

## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI 10.15507/2079-6900.26.202403.294-312

ISSN 2079-6900 (Print)

*Оригинальная статья*

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.9:539.3:532.5

**Математическое моделирование системы измерения давления в авиационных двигателях****А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, Г. А. Анкилов***ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет»  
(г. Ульяновск, Российская Федерация)*

**Аннотация.** В работе рассматриваются линейный дифференциальный оператор и несколько нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных операторов, на основе которых записываются уравнения колебаний деформируемой пластины. В нелинейных операторах введены слагаемые, учитывающие нелинейность изгибающего момента и сил демпфирования, а также продольной силы, возникающей вследствие удлинения пластины из-за ее деформации. На основе предложенных уравнений разработаны математические модели механической системы, состоящей из недеформируемого трубопровода, скрепленного одним концом с датчиком, предназначенным для измерения давления в камере сгорания авиационного двигателя, и другим концом с этой камерой. Чувствительным элементом датчика, передающим информацию о давлении, является деформируемая пластина, концы которой закреплены жестко. В моделях учитывается аэрогидродинамическое воздействие на элемент рабочей среды и изменение температуры с течением времени по толщине элемента. На основе метода малого параметра в первом приближении получены асимптотические уравнения, описывающие совместную динамику рабочей среды в трубопроводе и деформируемого элемента датчика. Исследование динамики упругого элемента основано на применении метода Бубнова-Галеркина и проведении численных экспериментов в системе Mathematica 12.0. Произведен сравнительный анализ решений для линейной и нелинейных моделей. Показано влияние перечисленных выше видов нелинейностей на изменение величины прогиба пластины.

**Ключевые слова:** нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных, аэрогидроупругость, датчик давления, трубопровод, упругий элемент, метод малого параметра, метод Бубнова-Галёркина

**Для цитирования:** Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Анкилов Г. А. Математическое моделирование системы измерения давления в авиационных двигателях // Журнал Средневолжского математического общества. 2024. Т. 26, № 3. С. 294–312. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202403.294-312>

*Об авторах:*

**Анкилов Андрей Владимирович**, кандидат физико-математических наук, зав. кафедрой высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (432027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5946-8535>, [ankil@ulstu.ru](mailto:ankil@ulstu.ru)

© Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Анкилов Г. А.



Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.  
This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License.

**Вельмисов Петр Александрович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (432027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7825-7015>, [velmisov@ulstu.ru](mailto:velmisov@ulstu.ru)

**Анкилов Григорий Андреевич**, аспирант кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (432027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), ORCID: <http://orcid.org/0009-0006-6180-0652>, [ankilov1996@mail.ru](mailto:ankilov1996@mail.ru)

*Original article*

MSC2020 74F10

## Mathematical Modeling of the Pressure Measurement System in Aircraft Engines

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, G. A. Ankilov

*Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russian Federation)*

**Abstract.** The paper considers a linear differential operator and several nonlinear differential and integro-differential operators that form the basis to the equations of vibration of a deformable plate. In the nonlinear operators, the nonlinearity of the bending moment and of the damping forces, as well as the longitudinal force arising from the elongation of the plate due to its deformation are taken into account. Basing on the proposed equations, mathematical models of the mechanical system consisting of a non-deformable pipeline connected at one end with a sensor designed to measure the pressure in the combustion chamber of an aircraft engine and at the other end with this chamber have been developed. The sensitive element of the sensor, which transmits the pressure information, is a deformable plate, whose edges are rigidly fixed. The models take into account the aerohydrodynamic effect of the working medium on this element and the temperature variation over time along the thickness of the element. Using the small parameter method, the first approximation for asymptotic equations is obtained that describes joint dynamics of the working medium in the pipeline and of the sensitive element. The study of the elastic element's dynamics is based on the application of the Bubnov-Galerkin method and on the numerical experiments in Mathematica 12.0. A comparative analysis of solutions for linear and nonlinear models is performed. The influence of the above-mentioned nonlinearity types on the change in the value of the plate deflection is shown.

**Keywords:** nonlinear partial differential equations, aero-hydroelasticity, pressure sensor, pipeline, elastic element, small parameter method, Bubnov-Galerkin method

**For citation:** A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, G. A. Ankilov. Mathematical Modeling of the Pressure Measurement System in Aircraft Engines. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 26:3(2024), 294–312. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202403.294-312>

*About the authors:*

**Andrey V. Ankilov**, Ph. D. in Phys. and Math., Head of the Department, Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 430027, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5946-8535>, [ankil@ulstu.ru](mailto:ankil@ulstu.ru)

**Petr A. Velmisov**, D. Sci. in Phys. and Math., Professor, Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 430027, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7825-7015>, [velmisov@ulstu.ru](mailto:velmisov@ulstu.ru)

**Grigory A. Ankilov**, Postgraduate Student, Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 430027, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0009-0006-6180-0652>, [ankilov1996@mail.ru](mailto:ankilov1996@mail.ru)

## 1. Введение

При проектировании приборов и конструкций, составной частью которых являются деформируемые элементы, контактирующие с газожидкостной средой, особое значение имеет исследование динамики и устойчивости этих элементов [1–5]. При разработке датчиков давления с чувствительным механизмом в виде упругой пластины необходимо учитывать, что тепловое и аэрогидродинамическое воздействия на нее рабочих сред, давление которых измеряется, могут повышать амплитуду и частоту колебаний пластины до критических значений, не позволяющих обеспечивать необходимую точность измерений. Практическим и теоретическим вопросам проектирования датчиков давления газожидкостных сред посвящено много научных работ, в частности отметим [6–10]. Научные работы [6–8] посвящены описанию принципов работы датчиков давления и определению их технических характеристик. В работах [9–10] приводятся основные принципы проектирования датчиков давления.

При некоторых режимах работы авиационных двигателей чувствительный элемент датчика давления подвергается агрессивному воздействию высоких температур и виброускорений. Эти факторы являются основной проблемой при эксплуатации датчиков давления газожидкостных сред в авиационных двигателях, что приводит к неточности измерений и к быстрому разрушению чувствительного механизма датчика. Основным способом ослабить агрессивное воздействие температур и виброускорений является отведение датчика от двигателя с помощью трубопровода. Такие математические модели, в которых датчик расположен на конце отводного трубопровода, исследовались в работах авторов [11–13].

Целью данной работы является проведение сравнительного анализа решений, полученных на основе разработанных нелинейных начально-краевых задач, с решением линейной начально-краевой задачи для систем дифференциальных уравнений, описывающих совместную динамику чувствительного элемента датчика давления и рабочей среды в трубопроводе. Анализ производился на основе численных экспериментов в системе компьютерной алгебры Mathematica 12.0 для конкретных параметров механической системы.

