параметр, а $m_i > 0$ — положительные числа.

Система неравенств (4.9) будет совместна на параметрически заданной кривой при всех достаточно малых значениях параметра $\tau > 0$, если после подстановки мы получим в первых отрицательных слагаемых наименьшие степени τ. Таким образом, приходим к неравенствам

$$\begin{gathered} \mu_1 m_1 < \min\{\alpha_1 m_2, \beta_1 m_3\}, \quad \mu_2 m_2 < \min\{\alpha_2 m_1, \beta_2 m_3\}, \\ m_3 < \min\{\gamma_1 m_1, \gamma_2 m_2\}. \end{gathered} \tag{4.10}$$

Из условия 3 следует, что система неравенств (4.10) имеет положительное решение $m_i > 0$, $i = 1, 2, 3$. Значит, нулевое решение системы сравнения асимптотически устойчиво, а тогда, по Теореме 23 из [15], нулевое решение системы (4.7) асимптотически $(u, v, y)-$устойчиво.

П р и м е р 4.1. Рассмотрим систему из четырех скалярных уравнений

$$\begin{gathered} \dot{u} = -u^3 + v^5 + y^2 \cos^2(z), \quad \dot{v} = -v^3 + Gu^2 + y^2 \sin^2(z), \\ \dot{y} = -y + Qu^2 + v^3 + y^2 \cos^2(z), \quad \dot{z} = Z(u, v, y, z). \end{gathered}$$

Из Теоремы 3.3 следует, что нулевое решение этой системы $(u, v, y)-$устойчиво. В этом примере в уравнениях как для критических, так и для некритических переменных присутствуют слагаемые второго порядка с произвольными коэффициентами G, Q, не являющиеся малыми по сравнению с правыми частями однородных третьего порядка асимптотически устойчивых подсистем $\dot{u} = -u^3$, $\dot{v} = -v^3$. Теорема 3.2 в данном случае неприменима.

П р и м е р 4.2. Из теоремы 6 следует, что нулевое решение системы

$$\dot{u} = -u^3 + vg_1(u, v, y) + yg_2(u, v, y), \quad \dot{v} = -v^3 + y^2 g_3(u, v, z),$$

$$\dot{y} = -y + v^2 g_4(u, v, y)$$

асимптотически устойчиво по Ляпунову, каковы бы ни были непрерывные функции $g_s(u, v, y)$. В этом примере характеристическое уравнение системы линейного приближения имеет двукратный нулевой корень, которому, в зависимости от свойств функции $g_1(u, v, y)$, могут соответствовать как один кратный, так и два простых элементарных делителя. Поэтому исследование устойчивости нулевого решения с помощью методов, разработанных для критического случая двух нулевых корней [8, 12], обязательно потребует привлечения дополнительной информации о функциях $g_s(u, v, y)$.

5. Заключение

В данной статье предложен аналог принципа сведения Ляпунова для задачи частичной устойчивости, и на основе использования знакопостоянных скалярных и векторных функций Ляпунова получены достаточные признаки устойчивости относительно части переменных в критических случаях. Результаты данной статьи, как и всех упомянутых во введении работ, не являются исчерпывающими, поэтому задача анализа частичной устойчивости в критических случаях сохраняет актуальность и представляет интерес для приложений.

Список литературы

1. Прокопьев В. П. Об устойчивости движения относительно части переменных в критическом случае одного нулевого корня // ПММ. 1975. Т. 39, вып. 3. С. 422–426.

2. Щенников В. Н. О частичной устойчивости в критическом случае $2k$ чисто мнимых корней // Дифференциальные и интегральные уравнения: Методы топологической динамики: межвуз. сб. Горький: Горьковский гос. ун-т им. Н. И. Лобачевского, 1985. С. 46–50.

3. Шаманаев П. А. Об устойчивости нулевого решения относительно части переменных по линейному приближению // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19, № 3. С. 374–390. DOI: https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.306.

4. Шаманаев П. А. О частичной неустойчивости нулевого решения нелинейных систем по первому приближению // Журнал Средневолжского математического общества. 2024. Т. 26, № 3. С. 280–293. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202403.1-14.

5. Карасев А. А., Ламоткин А. Е. Об устойчивости по части переменных в критическом случае $2n$ нулевых корней с $2n$ групп решений // Механика. Исследования и инновации (Гомель). 2017. Вып. 10. С. 75–79.

6. Озиранер А. С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных // ПММ. 1973. Т. 37, вып. 4. С. 659–665.

7. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М; Л.: ГИТТЛ, 1950. 472 с.

8. Ляпунов А. М. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1963. 116 с.

9. Веретенников В.Г. Устойчивость и колебания нелинейных систем. М. Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. 320 с.

10. Зубов В. И. Методы А. М. Ляпунова и их применение. Л. ЛГУ. 1957. 241 с.

11. Зубов В. И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л. Машиностроение(Ленингр. отд-ние), 1974. 336 с.

12. Каменков Г. В. Избранные труды в 2 томах. Т. 1. Устойчивость движения. Колебания. Аэродинамика. М.:Наука. 1971. 260 с.

13. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М. Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. 532 с.

14. Плисс В. А. Принцип сведения в теории устойчивости движения // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1964. Т. 28, вып. 6. С. 1297–1324.

15. Озиранер А. С., Румянцев В.В. Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных // ПММ. 1972. Т. 36, вып. 2. С. 364–384.

16. Озиранер А. С. Об устойчивости движения в критических случаях // ПММ. 1975. Т. 39, вып. 3. С. 415–421.

17. Artstein Z. Topological dynamics of an ordinary differential equations // Journal of Differential Equations. 1977. Vol. 23, Issue 2. P. 216–223. DOI: https://doi.org/10.1016/0022-0396(77)90127-9

18. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М. Физматгиз. 1959. 211 с.

