Математика

DOI 10.15507/2079-6900.26.202404.359-375
Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 514.7

Аттракторы полугрупп, порожденных конечным семейством сжимающих преобразований полного метрического пространства

Багаев А. В.

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

Аннотация. В настоящей работе исследуются свойства полугрупповых динамических систем (G, X), где полугруппа G порождена конечным семейством сжимающих преобразований полного метрического пространства X. Доказано, что такие динамические системы (G, X) всегда имеют единственный глобальный аттрактор $\mathcal{A}$, который представляет собой непустое компактное подмножество в X, при этом $\mathcal{A}$ является единственным минимальным множеством динамической системы (G, X). Показано, что динамическая система (G, X) и динамическая система $(G_{\mathcal{A}}, \mathcal{A})$, полученная сужением действия G на $\mathcal{A}$, не являются чувствительными к начальным условиям. Глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ может иметь как простую, так и сложную структуру. Изучается связность глобального аттрактора $\mathcal{A}$. Найдено условие, при котором $\mathcal{A}$ не является вполне несвязным множеством. В частности, для полугрупп G, порожденных двумя взаимнооднозначными сжимающими отображениями, указано условие связности глобального аттрактора $\mathcal{A}$. Также получены достаточные условия, при которых $\mathcal{A}$ является канторовым множеством. Приведены примеры глобальных аттракторов динамических систем из рассматриваемого класса.

Ключевые слова: полугрупповая динамическая система, глобальный аттрактор, минимальное множество, чувствительность к начальным условиям, система итерированных функций, канторово множество

Для цитирования: Багаев А. В. Аттракторы полугрупп, порожденных конечным семейством сжимающих преобразований полного метрического пространства // Журнал Средневолжского математического общества. 2024. Т. 26, № 4. С. 359–375. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202404.359-375

Об авторе:

Багаев Андрей Владимирович, к.ф.-м.н., доцент кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5155-4175, a.v.bagaev@gmail.com

Original article

MSC2020 28A80

Attractors of semigroups generated by a finite family of contraction transformations of a complete metric space

A. V. Bagaev

National Research University «Higher School of Economics» (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

Abstract. The present paper is devoted to the properties of semigroup dynamical systems (G, X), where the semigroup G is generated by a finite family of contracting transformations of the complete metric space X. It is proved that such dynamical systems (G, X) always have a unique global attractor $\mathcal{A}$, which is a non-empty compact subset in X, with $\mathcal{A}$ being unique minimal set of the dynamical system (G, X). It is shown that the dynamical system (G, X) and the dynamical system $(G_{\mathcal{A}}, \mathcal{A})$ obtained by restricting the action of G to $\mathcal{A}$ both are not sensitive to the initial conditions. The global attractor $\mathcal{A}$ can have either a simple or a complex structure. The connectivity of the global attractor $\mathcal{A}$ is also studied. A condition is found under which $\mathcal{A}$ is not a totally disconnected set. In particular, for semigroups G generated by two one-to-one contraction mappings, a connectivity condition for the global attractor $\mathcal{A}$ is indicated. Also, sufficient conditions are obtained under which $\mathcal{A}$ is a Cantor set. Examples of global attractors of dynamical systems from the considered class are presented.

Keywords: semigroup dynamical system, global attractor, minimal set, sensitivity to initial conditions, system of iterated functions, Cantor set

For citation: *A. V. Bagaev.* Attractors of semigroups generated by a finite family of contraction transformations of a complete metric space. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 26:4(2024), 359–375. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202404.359-375

About the author:

Andrey V. Bagaev, Ph. D. (Phys.-Math.), Associate Professor, Department of Fundamental Mathematics, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5155-4175, a.v.bagaev@gmail.com

1. Введение

Пусть топологическая полугруппа G непрерывно действует на топологическом пространстве X. Тогда пара (G, X) называется полугрупповой динамической системой или просто динамической системой, при этом X называется фазовым пространством.

Важными примерами полугрупповых динамических систем являются каскады, полупотоки, потоки.

К центральным проблемам теории полугрупповых динамических систем можно отнести вопросы существования глобальных аттракторов и минимальных множеств, их описания, а также существования хаоса в таких динамических системах [1–5].

В настоящей работе рассматриваются динамические системы (G, X), где полугруппа G порождена конечным семейством $S = \{f_1, \ldots, f_k\}$ сжимающих отображений полного метрического пространства X. Отметим, что само конечное семейство S называется системой итерированных функций (СИФ), заданной на X.

Теория систем итерированных функций является одним из мощных инструментов построения фракталов и находит широкое применение в различных областях знания ([6–7]). Согласно теореме Хатчинсона [8], для любой СИФ $S = \{f_1, \ldots, f_k\}$, заданной на полном метрическом пространстве X, существует единственное непустое компактное подмножество $\mathcal{A} \subset X$, инвариантное относительно S:

$$f_1(\mathcal{A}) \cup f_2(\mathcal{A}) \cup \ldots \cup f_k(\mathcal{A}) = \mathcal{A}. \tag{1.1}$$

Множество $\mathcal{A}$, называемое аттрактором СИФ S, может иметь как простую структуру, так и быть фракталом.

Любая СИФ S, заданная на X, определяет динамическую систему (G, X), где G – полугруппа, состоящая из всевозможных композиций отображений из S. Обозначим через $\mathfrak{S}$ множество всех таких полугрупповых динамических систем. Целью данной работы является исследование свойств динамических систем из класса $\mathfrak{S}$.

Доказано, что динамическая система (G, X) имеет единственный глобальный аттрактор $\mathcal{A}$, совпадающий с аттрактором СИФ S, причем $\mathcal{A}$ является единственным минимальным множеством динамической системы (G, X) (Теорема 5.1). В частности, динамическая система $(G_{\mathcal{A}}, \mathcal{A})$, полученная сужением действия полугруппы G на $\mathcal{A}$, является минимальной.

Для СИФ известны два алгоритма построения аттракторов: детерменированный и рандомизированный. Теорема 5.1 позволяет применить указанные алгоритмы для визуализации глобальных аттракторов динамических систем из класса $\mathfrak{S}$.

Показано, что динамические системы (G, X) и $(G_{\mathcal{A}}, \mathcal{A})$ не являются чувствительными к начальным условиям (Теорема 6.1).

Одним из важных топологических свойств глобальных аттракторов является его связность. В разделе 7 найдены достаточные условия, при которых глобальный аттрактор не является вполне несвязным (Теорема 7.1). В Следствии 7.1 сформулированы условия, при которых глобальный аттрактор полугруппы, порожденной двумя взаимнооднозначными сжимающими отображениями, является связным. Также получены достаточные условия, при которых глобальный аттрактор является канторовым множеством (Теорема 7.2).

В разделе 8 приведены примеры глобальных аттракторов динамических систем из исследуемого класса $\mathfrak{S}$.

2. Динамические системы, заданные непрерывным действием полугруппы

Напомним основные определения теории полугрупповых динамических систем (см., например, [5]). Пусть G — топологическая полугруппа, X — топологическое пространство. Непрерывным действием G на X называется такое непрерывное отображение

$$\Phi\colon G \times X \to X\colon (g, x) \mapsto g.x \ \forall\ (g, x) \in G \times X,$$

что $g.(h.x) = (gh).x \ \forall\ (g, h, x) \in G \times G \times X$. Если задано непрерывное действие Φ топологической полугруппы G на топологическом пространстве X, то пара (G, X) называется полугрупповой динамической системой или просто динамической системой. Топологическое пространство X называется фазовым пространством. Множество $G.x = \{g.x \mid g \in G\}$ называется орбитой точки $x \in X$.