## 2. Асимптотические модели деформируемого твердого тела

В работе исследуется динамика деформируемой пластины, подверженной аэрогидродинамическому и тепловому воздействию. Пусть прогиб пластины длиной  $H$  и толщиной  $h$  в зависимости от координаты точки пластины  $y \in [0, H]$  и времени  $t \geq 0$  описывается функцией  $w(y, t)$ . Рассматривается случай жесткого закрепления концов пластины:

$$w(0, t) = w_y(0, t) = 0, \quad w(H, t) = w_y(H, t) = 0. \quad (2.1)$$

Для описания динамики деформируемой пластины введем несколько видов дифференциальных и интегро-дифференциальных операторов:

$$L(w(y, t)) \equiv Mw_{tt} + Dw_{yyyy} + N(t)w_{yy} + \gamma w + \beta_1 w_t + \beta_2 w_{yyyyt}; \quad (2.2)$$

$$L(w(y, t)) \equiv Mw_{tt} + Dw_{yyyy} + N(t)w_{yy} + \gamma w + \beta_1 w_t + \beta_2 w_{yyyyt} - \\ - w_{yy} \left( \mu \int_0^H w_y^2 dy + \eta \left( \int_0^H w_y^2 dy \right)_t \right); \quad (2.3)$$

$$L(w(y, t)) \equiv Mw_{tt} + \left[ Dw_{yy} \left( 1 - \frac{3}{2} w_y^2 \right) \right]_{yy} + N(t)w_{yy} + \gamma w + \beta_1 w_t + \beta_2 w_{yyyyt}; \quad (2.4)$$

$$L(w(y, t)) \equiv Mw_{tt} + \left[ Dw_{yy} \left( 1 - \frac{3}{2} w_y^2 \right) \right]_{yy} + \beta_1 w_t + \beta_2 \left[ w_{yy} \left( 1 - \frac{3}{2} w_y^2 \right) \right]_{yyt} + \\ + N(t)w_{yy} + \gamma w. \quad (2.5)$$

Нижние индексы  $y, t$  обозначают частные производные по переменным  $y, t$  соответственно. В операторах (2.2)–(2.5) введены следующие обозначения механических характеристик деформируемой пластины:  $M, D$  – погонная масса и изгибная жесткость пластины;  $N(t)$  – растягивающее или сжимающее пластину усилие;  $\gamma$  – коэффициент жесткости основания пластины;  $\beta_1$  – коэффициент внешнего демпфирования;  $\beta_2, \eta$  – коэффициенты, описывающие внутреннее демпфирование пластины;  $\mu$  – коэффициент, зависящий от прочностных и геометрических характеристик пластины. В операторе (2.3) произведен учет нелинейности продольной силы, возникающей вследствие удлинения пластины из-за ее деформации; в операторе (2.4) учтена нелинейность изгибающего момента; в операторе (2.5) производится уточнение оператора (2.4) в случае учета нелинейности демпфирования пластины. Целью работы является сравнительный анализ колебаний деформируемой пластины, полученных на основе нелинейных моделей деформируемого твердого тела (2.3)–(2.5), с колебаниями, полученными на основе линейной модели (2.2).

Для расчета коэффициентов  $M, D$  используем формулы:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad M = \rho_0 h, \quad (2.6)$$

где  $E$  – модуль упругости пластины;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $\rho_0$  – плотность пластины.

При учете теплового воздействия на пластину коэффициент растягивающего или сжимающего усилия зависит от времени:

$$N(t) = N_0 + \frac{E\alpha_T}{1 - \nu} \int_0^h T(x, t) dx, \quad (2.7)$$

где  $T(x, t)$  – функция, описывающая изменение температуры с течением времени по толщине элемента;  $N_0$  – созданная при закреплении пластины постоянная составляющая усилия;  $\alpha_T$  – температурный коэффициент линейного расширения.

Считая деформацию пластины и температурный коэффициент линейного расширения материала пластины малыми, разложим их по малому параметру  $\varepsilon = \frac{h}{H}$ :

$$w(y, t) = w_0(y) + \varepsilon w_1(y, t) + \dots, \quad \alpha_T = \varepsilon \alpha_{T1} + \dots \tag{2.8}$$

Ограничиваясь членами первого порядка  $\varepsilon$ , представим оператор  $L(w(y, t))$  в виде  $L(w(y, t)) = L_1(w_0(y)) + \varepsilon L_2(w_0(y), w_1(y, t))$ . Тогда, подставляя (2.8) в операторы (2.2)–(2.5), получим:

– для модели (2.2)

$$\begin{cases} L_1(w_0(y)) = Dw_{0yyyy} + N_0w_{0yy} + \gamma w_0, \\ L_2(w_0(y), w_1(y, t)) = Mw_{1tt} + Dw_{1yyyy} + N_1(t)w_{0yy} + N_0w_{1yy} + \gamma w_1 + \\ + \beta_1w_{1t} + \beta_2w_{1yyyyt}; \end{cases} \tag{2.9}$$

– для модели (2.3)

$$\begin{cases} L_1(w_0(y)) = Dw_{0yyyy} + N_0w_{0yy} + \gamma w_0 - \mu w_{0yy} \int_0^H w_{0y}^2 dy, \\ L_2(w_0(y), w_1(y, t)) = Mw_{1tt} + Dw_{1yyyy} + N_1(t)w_{0yy} + N_0w_{1yy} + \\ + \gamma w_1 + \beta_1w_{1t} + \beta_2w_{1yyyyt} - \mu w_{1yy} \int_0^H w_{0y}^2(y) dy - \\ - 2w_{0yy} \left( \mu \int_0^H w_{0y}(y)w_{1y}(y, t) dy + \eta \int_0^H w_{0y}(y)w_{1yt}(y, t) dy \right); \end{cases} \tag{2.10}$$

– для модели (2.4)

$$\begin{cases} L_1(w_0(y)) = D \left( w_{0yyyy} - \frac{3}{2} (w_{0yy}w_{0y}^2)_{yy} \right) + N_0w_{0yy} + \gamma w_0, \\ L_2(w_0(y), w_1(y, t)) = D \left( w_{1yyyy} - \frac{3}{2} (2w_{0yy}w_{0y}w_{1y} + w_{0y}^2w_{1yy})_{yy} \right) + \\ + Mw_{1tt} + N_1(t)w_{0yy} + N_0w_{1yy} + \gamma w_1 + \beta_1w_{1t} + \beta_2w_{1yyyyt}; \end{cases} \tag{2.11}$$

– для модели (2.5)

$$\begin{cases} L_1(w_0(y)) = D \left( w_{0yyyy} - \frac{3}{2} (w_{0yy}w_{0y}^2)_{yy} \right) + N_0w_{0yy} + \gamma w_0, \\ L_2(w_0(y), w_1(y, t)) = Mw_{1tt} + N_1(t)w_{0yy} + N_0w_{1yy} + \gamma w_1 + \beta_1w_{1t} + \\ + D \left( w_{1yyyy} - \frac{3}{2} (2w_{0yy}w_{0y}w_{1y} + w_{0y}^2w_{1yy})_{yy} \right) + \\ + \beta_2 \left( w_{1yyyyt} - \frac{3}{2} (2w_{0yy}w_{0y}w_{1yt} + w_{0y}^2w_{1yyt})_{yy} \right), \end{cases} \tag{2.12}$$

где  $N_1(t) = \frac{E\alpha_{T1}}{1-\nu} \int_0^h T(z, t) dz$ .