19. Косов А. А. К задаче об устойчивости движения относительно части переменных // Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений. Новосибирск. Наука. 1988. С. 185–194.

20. Румянцев В. В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестник Московского университета. Сер. Математика. Механика. Физика. Химия. Астрономия. 1957. № 4. С. 9–16.

21. Матросова Н. И. Вектор-функции Ляпунова в изучении особенного критического случая нулевых корней / Метод функций Ляпунова и его приложения: сборник научных трудов. Новосибирск. Наука. 1984. С. 53–64.

22. Мартынюк А. А., Оболенский А. Ю. Об устойчивости автономных систем Важевского // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16, вып. 8. С. 1392–1407.

23. Озиранер А. С. К вопросу об устойчивости движения относительно части переменных // Вестник МГУ. Серия Математика и механика. 1971. № 1. С. 92–100.

24. Ахметгалеев И. И. Устойчивость систем с однородными отображениями / Метод функций Ляпунова и его приложения: сборник научных трудов. Новосибирск: Наука, 1984. С. 126–137.

Поступила 23.10.2024; доработана после рецензирования 06.11.2024; принята к публикации 27.11.2024

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. V. P. Prokop'ev, "On stability of motion with respect to a part of variables in the critical case of a single zero root", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **39.**:3 (1975), 399-403.

2. V. N. Shchennikov, "On partial stability in the critical case of $2k$ purely imaginary roots", *Differential and integral equations: Methods of topological dynamics*, Gor'kiy state university named after N. I. Lobachevsky, Gor'kiy, 1985, 46-50 (In Russ.).

3. P. A. Shamanaev, "On the stability of the zero solution with respect to a part of variables in linear approximation", *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, **19**:3 (2023), 374-390. DOI: https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.306 (In Russ.).

4. P. A. Shamanaev, "On the partial instability of the zero solution of nonlinear systems to the first approximation", *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Qbshchestva*, **26**:3 (2024), 280-293. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202403.1-14 (In Russ.).

5. A. A. Karasev, A. E. Lamotkin, "On sustainability by the part of variables in the critical case of $2n$ zero roots with $2n$ groups of decisions", *Mechanics. Research and Innovations. Gomel.*, 2017, no. 10, 75-79. (In Russ.).

6. A. S. Oziraner, "On asymptotic stability and instability relative to a part of variables", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.*, **37**:4 (1973), 623-629.

7. A. M. Liapunov, "The general problem of the stability of motion", *International Journal of Control*, **55**:3 (1992), 531–534.

8. A. M. Lyapunov, *Study of one of the special cases of the problem of stability of motion*, Leningrad. State University Press, Leningrad, 1963 (In Russ.), 116 p.

9. V. G. Veretennikov, *Stability and oscillations of nonlinear systems.*, Nauka. Chief Editorial Board of Physical and Mathematical literature, Moscow, 1984. (In Russ.), 320 p.

10. V. I. Zubov, *Methods of A. M. Lyapunov and their application. Transl. prep. under the auspices of the United States Atomic energy commis. Ed. for this Engl. ed. by L. F. Boron.*, P. Noordhoff, Groningen, 1964, 263 p.

11. N. N. Krasovskii, *Stability of motion. Applications of Lyapunov's second method to differential systems and equations with delay. Translated by J.L. Brenner.*, Stanford University Press, Stanford, Calif., 1963, 188 p.

12. V. I. Zubov, "Mathematical methods for the study of automatic control systems", 1962, 328 p.

13. G. V. Kamenkov, *Selected works. Vol. 1. Stability of motion. Oscillations. Aerodynamics.*, Science, Moscow, 1971 (In Russ.), 260 p.

14. I. G. Malkin, *Theory of stability of motion*, Nauka. Chief Editorial Board of Physical and Mathematical literature, Moscow, 1966 (In Russ.), 532 p.

15. V. A. Pliss, "Reduction principle in the theory of stability of motion", *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **28**:6. (1964), 1297–1324 (In Russ.).

16. A. S. Oziraner, "On the stability of motion in critical cases", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **39**:3 (1975), 392-399..

17. Z. Artstein, "Topological dynamics of an ordinary differential equations", *Journal of Differential Equations*, **23**:2 (1977), 216-223. DOI: https://doi.org/10.1016/0022-0396(77)90127-9.

18. A. A. Kosov, "On the problem of stability of motion with respect to a part of variables", *Problems of qualitative theory of differential equations*, 1988, 185 - 194 (In Russ.).

19. V. V. Rumyantsev, "On motion stability with respect to a part of variables", 1957, no. 4, 9–16 (In Russ.).

20. N. I. Matrosova, "Lyapunov vector-functions in the study of the special critical case of zero roots", *Method of Lyapunov functions and its applications.*, Nauka, Novosibirsk, 1984, 53–64 (In Russ.).

21. A. S. Oziraner, V. V. Rumiantsev, "Method of Liapunov functions in the problem stability for motion with respect to a part of the variables", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **36**:2 (1972.), 364–384.

22. A. A.Martynyuk, A. Yu. Obolenskij, "Stability of solutions of autonomous Wazewski systems", *Differential Equations*, **16**:8 (1980), 1392–1407.

23. A. S. Oziraner, "On the question about the stability of motion with respect to a part of variables", *Moscow University Bulletin. Series Mathematics and Mechanics*, 1971, no. 1, 92-100 (In Russ.).

24. I. I. Akhmetgaleev, "Stability of systems with homogeneous mappings", *Method of Lyapunov functions and its applications*, Nauka, Novosibirsk, 1984, 126-137 (In Russ.).

Submitted 23.10.2024; Revised 06.11.2024; Accepted 27.11.2024

The author have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The author declare no conflict of interest.