Пример 2.1. Пусть $f\colon X \to X$ — непрерывное отображение топологического пространства X в себя, $G = \{f^n,\, n \in \mathbb{N}, \mathrm{id}_X\}$. Пара (G, X) называется классической динамической системой или каскадом.

Пример 2.2. Множество $\mathbb{R}^1_+$ всех неотрицательных действительных чисел относительно сложения является моноидом. Непрерывное действие полугруппы $\mathbb{R}^1_+$ на топологическом пространстве X называется полупотоком. Множество $\mathbb{R}^1$ всех действительных чисел по сложению образует группу. Пара $(\mathbb{R}^1, X)$ называется потоком на топологическом пространстве X.

Пусть дана динамическая система (G, X). Если G – топологическая группа, то на X задано отношение эквивалентности: две точки $x, y \in X$ эквивалентны тогда и только тогда, когда они принадлежат одной орбите. Таким образом, совокупность всех орбит образует разбиение X. В случае если же G – топологическая полугруппа, то из условия $G.x \ \cap \ G.y \neq \varnothing$ не следует $G.x = G.y$, то есть множество всех орбит не образует разбиение.

Подмножество $B \subset X$ называется инвариантным, если $g.b \in B \ \forall\ g \in G,\ b \in B$.

Непустое замкнутое инвариантное подмножество $\mathcal{A} \subset X$ называется глобальным аттрактором динамической системы (G, X), если $\overline{G.x} \supset \mathcal{A} \ \forall\ x \in X \backslash \mathcal{A}$, где $\overline{G.x}$ — замыкание орбиты $G.x$.

Непустое замкнутое инвариантное подмножество $\mathcal{A} \subset X$ называется минимальным множеством динамической системы (G, X), если $\overline{G.x} = \mathcal{A} \ \forall\ x \in \mathcal{A}$. Динамическая система (G, X) называется минимальной, если $\overline{G.x} = X \ \forall\ x \in X$, то есть любая орбита полугруппы G всюду плотна в X.

Минимальность множества означает, что $\mathcal{A}$ не содержит собственных замкнутых инвариантных подмножеств. Действительно, пусть $\mathcal{A}'$ — собственное замкнутое инвариантное подмножество в $\mathcal{A}$: $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$. Тогда в силу инвариантности $\mathcal{A}'$ для любого $x \in \mathcal{A}'$ имеем $G.x \subset \mathcal{A}'$. Так как $\mathcal{A}'$ замкнуто, то $\overline{G.x} \subset \overline{\mathcal{A}'} = \mathcal{A}'$. С другой стороны, $\mathcal{A}$ — минимальное, следовательно, $\mathcal{A} = \overline{G.x}$. Таким образом, имеем обратное включение $\mathcal{A} = \overline{G.x} \subset \mathcal{A}'$. Следовательно, $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$.

Теорема 2.1. *Если динамическая система (G, X) имеет глобальный аттрактор $\mathcal{A}$, являющийся минимальным множеством, то он единственен и динамическая система (G, X) не имеет других минимальных множеств, отличных от $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Предположим, что динамическая система (G, X) имеет два различных глобальных аттрактора $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, являющихся минимальными множествами. Тогда существует точка одного аттрактора, не принадлежащая другому. Пусть, например, $x \in \mathcal{A}_1$, но $x \notin \mathcal{A}_2$. Тогда инвариантность $\mathcal{A}_1$ влечет $G.x \subset \mathcal{A}_1$, а в силу замкнутости $\mathcal{A}_1$ имеем $\overline{G.x} \subset \mathcal{A}_1$. Так как $x \in X \backslash \mathcal{A}_2$, а $\mathcal{A}_2$ — глобальный аттрактор, то $\overline{G.x} \supset \mathcal{A}_2$. Таким образом, $\mathcal{A}_2 \subset \overline{G.x} \subset \mathcal{A}_1$, то есть $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1$. Как было сказано выше, минимальное множество $\mathcal{A}_1$ не может содержать собственного замкнутого инвариантного подмножества, поэтому $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1$.

Предположим, что у динамической системы (G, X) есть минимальное множество $\mathcal{M}$, отличное от $\mathcal{A}$. Во-первых, отметим, что $\mathcal{M} \cap \mathcal{A} = \varnothing$. Действительно, если $x \in \mathcal{M} \cap \mathcal{A}$, то в силу минимальности множеств $\overline{G.x} = \mathcal{M}$ и $\overline{G.x} = \mathcal{A}$, отсюда $\mathcal{M} = \mathcal{A}$, что противоречит выбору $\mathcal{M}$. Итак, $\mathcal{M} \subset X \backslash \mathcal{A}$. Во-вторых, если $x \in \mathcal{M}$, то $\overline{G.x} = \mathcal{M}$. С другой стороны, $x \in X \backslash \mathcal{A}$, поэтому $\mathcal{A} \subset \overline{G.x}$. Следовательно, $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$. Но минимальное множество $\mathcal{M}$ не может содержать собственного замкнутого инвариантного подмножества, отсюда

$\mathcal{A} = \mathcal{M}$, что противоречит выбору $\mathcal{M}$. Итак, динамическая система (G, X) не имеет других минимальных множеств, отличных от $\mathcal{A}$. □

Замечание 2.1. *Как показывает следующий пример, глобальный аттрактор динамической системы может и не быть минимальным множеством.*

Пример 2.3. Пусть действие Φ группы $G = \mathbb{R}^1$ всех вещественных чисел на вещественной проективном прямой $X = \mathbb{RP}^1 = \{[x_1 : x_2] \mid x_1^2 + x_2^2 \neq 1\}$ задано формулой $\Phi(t, [x_1 : x_2]) = [2^t x_1 : x_2]\ \forall t \in \mathbb{R}^1$, $[x_1 : x_2] \in \mathbb{RP}^1$. Отметим, что $[2^t x_1 : x_2] = [x_1 : 2^{-t} x_2]$. Нетрудно видеть, что фазовое пространство динамической системы (G, X) разбивается на 4 орбиты: $O_1 = \{[x_1 : x_2] \in \mathbb{RP}^1 \mid x_1 x_2 > 0\}$, $O_2 = \{[x_1 : x_2] \in \mathbb{RP}^1 \mid x_1 x_2 < 0\}$, $O_3 = \{[x_1 : 0] \mid x_1 \neq 0\} = [1 : 0]$, $O_4 = \{[0 : x_2] \mid x_2 \neq 0\} = [0 : 1]$. Поскольку

$$\Phi(t, [x_1 : 0]) = [2^t x_1 : 0] = [x_1 : 0], \qquad \Phi(t, [0 : x_2]) = [0 : 2^{-t} x_2] = [0 : x_2],$$

то орбиты O_3 и O_4 представляют собой неподвижные точки действия Φ. Поскольку

$$\overline{O_i} = O_i \cup O_3 \cup O_4 \ \forall i = 1, 2,$$

то динамическая система (G, X) имеет глобальный аттрактор $\mathcal{A}$, состоящий из двух неподвижных точек O_3 и O_4, при этом $\mathcal{A}$ не является минимальным множеством. Поскольку вещественная проективная прямая $\mathbb{RP}^1$ гомеоморфна окружности, то фазовое пространство динамической системы имеет вид как на Рис. 2.1.