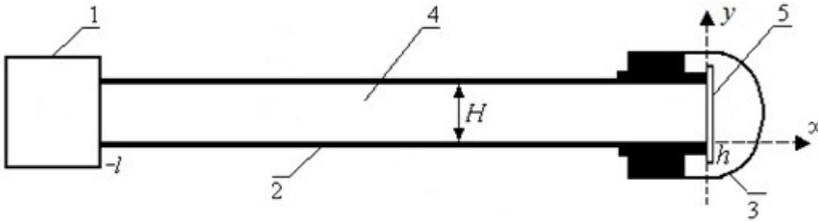
В силу граничных условий (2.1) для функции  $w(y, t)$ , получим граничные условия для функций  $w_0(y)$ ,  $w_1(y, t)$ :

$$w_0(0) = w_{0y}(0) = 0, \quad w_0(H) = w_{0y}(H) = 0, \tag{2.13}$$

$$w_1(0, t) = w_{1y}(0, t) = 0, \quad w_1(H, t) = w_{1y}(H, t) = 0. \tag{2.14}$$

### 3. Математическая модель системы измерения давления

Пусть чувствительным элементом датчика измерения давления рабочей среды в камере сгорания авиационного двигателя является упругая пластина. Система представлена на Рис. 3.1, где  $l$  – длина трубопровода 2, соединяющего датчик давления 3 с камерой сгорания 1. На одном конце трубопровода ( $x = -l$ ), закрепленного на выходе из камеры сгорания двигателя, задан закон изменения давления рабочей среды 4. На другом конце трубопровода расположен чувствительный элемент 5 ( $x \in [0, h]$ ) датчика, предназначенного для измерения этого давления.



**Рис. 3.1.** Трубопровод с датчиком  
**Fig. 3.1.** Pipe with sensor

Математическая постановка задачи в модели несжимаемой среды примет вид

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0, \quad x \in (-l, w(y, t)), \quad y \in (0, H), \quad (3.1)$$

$$\Phi_x g_x + \Phi_y g_y = -g_t, \quad g(x, y, t) = 0, \quad y \in (0, H), \quad (3.2)$$

$$L(w(y, t)) = P - \bar{P}, \quad y \in (0, H), \quad (3.3)$$

$$P = P_0 - \rho \left( \Phi_t + \frac{1}{2} \Phi_x^2 + \frac{1}{2} \Phi_y^2 \right), \quad (3.4)$$

$$P(-l, y, t) = F(y, t), \quad y \in (0, H), \quad (3.5)$$

Здесь  $\Phi(x, y, t)$ ,  $P(x, y, t)$  – потенциал скорости и давление рабочей среды в трубопроводе;  $g(x, y, t) = 0$  – уравнение поверхности упругого элемента;  $F(y, t)$  – давление рабочей среды на входе в трубопровод;  $P_0$  – давление в рабочей среде в состоянии покоя;  $\bar{P}$  – воздействие внешней среды на упругий элемент;  $\rho$  – плотность среды.

Уравнение (3.1) описывает колебания газа или жидкости в трубопроводе в модели идеальной несжимаемой среды; условие (3.2) задает закон непротекания газожидкостной среды через поверхность элемента; уравнение (3.3), в которое входит один из введенных операторов (2.2)–(2.5), описывает динамику упругого элемента; давление в рабочей среде определяется интегралом Лагранжа-Коши (3.4); условие (3.5) задает закон равенства давлений на выходе из камеры сгорания двигателя и на входе в трубопровод.

Учитывая (2.8), запишем уравнение поверхности упругого элемента в виде

$$g(x, y, t) = x - w(y, t) = x - w_0(y) - \varepsilon w_1(y, t) - \dots = 0. \quad (3.6)$$

Разложим функции  $\Phi(x, y, t)$ ,  $F(y, t)$  по малому параметру  $\varepsilon$ :

$$\Phi(x, y, t) = \varepsilon \varphi(x, y, t) + \dots, \quad F(y, t) = P_0 + \varepsilon P_*(y, t) + \dots \quad (3.7)$$

где  $P_*(y, t)$  – функция, описывающая избыточное давление на входе в трубопровод (в сечении  $x = -l$ ).

Подставляя разложения (3.6)–(3.7) в систему (3.1)–(3.5) и ограничиваясь членами первого порядка  $\varepsilon$ , получим асимптотическую модель задачи в первом приближении:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad x \in (-l, w_0(y)), \quad (3.8)$$

$$\varphi_x(w_0(y), y, t) - w_{0y}(y)\varphi_y(w_0(y), y, t) = w_{1t}(y, t), \quad (3.9)$$

$$L_1(w_0(y)) = P_0 - \bar{P}, \quad (3.10)$$

$$L_2(w_0(y), w_1(y, t)) = -\rho\varphi_t(w_0(y), y, t), \quad (3.11)$$

$$-\rho\varphi_t(-l, y, t) = P_*(y, t). \quad (3.12)$$

Во всех формулах (3.8)–(3.12) координата  $y \in (0, H)$ .

#### 4. Решение задачи в нулевом приближении

Уравнение (3.10) является обыкновенным дифференциальным или интегро-дифференциальным уравнением для одной неизвестной функции  $w_0(y)$  с краевыми условиями (2.13). Из (3.10) получим:

– для модели (2.9)

$$Dw_{0yyyy} + N_0w_{0yy} + \gamma w_0 = P_0 - \bar{P}, \quad (4.1)$$

– для модели (2.10)

$$Dw_{0yyyy} + N_0w_{0yy} + \gamma w_0 - \mu w_{0yy} \int_0^H w_{0y}^2 dy = P_0 - \bar{P}, \quad (4.2)$$

– для моделей (2.11)–(2.12)

$$D \left( w_{0yyyy} - \frac{3}{2} (w_{0yy} w_{0y}^2)_{yy} \right) + N_0w_{0yy} + \gamma w_0 = P_0 - \bar{P}. \quad (4.3)$$

Если разность между давлением в покоящейся среде и распределенной по пластине внешней нагрузкой  $P_0 - \bar{P} = 0$ , то для каждой модели получим  $w_0(y) \equiv 0$ .

Возьмем ненулевую разность  $P_0 - \bar{P} = 2 \cdot 10^4$ . Предположим, что пластина толщиной  $h = 7 \cdot 10^{-4}$  и длиной  $H = 2 \cdot 10^{-2}$  изготовлена из алюминия, тогда плотность  $\rho_0 = 2700$ , модуль упругости  $E = 7 \cdot 10^{10}$ , коэффициент Пуассона  $\eta = 0,34$ , изгибная жесткость  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = 2,262$ , погонная масса  $M = \rho_0 h = 1,89$ . Предположим, что постоянная составляющая усилия  $N_0 = 10^5$ , коэффициент жесткости обжимного слоя пластины  $\gamma = 4$ , коэффициенты при нелинейных слагаемых  $\mu = 30$ ,  $\eta = 20$ . Все значения даны в системе СИ. В системе Mathematica численно найдем решения краевых задач для уравнений (4.1)–(4.3) с краевыми условиями (2.13). Введем обозначения:  $w_{01}(y), w_{02}(y), w_{03}(y)$  – решения уравнений (4.1)–(4.3) соответственно. Решение уравнения (4.1) представлено на Рис. 4.1.

В силу малости нелинейных членов в уравнениях (4.2), (4.3), графики их решений будут иметь такой же вид, как на рисунке 4.1. Рассмотрим отличия решений уравнений (4.1) и (4.2) на рисунке 4.2а, и уравнений (4.1) и (4.3) на рисунке 4.2б.

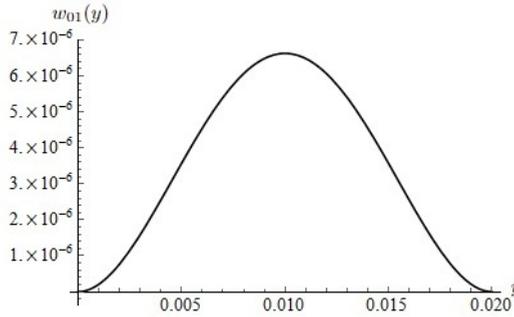


Рис. 4.1. Начальное приближение прогиба пластины

Fig. 4.1. Initial approximation of plate deflection

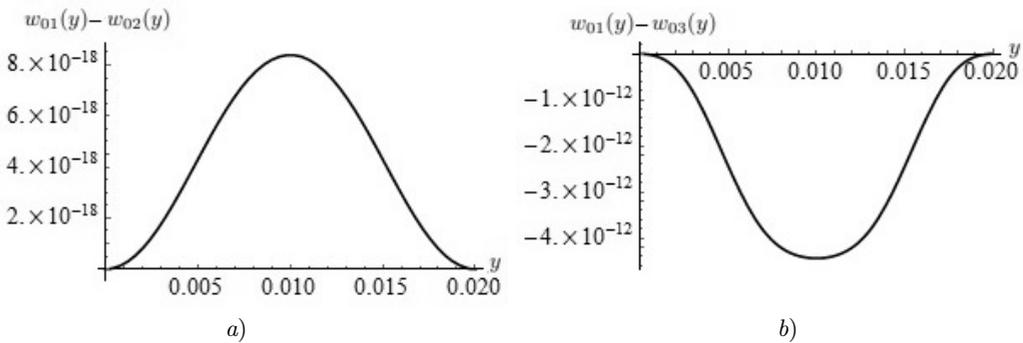


Рис. 4.2. Начальное влияние нелинейности  
 а) продольной силы; б) изгибающего момента

Fig 4.2. Initial effect of nonlinearity  
 a) of the longitudinal force; b) of the bending moment

Как видно из Рис. 4.2а, в нулевом приближении нелинейная продольная сила, возникающая вследствие удлинения пластины из-за ее деформации, приводит к уменьшению прогиба пластины, а из Рис. 4.2б следует, что нелинейная составляющая изгибающего момента приводит к увеличению прогиба пластины.

## 5. Решение аэрогидродинамической задачи

Решим аэрогидродинамическую задачу (3.8)–(3.9), (3.12). Предположим, что избыточное давление не зависит от координаты  $y$ , т. е.  $P_*(y, t) = P_*(t)$ . Чтобы функция  $\varphi(x, y, t)$  являлась решением уравнения (3.8) и удовлетворяла условию (3.12), будем искать ее в виде

$$\varphi(x, y, t) = -\frac{1}{\rho} \int_0^t P_*(z) dz + (x+l) \alpha(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \cos \lambda_n y \cdot sh \lambda_n (x+l), \quad (5.1)$$

где  $\lambda_n = \frac{n\pi}{H}$ .

Согласно методу Бубнова-Галеркина функцию  $w_1(y, t)$  будем искать в виде

$$w_1(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_n(y), \quad (5.2)$$

где  $\{\xi_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$  – полная система базисных функций на отрезке  $[0, H]$ , удовлетворяющих условиям жесткого закрепления концов пластины (2.14). Возьмем базисные функции в виде

$$\xi_n(y) = ch(\mu_n y) - \cos(\mu_n y) - \frac{ch(\mu_n H) - \cos(\mu_n H)}{sh(\mu_n H) - \sin(\mu_n H)} (sh(\mu_n y) - \sin(\mu_n y)), \quad (5.3)$$

где коэффициенты  $\mu_n$  находятся как корни уравнения  $ch(\mu_n H) \cos(\mu_n H) = 1$ .