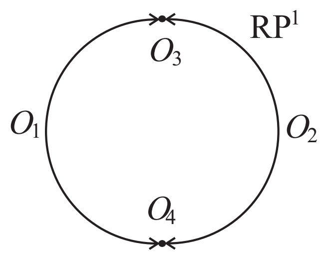

Рис. 2.1. Фазовое пространство динамической системы $(\mathbb{R}^1, \mathbb{RP}^1)$

Fig. 2.1. The phase space of a dynamical system $(\mathbb{R}^1, \mathbb{RP}^1)$

3. Системы итерированных функций и их аттракторы

Пусть (X, d) — метрическое пространство. Обозначим через $D_\varepsilon(x)$ открытый шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке $x \in X$, а через $\overline{D_\varepsilon(x)}$ — замкнутый шар радиуса ε с центром в x. Расширением множества $B \subset X$ радиуса $\varepsilon > 0$ называется множество

$$B + \varepsilon = \bigcup_{x \in B} \overline{D_\varepsilon(x)}.$$

Обозначим через $\mathcal{K}$ множество всех непустых компактных подмножеств из X. Функция $d_H : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathbb{R}$, заданная равенством

$$d_H(A, B) = \min\{\varepsilon > 0 \mid A \subset B + \varepsilon,\ B \subset A + \varepsilon\} \quad \forall\ A, B \in \mathcal{K},$$

определяет метрику на $\mathcal{K}$. Метрика d_H называется метрикой Хаусдорфа. Как известно, метрическое пространство (X, d) полно тогда и только тогда, когда $(\mathcal{K}, d_H)$ полно.

Пусть $S = \{f_1, \ldots, f_k\}$ — система итерированных функций (СИФ), заданная на полном метрическом пространстве (X, d). СИФ S определяет отображение

$$F\colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}\colon B \mapsto f_1(B) \cup \ldots \cup f_k(B) \quad \forall B \in \mathcal{K}.$$

Согласно теореме Хатчинсона, отображениие F является сжимающим, а потому, по теореме Банаха о неподвижной точке, существует такое единственное непустое компактное подмножество $\mathcal{A} \subset X$, что $F(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, то есть имеет место равенство (1.1). Более того, для любого компактного подмножества B последовательность $\{B_n = F^n(B)\}$ сходится к $\mathcal{A}$ в метрике Хаусдорфа:

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \mathcal{A}.$$

Последнее равенство означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$ имеют место включения

$$B_n \subset \mathcal{A} + \varepsilon, \qquad \mathcal{A} \subset B_n + \varepsilon.$$

Множество $\mathcal{A}$ называется аттрактором СИФ S, а отображение F — отображением Хатчинсона.

В работе [9] указано, что СИФ $S = \{f_1, \ldots, f_k\}$, заданная на X, удовлетворяет условию открытого множества, если существует такое открытое множество $U \subset X$, что

$$f_j(U) \subset U \, \forall j \in \{1, 2, \ldots, k\}, \quad f_i(U) \cap f_j(U) = \varnothing \quad \forall i \neq j, \, i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}.$$

Известно (Теорема 9.3 [9]), что если СИФ $S = \{f_1, \ldots, f_k\}$, заданная на X, удовлетворяет условию открытого множества, то размерность Минковского $\dim_M \mathcal{A}$ и размерность Хаусдорфа $\dim_H \mathcal{A}$ аттрактора $\mathcal{A}$ СИФ S совпадают и равны такому единственному числу d, что

$$(\lambda_1)^d + \ldots + (\lambda_k)^d = 1,$$

где λ_j — коэффициент сжатия преобразования f_j, $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

4. Ассоциированная СИФ

Пусть $S = \{f_1, \ldots, f_k\}$ — СИФ, заданная на полном метрическом пространстве (X, d), $\mathcal{A}$ — ее аттрактор. Введем следующие обозначения:

$$\Sigma = \{1, 2, \ldots, k\}, \qquad \Sigma^n = \Sigma \times \ldots \times \Sigma \ (n \text{ раз}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Семейство

$$S^n = \{f_{i_0} \circ f_{i_1} \circ \ldots \circ f_{i_n} \mid (i_0, i_1, \ldots, i_n) \in \Sigma^{n+1}\}, \ n \in \mathbb{N} \tag{4.1}$$

представляет собой k^{n+1} сжимающих преобразований полного метрического пространства (X, d), следовательно, S^n является СИФ. Обозначим через $\mathcal{A}^n$ аттрактор СИФ S^n.

Теорема 4.1. *Аттракторы СИФ S^n и СИФ S совпадают: $\mathcal{A}^n = \mathcal{A}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отображение Хатчинсона $F\colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ для СИФ S задается равенством

$$F(B) = \bigcup_{i\in\Sigma} f_i(B) \ \ \forall B \in \mathcal{K}.$$

Заметим, что для произвольного $B \in \mathcal{K}$ имеет место цепочка равенств:

$$F^2(B) = \bigcup_{i_0\in\Sigma} f_{i_0}(F(B)) = \bigcup_{i_0\in\Sigma} f_{i_0}\left(\bigcup_{i_1\in\Sigma} f_{i_1}(B)\right) =$$
$$= \bigcup_{i_0\in\Sigma}\bigcup_{i_1\in\Sigma} f_{i_0}\circ f_{i_1}(B) = \bigcup_{(i_0,i_1)\in\Sigma^2} f_{i_0}\circ f_{i_1}(B).$$

Аналогично можно получить

$$F^{n+1}(B) = \bigcup_{\sigma\in\Sigma^{n+1}} f_{i_0}\circ f_{i_1}\circ\ldots\circ f_{i_n}(B) \ \ \forall B \in \mathcal{K}, \tag{4.2}$$

где объединение берется по всем $\sigma = (i_0, i_1, \ldots, i_n) \in \Sigma^{n+1}$.

В силу равенства (4.2) отображением Хатчинсона для СИФ S^n является F^{n+1}. Поскольку $F(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, то $F^{n+1}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. В силу единственности неподвижной точки для сжимающего отображения $F^{n+1}\colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ на полном метрическом пространстве $\mathcal{K}$ имеем $\mathcal{A}^n = \mathcal{A}$. □

СИФ S^n будем называть *ассоциированной СИФ порядка n* для СИФ S.

5. Глобальный аттрактор полугруппы

Докажем два вспомогательных утверждения.