Подставим (5.1)–(5.2) в условие (3.9)

$$\begin{aligned} \alpha(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \cos \lambda_n y \cdot \lambda_n ch \lambda_n (w_0(y) + l) + \\ + \lambda_n w_{0y}(y) \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \sin \lambda_n y \cdot sh \lambda_n (w_0(y) + l) = \sum_{n=1}^{\infty} w_{nt}(t) \xi_n(y). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Согласно методу Бубнова-Галеркина проецируем (5.4) на полную систему поверочных функций  $\{\cos \lambda_k y\}_{k=0}^{\infty}$ . Проецируя на первую поверочную функцию  $\cos \lambda_0 y = 1$ , получим

$$\begin{aligned} \alpha(t) \cdot H + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \lambda_n \int_0^H (\cos \lambda_n y ch \lambda_n (w_0(y) + l) + w_{0y}(y) \sin \lambda_n y sh \lambda_n (w_0(y) + l)) dy = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} w_{nt}(t) \int_0^H \xi_n(y) dy. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \alpha(t) = -\frac{1}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \lambda_n \int_0^H (\cos \lambda_n y ch \lambda_n (w_0(y) + l) + \\ + w_{0y}(y) \sin \lambda_n y sh \lambda_n (w_0(y) + l)) dy + \frac{1}{H} \sum_{n=1}^{\infty} w_{nt}(t) \int_0^H \xi_n(y) dy. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Введем обозначения

$$A_n = \lambda_n \int_0^H (\cos \lambda_n y ch \lambda_n (w_0(y) + l) + w_{0y}(y) \sin \lambda_n y sh \lambda_n (w_0(y) + l)) dy, \quad (5.6)$$

$$B_n = \int_0^H \xi_n(y) dy. \quad (5.7)$$

Тогда из (5.5) получим

$$\alpha(t) = -\frac{1}{H} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_n(t) + \frac{1}{H} \sum_{n=1}^{\infty} B_n w_{nt}(t). \tag{5.8}$$

Проецируя (5.4) на остальные поверочные функции  $\{\cos \lambda_k y\}_{k=1}^{\infty}$ , согласно методу Бубнова-Галеркина получим:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \lambda_n \int_0^H (\cos \lambda_n y \operatorname{ch} \lambda_n (w_0(y) + l) + w_{0y}(y) \sin \lambda_n y \operatorname{sh} \lambda_n (w_0(y) + l)) \cos \lambda_k y dy + \\ + \alpha(t) \int_0^H \cos \lambda_k y dy = \sum_{n=1}^{\infty} w_{nt}(t) \int_0^H \xi_n(y) \cos \lambda_k y dy, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{5.9}$$

Введем обозначения

$$C_{nk} = \lambda_n \int_0^H (\cos \lambda_n y \operatorname{ch} \lambda_n (w_0(y) + l) + w_{0y}(y) \sin \lambda_n y \operatorname{sh} \lambda_n (w_0(y) + l)) \cos \lambda_k y dy, \tag{5.10}$$

$$V_{nk} = \int_0^H \xi_n(y) \cos \lambda_k y dy. \tag{5.11}$$

Учитывая, что

$$\int_0^H \cos \lambda_k y dy = 0, \tag{5.12}$$

из (5.9) получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_{nk} w_{nt}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{nk} \varphi_n(t), \quad k = 1, 2, \dots \tag{5.13}$$

Следовательно, из (5.13) получим систему однородных уравнений

$$\sum_{n=1}^{\infty} (V_{nk} w_{nt}(t) - C_{nk} \varphi_n(t)) = 0, \quad k = 1, 2, \dots \tag{5.14}$$

Подставим (5.1)–(5.2) в уравнение (3.11)

$$\begin{aligned} L_2 \left( w_0(y), \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_n(y) \right) = \\ = P_*(t) - \rho(w_0(y) + l) \alpha_t(t) - \rho \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{nt}(t) \cos \lambda_n y \cdot \operatorname{sh} \lambda_n (w_0(y) + l). \end{aligned} \tag{5.15}$$

Проецируя (5.15) на систему базисных функций  $\{\xi_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$ , согласно методу Бубнова-Галеркина получим:

$$\int_0^H L_2 \left( w_0(y), \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_n(y) \right) \xi_k(y) dy = P_*(t) \int_0^H \xi_k(y) dy - \rho \alpha_t(t) \int_0^H (w_0(y) + l) \xi_k(y) dy - \rho \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{nt}(t) \int_0^H \cos \lambda_n y \cdot sh \lambda_n (w_0(y) + l) \cdot \xi_k(y) dy, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.16)$$

Введем обозначения

$$D_k = \rho \int_0^H (w_0(y) + l) \xi_k(y) dy, \quad E_{nk} = \rho \int_0^H \cos \lambda_n y \cdot sh \lambda_n (w_0(y) + l) \cdot \xi_k(y) dy. \quad (5.17)$$

Тогда, подставляя  $\alpha(t)$  из (5.8), из (5.16) получим

$$\int_0^H L_2 \left( w_0(y), \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_n(y) \right) \xi_k(y) dy = B_k P_*(t) + \frac{D_k}{H} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_{nt}(t) - \frac{D_k}{H} \sum_{n=1}^{\infty} B_n w_{nt}(t) - \sum_{n=1}^{\infty} E_{nk} \varphi_{nt}(t), \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.18)$$

В результате для определения неизвестных функций  $\varphi_n(t)$ ,  $w_n(t)$  получена система обыкновенных дифференциальных уравнений (5.14), (5.18), на основе которой производятся численные эксперименты.

## 6. Численный эксперимент

Проведем численный эксперимент для операторов (2.9)–(2.12), взяв отрезки рядов в разложениях (5.1)–(5.2) длиной  $m = 8$ .

Пусть рабочей средой в трубопроводе длиной  $l = 0,5$  и шириной  $H = 0,02$  является вода, плотность которой  $\rho = 1000$ . Зададим разность между давлением в покоящейся среде и распределенной по пластине внешней нагрузкой  $P_0 - \bar{P} = 2 \cdot 10^4$ . Предположим, что пластина толщиной  $h = 7 \cdot 10^{-4}$  изготовлена из алюминия, тогда плотность  $\rho_0 = 2700$ , модуль упругости  $E = 7 \cdot 10^{10}$ , коэффициент Пуассона  $\eta = 0,34$ , изгибная жесткость  $D = 2,262$ , погонная масса  $M = 1,89$ . Будем считать, что постоянная составляющая усилия  $N_0 = 10^5$ , коэффициент жесткости обжимного слоя пластины  $\gamma = 4$ , остальные коэффициенты:  $\mu = 30$ ,  $\eta = 10$ ,  $\beta_1 = 4$ ,  $\beta_2 = 4$ . Пусть окружающей трубопровод средой является воздух с температурой  $T_0 = 293,15$ . Введем закон изменения температуры по толщине элемента  $T(x, t) = T_0 + 40 \sin(2t) \sin\left(\frac{\pi x}{h}\right)$ . Избыточное давление считаем переменным  $P_*(t) = 10^6(5 - \cos 10t)$ . Все значения даны в системе СИ.

Зададим начальные условия  $w_k(0) = 0$ ,  $w_{kt}(0) = 0$ ,  $k = 1, \dots, m$ .

Решая систему (5.14), (5.18) в программе Mathematica 12.0, взяв отрезки рядов в формулах длиной  $m = 8$ , построим графики функции деформации  $w(y, t) = w_0(y) + \varepsilon \sum_{n=1}^m w_n(t) \xi_n(y)$ .

I. Рассмотрим линейную модель деформируемого твердого тела (2.9). Подставив  $L_2 \left( w_0(y), \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_n(y) \right)$  в (5.18), получим

$$\begin{aligned} & \int_0^H \left( M \sum_{n=1}^{\infty} w_{ntt}(t) \xi_n(y) + D \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_{nyyyy}(y) + N_1(t)w_{0yy} + N_0 \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_{nyy}(y) + \right. \\ & \left. + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_n(y) + \beta_1 \sum_{n=1}^m w_{nt}(t) \xi_n(y) + \beta_2 \sum_{n=1}^m w_{nt}(t) \xi_{nyyyy}(y) \right) \xi_k(y) dy = \quad (6.1) \\ & = B_k P_*(t) + \frac{D_k}{H} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_{nt}(t) - \frac{D_k}{H} \sum_{n=1}^{\infty} B_n w_{ntt}(t) - \sum_{n=1}^{\infty} E_{nk} \varphi_{nt}(t), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$F_{nk} = \int_0^H \xi_{nyyyy}(y) \xi_k(y) dy, \quad J_k = \int_0^H w_{0yy} \xi_k(y) dy, \quad G_{nk} = \int_0^H \xi_{nyy}(y) \xi_k(y) dy. \quad (6.2)$$

Учитывая (5.17) и ортогональность функций (5.3) на отрезке  $[0, H]$ :

$$\int_0^H \xi_n(y) \xi_k(y) dy = 0, \quad n \neq k, \quad \int_0^H \xi_k^2(y) dy = H, \quad (6.3)$$

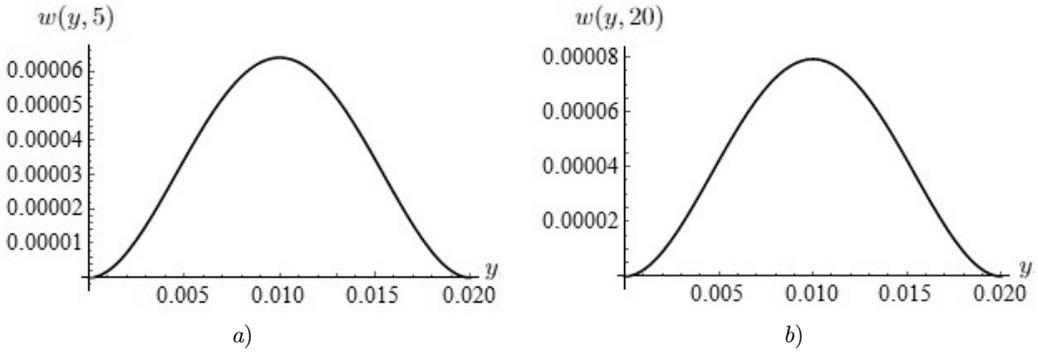
получим

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( MH \delta_{nk} + \frac{D_k B_n}{H} \right) w_{ntt}(t) + (\beta_1 H \delta_{nk} + \beta_2 F_{nk}) w_{nt}(t) + (DF_{nk} + N_0 G_{nk} + \right. \\ & \left. + \gamma H \delta_{nk}) w_n(t) - \left( \frac{D_k A_n}{H} - E_{nk} \right) \varphi_{nt}(t) \right] = B_k P_*(t) - J_k N_1(t), \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.4) \end{aligned}$$

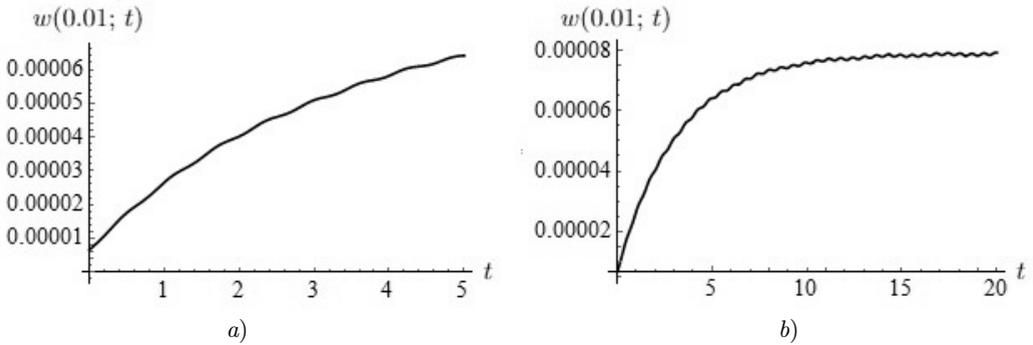
На Рис. 6.1 представлены деформации пластины в момент времени  $t = 5$  и  $t = 20$  при  $m = 8$ . На Рис. 6.2 представлены деформации пластины в средней точке пластины  $y = 0.01$  при  $t \in [0, 5]$  и  $t \in [0, 20]$  при  $m = 8$ .

II. Рассмотрим нелинейную модель деформируемого твердого тела (2.10). Подставляя  $L_2 \left( w_0(y), \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_n(y) \right)$  в (5.18), получим

$$\begin{aligned} & \int_0^H \left( M \sum_{n=1}^{\infty} w_{ntt}(t) \xi_n(y) + D \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_{nyyyy}(y) + N_1(t)w_{0yy} + N_0 \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_{nyy}(y) + \right. \\ & \left. + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_n(y) + \beta_1 \sum_{n=1}^m w_{nt}(t) \xi_n(y) + \beta_2 \sum_{n=1}^m w_{nt}(t) \xi_{nyyyy}(y) - \right. \\ & \left. - \mu \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_{nyy}(y) \int_0^H w_{0y}^2(y) dy - \right) \xi_k(y) dy = \quad (6.5) \end{aligned}$$



**Рис. 6.1.** Деформация пластины в моменты времени а)  $t = 5$ ; б)  $t = 20$   
**Fig 6.1.** Deformation of the plate at the moments of time а)  $t = 5$ ; б)  $t = 20$



**Рис. 6.2.** Деформация пластины в точке  $y = 0.01$ :  
 а) при  $t \in [0, 5]$ ; б) при  $t \in [0, 20]$   
**Fig 6.2.** Deformation of the plate at the point  $y = 0.01$ :  
 а) at  $t \in [0, 5]$ ; б) at  $t \in [0, 20]$

$$\begin{aligned}
 & -2w_{0yy} \left( \mu \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \int_0^H w_{0y}(y) \xi_{ny}(y) dy + \eta \sum_{n=1}^{\infty} w_{nt}(t) \int_0^H w_{0y}(y) \xi_{ny}(y) dy \right) \xi_k(y) dy = \\
 & = B_k P_*(t) + \frac{D_k}{H} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_{nt}(t) - \frac{D_k}{H} \sum_{n=1}^{\infty} B_n w_{ntt}(t) - \sum_{n=1}^{\infty} E_{nk} \varphi_{nt}(t), \quad k = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Введем обозначения