Л е м м а 5.1. *Пусть A, B — непустые подмножества метрического пространства (X, d), причем $A \subset B + \varepsilon$ $\forall\varepsilon > 0$. Тогда A лежит в замыкании $\overline{B}$ множества B.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем любую точку $y \in A$. Если $y \in B$, то $y \in \overline{B}$. Предположим, что $y \notin B$. Покажем, что y — предельная точка для B. Поскольку

$$A \subset B + \varepsilon = \bigcup_{x\in B} \overline{D_\varepsilon(x)} \quad \forall\varepsilon > 0,$$

то найдется такая точка $x_0 \in B$, что $y \in \overline{D_\varepsilon(x_0)}$, откуда $d(x_0, y) \le \varepsilon$. Поскольку $y \notin B$, то $y \ne x_0$ и $d(x_0, y) < \varepsilon$, т. е. x_0 принадлежит проколотой ε-окрестности $D^0_\varepsilon(y) = D_\varepsilon(y)\backslash\{y\}$. Таким образом, $x_0 \in D^0_\varepsilon(y) \cap B$, т. е. $D^0_\varepsilon(y) \cap B \ne \varnothing$ $\forall\varepsilon > 0$. Последнее означает, что y — предельная точка для B, следовательно, $A \subset \overline{B}$. □

Пусть $S = \{f_1, \ldots, f_k\}$ — СИФ на полном метрическом пространстве (X, d). Тогда множество всех композиций отображений из S определяют полугруппу G. Таким образом, СИФ S задает динамическую систему (G, X).

Л е м м а 5.2. *Пусть $\mathcal{A}$ — аттрактор СИФ S. Тогда $\mathcal{A} \subset \overline{G.x}$ $\forall x \in X$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем любую точку $x \in X$ и положим $B = \{x\}$, $B_n = F^n(B)$, $n \in \mathbb{N}$. Согласно теореме Хатчинсона, последовательность компактных подмножеств $\{B_n\}$ сходится в метрике Хаусдорфа к аттрактору $\mathcal{A}$ СИФ S. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что для всех $n > N$ имеют место включения

$$B_n \subset \mathcal{A} + \varepsilon, \qquad \mathcal{A} \subset B_n + \varepsilon.$$

Орбита $G.x$ точки x имеет вид

$$G.x = \{g.x \mid g \in G\} = \{f_{i_1} \circ \ldots \circ f_{i_p}(x) \mid i_1, \ldots, i_p \in \Sigma = \{1, \ldots, k\},\, p \in \mathbb{N}\}.$$

Поскольку

$$B_n = F^n(B) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma^n} f_{i_1} \circ \ldots \circ f_{i_n}(B),$$

где объединение берется по всем наборам $\sigma = (i_1, \ldots, i_n) \in \Sigma^n$, то $B_n \subset G.x$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Отсюда $B_n + \varepsilon \subset G.x + \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$. Следовательно, $\mathcal{A} \subset B_n + \varepsilon \subset G.x + \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$, $n > N$. Таким образом, $\mathcal{A} \subset G.x + \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$. Применяя Лемму 5.1, получаем $\mathcal{A} \subset \overline{G.x}$ $\forall x \in X$. □

Т е о р е м а 5.1. *Пусть полугруппа G порождена сжимающими отображениями $f_1, \ldots, f_k$ полного метрического пространства X. Тогда:*

1) *существует единственный глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ динамической системы (G, X);*

2) *$\mathcal{A}$ совпадает с аттрактором СИФ $S = \{f_1, \ldots, f_k\}$;*

3) *$\mathcal{A}$ является минимальным множеством динамической системы (G, X);*

4) *динамическая система (G, X) не имеет других минимальных множеств, отличных от $\mathcal{A}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что аттрактор $\mathcal{A}$ СИФ S является глобальным аттрактором динамической системы (G, X). По определению $\mathcal{A}$ — непустое компактное, а, следовательно, замкнутое подмножество в X. Равенство

$$f_1(\mathcal{A}) \cup \ldots \cup f_k(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$$

влечет $f_i(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$ $\forall i = 1, \ldots, k$. Поскольку любое преобразование $g \in G$ является композицией отображений из S, то $g(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$ $\forall g \in G$, т. е. $\mathcal{A}$ — G-инвариантное. Согласно Лемме 5.2 имеет место включение $\mathcal{A} \subset \overline{G.x}$ $\forall x \in X$, в т. ч. $\forall x \in X \setminus \mathcal{A}$. Таким образом, $\mathcal{A}$ — глобальный аттрактор динамической системы (G, X).

В силу G-инвариантности глобального аттрактора $\mathcal{A}$ имеем $G.x \subset \mathcal{A}$ $\forall x \in \mathcal{A}$. В силу замкнутости $\mathcal{A}$ получаем $\overline{G.x} \subset \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$. Из Леммы 5.2 следует обратное включение $\mathcal{A} \subset \overline{G.x}$. Таким образом, $\overline{G.x} = \mathcal{A}$, т. е. $\mathcal{A}$ является минимальным множеством динамической системы (G, X).

Согласно Теореме 2.1, глобальный аттрактор $\mathcal{A}$, являющийся минимальным множеством, единственен и динамическая система (G, X) не имеет других минимальных множеств, отличных от $\mathcal{A}$. □

С л е д с т в и е 5.1. *Динамическая система $(G_{\mathcal{A}}, \mathcal{A})$, полученная сужением действия полугруппы G на глобальный аттрактор $\mathcal{A}$, является минимальной системой.*

З а м е ч а н и е 5.1. *Хатчинсон* [8] *показал, что аттрактор $\mathcal{A}$ СИФ S совпадает с замыканием множества неподвижных точек всевозможных композиций отображений из S. Поэтому в силу Теоремы 5.1 глобальный аттрактор динамической системы (G, X) является замыканием множества неподвижных точек всех преобразований из полугруппы G.*

Из Теорем 4.1 и 5.1 вытекает

С л е д с т в и е 5.2. *Пусть полугруппа G порождена СИФ S, заданной на X, а полугруппа G_n — ассоциированной СИФ S^n. Тогда глобальные аттракторы динамических систем (G, X) и (G_n, X) совпадают.*

Т е о р е м а 5.2. *Пусть полугруппа G порождена сжимающими отображениями $f_1, \ldots, f_k$ полного метрического пространства X, H — произвольная подполугруппа полугруппы G, $\mathcal{A}_H$ и $\mathcal{A}_G$ — глобальные аттракторы динамических систем (H, X) и (G, X) соответственно. Тогда $\mathcal{A}_H \subset \mathcal{A}_G$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем обозначения $\mathrm{Fix}G = \{x \in X \mid \exists g \in G : g(x) = x\}$, $\mathrm{Fix}H = \{x \in X \mid \exists h \in H : h(x) = x\}$. В силу замечания 5.1 имеем $\mathcal{A}_H = \overline{\mathrm{Fix}H}$, $\mathcal{A}_G = \overline{\mathrm{Fix}G}$. Поскольку $H \subset G$, то $\mathrm{Fix}H \subset \mathrm{Fix}G$, следовательно $\mathcal{A}_H = \overline{\mathrm{Fix}H} \subset \overline{\mathrm{Fix}G} = \mathcal{A}_G$. □

6. Чувствительность к начальным условиям

Динамическая система (G, X) в метрическом пространстве (X, d) называется чувствительной к начальным условиям (или, для краткости, чувствительной) [5], если существует такое число $\varepsilon > 0$, что для произвольного открытого подмножества $U \subset X$ найдется такой элемент $g \in G$, что $\mathrm{diam}(g.U) \geq \varepsilon$. Число ε называется константой чувствительности для (G, X).