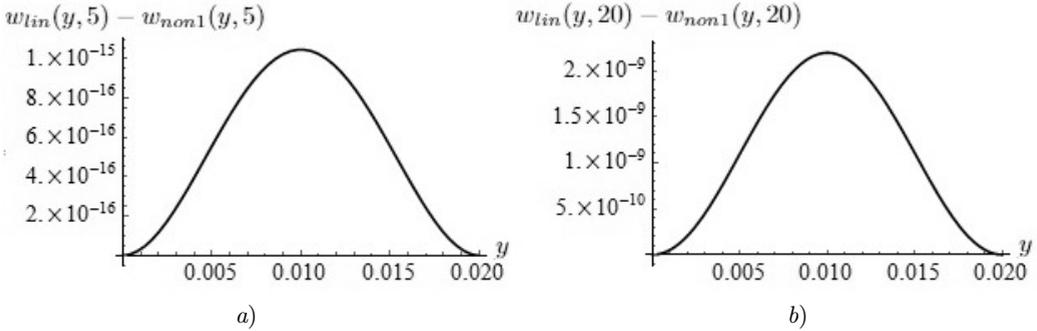
$$U = \int_0^H w_{0y}^2(y) dy, \quad Q_k = \int_0^H w_{0y} \xi_{ky}(y) dy. \tag{6.6}$$

Тогда с учетом (6.2)–(6.3), (6.6) получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( MH \delta_{nk} + \frac{D_k B_n}{H} \right) w_{ntt}(t) + (\beta_1 H \delta_{nk} + \beta_2 F_{nk} - 2\eta Q_n J_k) w_{nt}(t) + (DF_{nk} + \dots \right.$$

$$\begin{aligned}
 &+N_0G_{nk} + \gamma H\delta_{nk} - \mu UG_{nk} - 2\mu Q_n J_k) w_n(t) - \left(\frac{D_k A_n}{H} - E_{nk}\right) \varphi_{nt}(t) \Big] = \quad (6.7) \\
 &= B_k P_*(t) - J_k N_1(t), \quad k = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

На Рис. 6.3 представлены отличия деформаций пластины, полученные при решении систем уравнений (6.4), (6.7) для  $m = 8$  при  $t = 5$  и  $t = 20$ , где  $w_{lin}(y, t)$ ,  $w_{non1}(y, t)$  это решения этих систем соответственно.



**Рис. 6.3.** Отличие деформации пластины в моделях (2.9) и (2.10) в моменты времени: а)  $t = 5$ ; б)  $t = 20$

**Fig 6.3.** Difference of plate deformation in the models (2.9) and (2.10) at the moments of time: а)  $t = 5$ ; б)  $t = 20$

III. Рассмотрим нелинейную модель деформируемого твердого тела (2.11). Подставив  $L_2\left(w_0(y), \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_n(y)\right)$  в (5.18), получим

$$\begin{aligned}
 &\int_0^H \left( M \sum_{n=1}^{\infty} w_{ntt}(t) \xi_n(y) + D \left( \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_{nyyyy}(y) - 3 \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) (w_{0yy} w_{0y} \xi_{ny}(y))_{yy} - \right. \right. \\
 &-1.5 \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) (w_{0y}^2 \xi_{ny}(y))_{yy} \Big) + N_1(t) w_{0yy} + N_0 \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_{nyy}(y) + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_n(y) + \\
 &\quad \left. + \beta_1 \sum_{n=1}^m w_{nt}(t) \xi_n(y) + \beta_2 \sum_{n=1}^m w_{nt}(t) \xi_{nyyyy}(y) \right) \xi_k(y) dy = \quad (6.8) \\
 &= B_k P_*(t) + \frac{D_k}{H} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_{nt}(t) - \frac{D_k}{H} \sum_{n=1}^{\infty} B_n w_{ntt}(t) - \sum_{n=1}^{\infty} E_{nk} \varphi_{nt}(t), \quad k = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$R_{nk} = 3 \int_0^H (w_{0yy} w_{0y} \xi_{ny}(y))_{yy} \xi_k(y) dy, \quad S_{nk} = 1.5 \int_0^H (w_{0y}^2 \xi_{ny}(y))_{yy} \xi_k(y) dy. \quad (6.9)$$

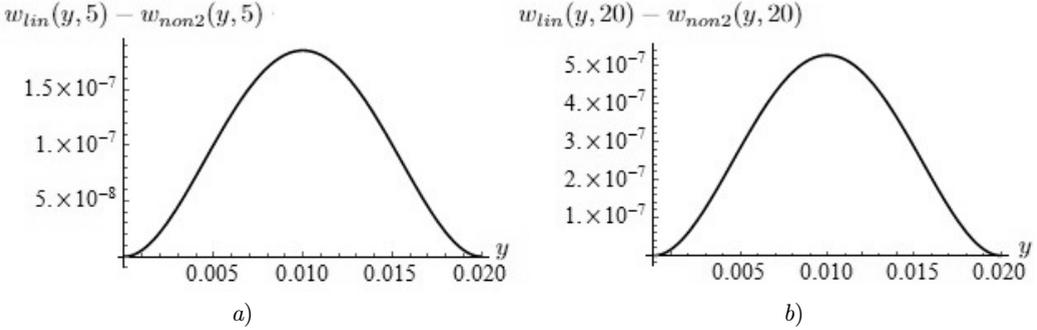
Тогда с учетом (6.2)–(6.3), (6.9) получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( M H \delta_{nk} + \frac{D_k B_n}{H} \right) w_{ntt}(t) + (\beta_1 H \delta_{nk} + \beta_2 F_{nk}) w_{nt}(t) + (D (F_{nk} - R_{nk} - S_{nk}) + \right.$$

$$+N_0G_{nk} + \gamma H\delta_{nk}) w_n(t) - \left( \frac{D_k A_n}{H} - E_{nk} \right) \varphi_{nt}(t) \Big] = B_k P_*(t) - J_k N_1(t), \quad (6.10)$$

$$k = 1, 2, \dots$$

На Рис. 6.4 представлены отличия деформаций пластины, полученные при решении систем уравнений (6.4), (6.10) для  $m = 8$  при  $t = 5$  и  $t = 20$ , где  $w_{lin}(y, t)$ ,  $w_{non2}(y, t)$  это решения этих систем соответственно.