З а м е ч а н и е 6.1. *Как показывает следующий пример, наличие глобального аттрактора у динамической системы не влечет отсутствие чувствительности к начальным условиям.*

П р и м е р 6.1. Зададим непрерывное действие Φ группы $G = \mathbb{R}$ на вещественной прямой $X = \mathbb{R}$ формулой $\Phi(t, x) = 2^t x \ \forall t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. Фазовое пространство динамической системы (G, X) состоит из трех орбит: $O_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $O_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$, $O_3 = \{0\}$, при этом O_3 — единственная неподвижная точка действия Φ. Поскольку

$$\overline{O_i} = O_i \cup O_3 \ \forall i = 1, 2,$$

то динамическая система (G, X) имеет глобальный аттрактор $\mathcal{A}$, состоящий из неподвижной точки O_3. Нетрудно видеть, что динамическая система (G, X) чувствительна к начальным условиям.

Т е о р е м а 6.1. *Пусть полугруппа G порождена сжимающими отображениями $f_1, \ldots, f_k$ полного метрического пространства X и $\mathcal{A}$ — ее глобальный аттрактор. Динамические системы (G, X) и $(G_{\mathcal{A}}, \mathcal{A})$ не являются чувствительными к начальным условиям.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что $(G_{\mathcal{A}}, \mathcal{A})$ не является чувствительной к начальным условиям. Возьмем любую точку $x \in \mathcal{A}$ и любое $\eta > 0$, тогда $U_\eta = D_{\eta/2}(x) \cap \mathcal{A}$ — открытое подмножество в $\mathcal{A}$, причем $\operatorname{diam} U_\eta \leq \operatorname{diam} D_{\eta/2}(x) = \eta$. Каждое отображение f_i является сжимающим с коэффициентом сжатия $\lambda_i \in (0,1)$. Произвольное преобразование $g \in G$ имеет вид $f_{i_1} \circ \ldots \circ f_{i_n}$, где $i_1, \ldots i_n \in \{1, \ldots, k\}$, $n \in \mathbb{N}$, и является сжимающим с коэффициентом сжатия $\lambda_{i_1} \cdot \ldots \cdot \lambda_{i_n} \in (0,1)$. Поскольку $U_\eta \subset D_{\eta/2}(x)$, то $g.U_\eta \subset g.D_{\eta/2}(x)$. Отсюда получаем

$$\operatorname{diam}(g.U_\eta) \leq \operatorname{diam}(g.D_{\eta/2}(x)) = \lambda_{i_1} \cdot \ldots \cdot \lambda_{i_n} \cdot \eta < \eta.$$

Итак, для любого числа $\eta > 0$ существует такое открытое подмножество U_η в $\mathcal{A}$, что $\operatorname{diam}(g.U_\eta) < \eta$ для всех $g \in G$. Следовательно, динамическая система $(G_{\mathcal{A}}, \mathcal{A})$ не является чувствительной к начальным условиям.

Для доказательства того, что (G, X) не является чувствительной к начальным условиям, нужно взять $x \in X$ и любое $\eta > 0$, рассмотреть открытое множество $U_\eta = D_{\eta/2}(x)$ и повторить рассуждения, приведенные выше. □

7. Связность глобального аттрактора

В этом разделе исследуем связность глобального аттрактора $\mathcal{A}$ динамической системы (G, X).

Т е о р е м а 7.1. *Пусть существуют такое непустое компактное подмножество $B \subset X$ и такие отображения $g, h \in G$, что*

$$g(B) \cup h(B) \supset B. \tag{7.1}$$

Тогда: 1) $B \subset \mathcal{A}$; 2) если B — связное и состоит из более чем одной точки, то $\mathcal{A}$ не является вполне несвязным множеством.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку полугруппа G порождена композициями отображений из $S = \{f_1, \ldots, f_k\}$, то g и h могут быть записаны в следующем виде:

$$g = f_{i_0} \circ f_{i_1} \circ \ldots \circ f_{i_n}, \quad h = f_{j_0} \circ f_{j_1} \circ \ldots \circ f_{j_m},$$

следовательно, $g \in S^n$, $h \in S^m$. Рассмотрим СИФ $\tilde{S} = S^n \cup S^m$. Согласно Теореме 4.1, аттракторы для СИФ S^n и S^m совпадают с аттрактором $\mathcal{A}$ СИФ S. Если F^n и F^m — отображения Хатчинсона для СИФ S^n и S^m соответственно, то отображение $\tilde{F}\colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}$, заданное формулой $\tilde{F}(M) = F^n(M) \cup F^m(M)$ $\forall M \in \mathcal{K}$, является отображением Хатчинсона для СИФ $\tilde{S}$. Поскольку

$$\tilde{F}(\mathcal{A}) = F^n(\mathcal{A}) \cup F^m(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \cup \mathcal{A} = \mathcal{A},$$

то в силу единственности неподвижной точки для сжимающего отображения $\tilde{F}\colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ полного метрического пространства $\mathcal{K}$ получаем, что $\mathcal{A}$ — аттрактор СИФ $\tilde{S}$.

Поскольку $g, h \in \tilde{S}$, то благодаря условию (7.1) имеем $B \subset \tilde{F}(B)$, откуда получаем монотонную последовательность вложенных компактных подмножеств:

$$B \subset \tilde{F}(B) \subset \tilde{F}^2(B) \subset \ldots \subset \tilde{F}^p(B) \subset \ldots$$

Согласно теореме Хатчинсона,

$$\mathcal{A} = \lim_{p\to\infty} \tilde{F}^p(B) = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \tilde{F}^p(B).$$

Поскольку $B \subset \tilde{F}^p(B)$ $\forall p \in \mathbb{N}$, то $B \subset \mathcal{A}$.

Если B — связное и состоит из более чем одной точки, то $\mathcal{A}$ не может быть вполне несвязным. $\square$

Следствие 7.1. *Если полугруппа G порождена двумя взаимнооднозначными сжимающими отображениями f_1, f_2 полного метрического пространства X и найдутся такое связное компактное множество B и такие отображения $g, h \in G$, удовлетворяющие условию* (7.1)*, то $\mathcal{A}$ — связное множество.*

Доказательство. Известно [10], что аттрактор $\mathcal{A}$ для СИФ $S = \{f_1, f_2\}$, состоящей из двух взаимнооднозначных сжимающих отображений, является либо связным, либо вполне несвязным. Поскольку, согласно Теореме 7.1, аттрактор $\mathcal{A}$ не является вполне несвязным, то $\mathcal{A}$ — связное множество. $\square$

СИФ $S = \{f_1, \ldots, f_k\}$ на полном метрическом пространстве X называется вполне несвязной (см., например, [6]), если выполнены следующие условия:

a) $f_i \colon X \to X$ — взаимнооднозначное отображение $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$;

b) $f_i(\mathcal{A}) \cap f_j(\mathcal{A}) = \varnothing$ $\forall$ $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, k\}$,

где $\mathcal{A}$ — аттрактор СИФ S.

Из [6] известно, что аттрактор $\mathcal{A}$ вполне несвязной СИФ S является вполне несвязным множеством. Таким образом, глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ динамической системы (G, X), где полугруппа G порождена отображениями вполне несвязной СИФ S, является вполне несвязным множеством.

Напомним, что совершенное вполне несвязное множество называется канторовым.

Теорема 7.2. *Пусть полугруппа G порождена взаимнооднозначными сжимающими отображениями $f_1, \ldots, f_k$ полного метрического пространства (X, d) и существует такое непустое компактное подмножество $B \subset X$, что:*

a) $f_j(B) \subset B$ $\forall j \in \{1, \ldots, k\}$;

b) $f_j(B) \cap f_l(B) = \varnothing$ $\forall j \neq l$, $j, l \in \{1, \ldots, k\}$.

Тогда глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ динамической системы (G, X) является канторовым множеством в B.

Доказательство. Пусть $\Sigma = \{1, \ldots, k\}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ и каждого набора $\sigma = (i_1, \ldots, i_n) \in \Sigma^n$ положим $B_{i_1\ldots i_n} = f_{i_1} \circ \ldots \circ f_{i_n}(B)$. Отметим, что условия a), b), а также взаимнооднозначность отображений f_j $\forall j \in \Sigma$ гарантируют $B_{i_1\ldots i_n} \cap B_{j_1\ldots j_n} = \varnothing$ для различных наборов индексов из Σ^n $\forall n \in \mathbb{N}$. Пусть $F \colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ — отображение Хатчинсона для СИФ S. Тогда

$$A_n := F^n(B) = \bigsqcup_{\sigma\in\Sigma^n} B_{i_1\ldots i_n}.$$

Условие a) влечет включение $B \supset F(B)$, откуда получаем монотонную последовательность вложенных компактных подмножеств в X:

$$B \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$$

Согласно теореме Хатчинсона,

$$\mathcal{A} = \lim_{n\to\infty} F^n(B) = \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n,$$

при этом получаем $\mathcal{A} \subset B$.

Отметим, что неподвижные точки отображений f_j, $j \in \Sigma$, а также их образы при отображениях из G принадлежат $\mathcal{A}$ и, следовательно, B. Из условия b) следует, что неподвижные точки отображений f_j, $j \in \Sigma$ попарно различны. Поэтому можно точно сказать, что B состоит из более чем k различных точек. В силу взаимной однозначности отображений $\{f_j,\, j \in \Sigma\}$ то же самое можно сказать и про каждое множество $B_{i_1\ldots i_n}$, $\sigma = (i_1, \ldots, i_n) \in \Sigma^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Аттрактор $\mathcal{A}$ является компактным, следовательно, замкнутым множеством. Покажем, что аттрактор $\mathcal{A}$ не имеет изолированных точек: для любого $x \in \mathcal{A}$ найдем последовательность точек из $\mathcal{A}$, сходящуюся к x. Поскольку $x \in \mathcal{A} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется такой единственный набор $\sigma = (i_1, \ldots, i_n) \in \Sigma^n$, что $x \in B_{i_1\ldots i_n}$. Пусть x_n — любая точка из $B_{i_1\ldots i_n}$, являющаяся образом $f_{i_1} \circ \ldots \circ f_{i_n}(y)$ неподвижной точки y некоторого преобразования f_j, $j \in \Sigma$, и отличная от x. Как было замечено ранее, в силу условий теоремы такая точка x_n всегда найдется, и из определения x_n следует, что $x_n \in \mathcal{A}$. Поскольку отображения из S сжимающие, то $d(x, x_n) \le \mathrm{diam} B_{i_1\ldots i_n} \to 0$ при $n \to \infty$, следовательно, $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Это показывает, что никакая точка $x \in \mathcal{A}$ не является изолированной. Итак, $\mathcal{A}$ — совершенное множество.

Поскольку $\mathcal{A} \subset B$, а по условию b) $f_j(B) \cap f_l(B) = \varnothing$ $\forall j \ne l$, $j, l \in \Sigma$, то $f_j(\mathcal{A}) \cap f_l(\mathcal{A}) = \varnothing$ $\forall j \ne l$, $j, l \in \Sigma$. По условиям доказываемой теоремы все отображения $f_j \colon X \to X$, $j \in \Sigma$ взаимно-однозначные. Следовательно, СИФ $S = \{f_j,\, j \in \Sigma\}$ является вполне несвязной, а аттрактор $\mathcal{A}$ — вполне несвязным множеством.

Итак, глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ динамической системы (G, X) является совершенным вполне несвязным подмножеством в B, т. е. $\mathcal{A}$ — канторово множество. □

8. Примеры глобальных аттракторов

Пример 8.1. Пусть полугруппа G порождена двумя гомотетиями f_1 и f_2 n-мерного евклидова пространства $\mathbb{E}^n$ с коэффициентами подобия λ_1, $\lambda_2 \in (0, 1)$ и центрами гомотетии A_1, $A_2 \in \mathbb{E}^n$. Если $A_1 = A_2 = A$, то глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ динамической системы $(G, \mathbb{E}^n)$ совпадает с точкой A. Далее предположим, что $A_1 \ne A_2$. Обозначим через I отрезок, соединяющий точки A_1 и A_2. Поскольку при гомотетии любой отрезок переходит в отрезок, то $f_1(I)$ является отрезком, соединяющим A_1 и $f_1(A_2)$, $f_2(I)$ — отрезком, соединяющим $f_2(A_1)$ и A_2. Отметим, что точки $f_1(A_2)$ и $f_2(A_1)$ лежат внутри отрезка I и $f_i(I) \subset I$, $i \in \{1, 2\}$.

Если $\lambda_1 + \lambda_2 \ge 1$, то $f_1(I) \cup f_2(I) = I$. В этом случае глобальным аттрактором $\mathcal{A}$ динамической системы $(G, \mathbb{E}^n)$ является отрезок I.

Если $\lambda_1 + \lambda_2 < 1$, то $f_1(I) \cap f_2(I) = \varnothing$. Таким образом, выполнены условия Теоремы 7.2, согласно которой глобальным аттрактором $\mathcal{A}$ динамической системы $(G, \mathbb{E}^n)$ является канторово множество в отрезке I.

Пусть δ — половина расстояния между точками A_1 и A_2, A_0 — середина отрезка I, $U = D_\delta(A_0)$ — открытый шар радиуса δ с центром в точке A_0. Тогда при $\lambda_1 + \lambda_2 \leq 1$ выполнены условия открытого множества:

$$f_i(U) \subset U,\, i = 1, 2, \quad f_1(U) \cap f_2(U) = \varnothing.$$

Согласно Теореме 9.3 [9] размерность Минковского $\dim_M \mathcal{A}$ и размерность Хаусдорфа $\dim_H \mathcal{A}$ глобального аттрактора $\mathcal{A}$ совпадают и равны d, где d удовлетворяет равенству $(\lambda_1)^d + (\lambda_2)^d = 1$. В частности, при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ получаем

$$\dim_M \mathcal{A} = \dim_H \mathcal{A} = \begin{cases} -\ln 2/\ln\lambda, & \lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right); \\ 1 & \lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right). \end{cases}$$

З а м е ч а н и е 8.1. *Отметим существенное отличие действия полугруппы G, порожденной двумя гомотетиями f_1 и f_2, от действия группы H, порожденной теми же двумя гомотетиями. Как известно* [11]*, вне зависимости от значений коэффициентов гомотетий λ_1, $\lambda_2 \in (0, 1)$, глобальным аттрактором динамической системы $(H, \mathbb{E}^n)$ является прямая, проходящая через точки A_1 и A_2, $A_1 \neq A_2$.*

П р и м е р 8.2. Пусть полугруппа G порождена гомотетиями $f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}$ n-мерного евклидова пространства $\mathbb{E}^n$ с аффинно независимыми центрами в точках $A_1, \ldots, A_{n+1}$ и коэффициентами подобия $\lambda_i \in (0, 1)$, $i \in \Sigma = \{1, \ldots, n+1\}$. Обозначим через $\mathcal{A}$ глобальный аттрактор динамической системы $(G, \mathbb{E}^n)$.

Из работы [12] следует, что при $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{n+1} \geq n$ глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ совпадает с симплексом Δ_n с вершинами в точках $A_1, \ldots, A_{n+1}$.

Пусть $\lambda_i + \lambda_j < 1$ $\forall i \neq j$, $i, j \in \Sigma$. Тогда $f_j(\Delta_n) \subset \Delta_n$ $\forall j \in \Sigma$, $f_j(\Delta_n) \cap f_l(\Delta_n) = \varnothing$ $\forall j \neq l$, $j, l \in \Sigma$, т. е. выполнены условия Теоремы 7.2. Следовательно, глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ является канторовым множеством в симплексе Δ_n.

Обозначим через Δ_n^0 внутренность симплекса Δ_n. Если $\lambda_i + \lambda_j \leq 1$ $\forall i \neq j$, $i, j \in \Sigma$, то выполнены условия открытого множества:

$$f_i(\Delta_n^0) \subset \Delta_n^0\, \forall i \in \Sigma, \quad f_i(\Delta_n^0) \cap f_j(\Delta_n^0) = \varnothing \quad \forall i \neq j,\, i, j \in \Sigma.$$

Из Теоремы 9.3 [9] следует, что размерность Минковского $\dim_M \mathcal{A}$ и размерность Хаусдорфа $\dim_H \mathcal{A}$ глобального аттрактора $\mathcal{A}$ совпадают и равны d, где d удовлетворяет равенству $(\lambda_1)^d + \ldots + (\lambda_{n+1})^d = 1$. В частности, при $\lambda_i = \lambda \leq 1/2$ $\forall i \in \Sigma$ имеем

$$\dim_M \mathcal{A} = \dim_H \mathcal{A} = -\ln(n+1)/\ln\lambda.$$

Если $n = 2$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1/2$, то глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ представляет собой треугольник (салфетку) Серпинского, при этом $\dim_M \mathcal{A} = \dim_H \mathcal{A} = \ln 3/\ln 2 \approx 1,585$.

П р и м е р 8.3. Пусть полугруппа G порождена двумя преобразованиями подобия плоскости f_1 и f_2, заданными в комплексном виде равенствами:

$$f_1(z) = \lambda i z,\; f_2(z) = \lambda i(z-1) + 1,\; z \in \mathbb{C},\; \lambda \in (0, 1).$$

Точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1$ являются неподвижными точками преобразований f_1 и f_2 соответственно. Отметим, что преобразование f_j представляет собой композицию поворота плоскости против часовой стрелки на угол $\pi/2$ вокруг точки z_j и сжатия с коэффициентом λ и центром в z_j, $j = 1, 2$.

Обозначим через P четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках

$$z_A = \frac{1}{1-\lambda^2},\ z_B = \frac{\lambda i}{1-\lambda^2},\ z_C = \frac{-\lambda^2}{1-\lambda^2},\ z_D = 1 - \frac{\lambda i}{1-\lambda^2}.$$

Тогда

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \left\{ \frac{-1}{1-\lambda^2}, \frac{\lambda}{1-\lambda^2} \right\}, \quad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \left\{ \frac{-\lambda^2}{1-\lambda^2}, \frac{-\lambda}{1-\lambda^2} \right\}.$$

Более того, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 0$. Таким образом, четырехугольник P является прямоугольником.

Поскольку преобразования подобия сохраняют углы между векторами, а отрезки переходят в отрезки, то образами прямоугольника P при преобразованиях f_1 и f_2 будут прямоугольники $P_1 = f_1(P)$, $P_2 = f_2(P)$. Поскольку $f_1(A) = B$, $f_1(B) = C$, $f_2(C) = D$, $f_2(D) = A$, то точки $D_1 = f_1(D)$ и $A_2 = f_2(A)$ находятся на стороне AB, а точки $C_1 = f_1(C)$ и $B_2 = f_2(B)$ — на стороне CD. Непосредственно вычисляя, получим:

$$z_{D_1} = \lambda i + \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2},\ z_{A_2} = 1 + \frac{\lambda^3 i}{1-\lambda^2},\ z_{C_1} = \frac{-\lambda^3 i}{1-\lambda^2},\ z_{B_2} = 1 - \lambda i - \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}.$$

Отметим, что при $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ точка D_1 совпадет с точкой A_2, а точка C_1 — с точкой B_2:

$$z_{D_1} = z_{A_2} = 1 + i\frac{1}{\sqrt{2}},\ z_{C_1} = z_{B_2} = -i\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

При $\lambda > \frac{1}{\sqrt{2}}$ вершины прямоугольников P_1 и P_2 будут располагаться на сторонах прямоугольника P в следующем порядке (см. Рис. 8.1 a)):

$$A,\ D_1,\ A_2,\ B,\ C,\ B_2,\ C_1,\ D,$$

а при $\lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}$ — в таком порядке (см. Рис. 8.1 b)):

$$A,\ A_2,\ D_1,\ B,\ C,\ C_1,\ B_2,\ D.$$

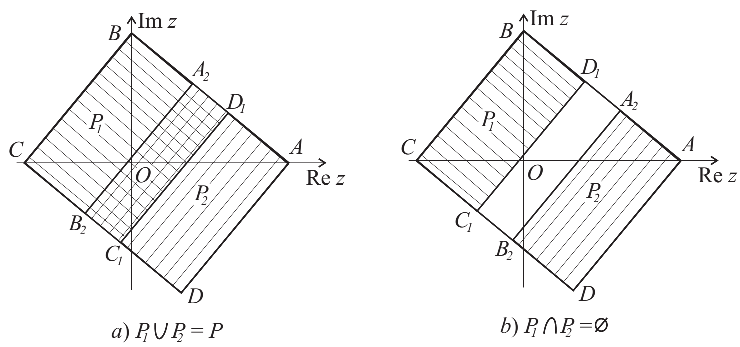

Рис. 8.1. Образы прямоугольника P: $a)$ $\lambda > 1/\sqrt{2}$, $b)$ $\lambda < 1/\sqrt{2}$

Fig. 8.1. The images of the rectangle P: $a)$ $\lambda > 1/\sqrt{2}$, $b)$ $\lambda < 1/\sqrt{2}$

Таким образом, при $\lambda \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ получаем $f_1(P) \cup f_2(P) = P$, следовательно, глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ динамической системы $(G, \mathbb{C})$ представляет собой прямоугольник P (см. Рис. 8.2).

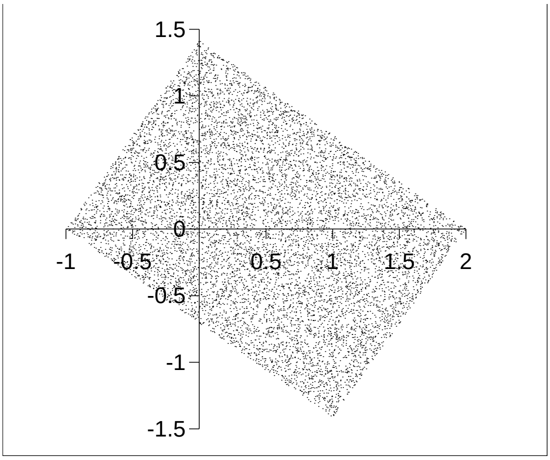

Рис. 8.2. Глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ динамической системы $(G, \mathbb{C})$ — прямоугольник P, $\lambda = 1/\sqrt{2}$

Fig. 8.2. The global attractor $\mathcal{A}$ of the dynamical system $(G, \mathbb{C})$ is the rectangle P, $\lambda = 1/\sqrt{2}$

Если же $\lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}$, то $f_j(P) \subset P$, $j = 1, 2$, $f_1(P) \cap f_2(P) = \varnothing$, т. е. выполнены условия Теоремы 7.2, из которой следует, что глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ динамической системы $(G, \mathbb{C})$ является канторовым множеством в прямоугольнике P (см. Рис. 8.3).

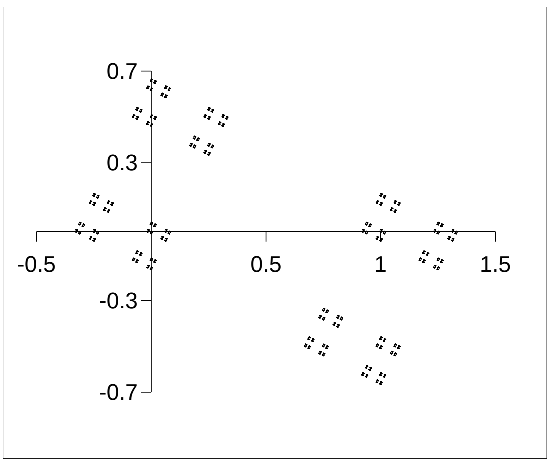

Рис. 8.3. Глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ динамической системы $(G, \mathbb{C})$ — канторово множество в прямоугольнике P, $\lambda = 1/2$

Fig. 8.3. The global attractor $\mathcal{A}$ of the dynamical system $(G, \mathbb{C})$ is the Cantor set in the rectangle P, $\lambda = 1/2$

Обозначим через P^0 внутренность прямоугольника P. Тогда при $\lambda \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ имеем $f_j(P^0) \subset P^0$, $j = 1, 2$, $\quad f_1(P^0) \cap f_2(P^0) = \varnothing$.

Таким образом, выполнены условия открытого множества, и согласно Теореме 9.3 [9], размерность Минковского $\dim_M \mathcal{A}$ и размерность Хаусдорфа $\dim_H \mathcal{A}$ глобального аттрактора $\mathcal{A}$ совпадают и равны d, где d удовлетворяет равенству $\lambda^d + \lambda^d = 1$, откуда $d = -\ln 2/\ln\lambda$. Следовательно,

$$\dim_M \mathcal{A} = \dim_H \mathcal{A} = \begin{cases} -\ln 2/\ln\lambda, & \lambda \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right); \\ 2 & \lambda \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right). \end{cases}$$

Список литературы

1. Kontorovich E., Megrelishvili M. A note on sensitivity of semigroup actions // Semigroup Forum. 2008. Vol. 76, Issue 1, pp. 133–141. DOI: https://doi.org/10.1007/s00233-007-9033-5

2. Schneider F.M., Kerkhoff S., Behrisch M., Siegmund S. Chaotic actions of topological semigroups // Semigroup Forum. 2013. Vol. 87, pp. 590–598.

3. Iglesias J., Portela A. Almost open semigroup actions // Semigroup Forum. 2019. Vol. 98, pp. 261–270. DOI: https://doi.org/10.1007/s00233-018-9936-3

4. Nagar A., Singh M. Topological dynamics of enveloping semigroups. Singapore: Springer, 2023. 87 p.

5. Zhukova N.I. Sensitivity and chaoticity ofsome classes of semigroup actions // Regular and Chaotic Dynamics. 2024. Vol. 29, No. 1, pp. 174–189. DOI: https://doi.org/10.1134/S1560354724010118

6. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000. 352 с.

7. Barnsley M. F. Fractals everywhere. Boston: Academic Press, 1988. 394 p.

8. Hutchinson J. E. Fractals and self-similarity // Indiana University Mathematics Journal. 1981. Vol. 30. pp. 713–747.

9. Falconer K.J. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. New York: John Wiley and Sons, 2014. 400 p.

10. Yamaguti M., Hata M., Kigami J. Translations of Mathematical Monographs. Mathematics of Fractals. American Mathematical Society, Providence, RI. 1997. 96 p. DOI: https://doi.org/10.1090/mmono/167

11. Жукова Н.И. Минимальные множества картановых слоений // Труды математического института имени В. А.Стеклова. 2007, Т. 256, С. 115–147.

12. Багаев А. В., Киселева А. В. О многомерных аналогах треугольника Серпинского // XXVI Международная научно-техническая конференция «Информационные системы и технологии – 2020»: сб. мат. Н. Новгород, 2020. — С. 1148–1152.

Поступила 06.09.2024; доработана после рецензирования 09.10.2024;
принята к публикации 27.11.2024

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

References

1. E. Kontorovich, M. Megrelishvili, "A note on sensitivity of semigroup actions", *Semigroup Forum*, **76**:1 (2008), 133–141. DOI: https://doi.org/10.1007/s00233-007-9033-5.
2. F. M. Schneider, S. Kerkhoff, M. Behrisch, S. Siegmund, "Chaotic actions of topological semigroups", *Semigroup Forum*, **87** (2013), 590–598.
3. J. Iglesias, A. Portela, "Almost open semigroup actions", *Semigroup Forum*, **98** (2019), 261–270. DOI: https://doi.org/10.1007/s00233-018-9936-3.
4. A. Nagar, M. Singh, *Topological dynamics of enveloping semigroups*, Springer, Singapore, 2023, 87 p.
5. N. I. Zhukova, "Sensitivity and chaoticity of some classes of semigroup actions", *Regular and Chaotic Dynamics*, **29**:1 (2024), 174–189. DOI: https://doi.org/10.1134/S1560354724010118.
6. R. M. Crownover, *Introduction to fractals and chaos*, Postmarket Publ., Moscow, 2000, 352 p.
7. M. F. Barnsley, *Fractals everywhere*, Academic Press, Boston, 1988, 394 p.
8. J. E. Hutchinson, "Fractals and self-similarity", *Indiana University Mathematics Journal*, **30** (1981), 713–747.
9. K. J. Falconer, *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*, John Wiley and Sons, New York, 2014, 400 p.
10. M. Yamaguti, M. Hata, J. Kigami, *Translations of Mathematical Monographs. Mathematics of Fractals*, **167**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997 DOI: https://doi.org/10.1090/mmono/167, 96 p.
11. N. I. Zhukova, "Minimal Sets of Cartan Foliations", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **256**:1 (2007), 105–135 (In Russ.).
12. A. V. Bagaev, A. V. Kiseleva, "On multidimensional analogs of the Sierpinski triangle", *XXVI International Scientific and Technical Conference «Information Systems and Technologies-2020»: Proceedings*, Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alekseev, N. Novgorod, 2020, 1148–1152 (In Russ.).

Submitted 06.09.2024; Revised 09.10.2024; Accepted 27.11.2024

The author have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The author declare no conflict of interest.