**Рис. 6.4.** Отличия деформации пластины в моделях (2.9) и (2.11) в моменты времени: а)  $t = 5$ ; б)  $t = 20$

**Fig 6.4.** Difference of plate deformation in the models (2.9) and (2.11) at the moments of time: а)  $t = 5$ ; б)  $t = 20$

VI. Рассмотрим нелинейную модель деформируемого твердого тела (2.12). Подставив  $L_2 \left( w_0(y), \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_n(y) \right)$  в (5.18), получим

$$\int_0^H \left( M \sum_{n=1}^{\infty} w_{ntt}(t) \xi_n(y) + D \left( \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_{nyyyy}(y) - 3 \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) (w_{0yy} w_{0y} \xi_{ny}(y))_{yy} - \right. \right.$$

$$\left. - 1.5 \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) (w_{0y}^2 \xi_{ny}(y))_{yy} \right) + N_1(t) w_{0yy} + N_0 \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_{nyy}(y) + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_n(y) +$$

$$+ \beta_1 \sum_{n=1}^{\infty} w_{nt}(t) \xi_n(y) + \beta_2 \left( \sum_{n=1}^{\infty} w_{nt}(t) \xi_{nyyyy}(y) - \right. \quad (6.11)$$

$$\left. - 3 \sum_{n=1}^{\infty} w_{nt}(t) (w_{0yy} w_{0y} \xi_{ny}(y))_{yy} - 1.5 \sum_{n=1}^{\infty} w_{nt}(t) (w_{0y}^2 \xi_{ny}(y))_{yy} \right) \xi_k(y) dy =$$

$$= B_k P_*(t) + \frac{D_k}{H} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_{nt}(t) - \frac{D_k}{H} \sum_{n=1}^{\infty} B_n w_{ntt}(t) - \sum_{n=1}^{\infty} E_{nk} \varphi_{nt}(t), \quad k = 1, 2, \dots$$

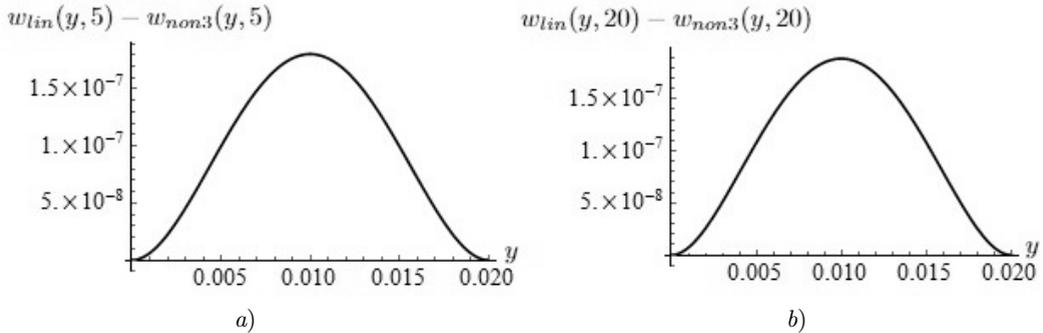
Тогда с учетом (6.2)–(6.3) получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( MH\delta_{nk} + \frac{D_k B_n}{H} \right) w_{ntt}(t) + (\beta_1 H\delta_{nk} + \beta_2 (F_{nk} - R_{nk} - S_{nk})) w_{nt}(t) + \right.$$

$$+ (D(F_{nk} - R_{nk} - S_{nk}) + N_0 G_{nk} + \gamma H \delta_{nk}) w_n(t) - \left( \frac{D_k A_n}{H} - E_{nk} \right) \varphi_{nt}(t) \Big] = \quad (6.12)$$

$$= B_k P_*(t) - J_k N_1(t), \quad k = 1, 2, \dots$$

На Рис. 6.5 представлены отличия деформаций пластины, полученные при решении систем уравнений (6.4), (6.12) для  $m = 8$  при  $t = 5$  и  $t = 20$ , где  $w_{lin}(y, t)$ ,  $w_{non3}(y, t)$  это решения этих систем соответственно.



**Рис. 6.5.** Отличие деформации пластины в моделях (2.9) и (2.12) в моменты времени: а)  $t = 5$ ; б)  $t = 20$

**Fig 6.5.** Difference of plate deformation in the models (2.9) and (2.12) at the moments of time: а)  $t = 5$ ; б)  $t = 20$

Как видно из Рис. 6.3–6.5 все учтенные нелинейные силы приводят к уменьшению прогиба пластины. Причем наибольшее изменение прогиба достигается вследствие учета нелинейной составляющей изгибающего момента.

## 7. Заключение

В работе на основе предложенных математических моделей системы измерения давления в авиационных двигателях произведено исследование влияния нелинейных сил на динамику жестко закрепленного чувствительного элемента датчика измерения давления рабочей среды в камере сгорания авиационного двигателя. Исследование проведено на основе сравнения решений, полученных для линейной и нелинейных математических моделей деформируемого твердого тела. Исследование динамики упругого элемента основано на применении методов малого параметра и Бубнова-Галеркина и проведении численного эксперимента в системе Mathematica 12.0.

**Финансирование.** Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 23-21-00517.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Giacobbi D. B., Semler C., Paidoussis M. P. Dynamics of pipes conveying fluid of axially varying density // Journal of Sound and Vibration. 2020. Vol. 473. 115202. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115202>

2. Abdelbaki A. R., Paidoussis M. P., Misra A. K. A nonlinear model for a hanging cantilevered pipe discharging fluid with a partially-confined external flow // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2020. Vol. 118. 103290. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2019.103290>
3. Kondratov D. V., Kondratova T. S., Popov V. S., Popova M. V. Modeling hydroelastic response of the channel wall resting on a nonlinear elastic foundation // *Lecture Notes in Mechanical Engineering*. 2023. pp. 261–270. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-031-38126-3\\_27](https://doi.org/10.1007/978-3-031-38126-3_27)
4. Могилевич Л. И., Попова Е. В. Продольные волны в стенках кольцевого канала из материала с дробной нелинейностью, заполненного жидкостью // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. 2023. Т. 31, № 3. С. 365–376. DOI: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-003040>
5. Velmisov P. A., Ankilov A. V., Pokladova Yu. V. On the stability of solutions of certain classes of initial-boundary-value problems in aerohydroelasticity // *Journal of Mathematical Sciences*. 2021. Vol. 259, No. 2. pp. 296–308. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05618-6>
6. Дмитриенко А. Г., Исаков С. А., Белозубов Е. М. Датчики давления на основе нано- и микроэлектромеханических систем для ракетной и авиационной техники // *Датчики и системы*. 2012. Т. 160, № 9. С. 19–25.
7. Стучебников В., Васьков Ю., Савченко Е. Специальные датчики давления промышленной группы «МИДА» // *Компоненты и технологии*. 2021. Т. 238, № 5. С. 12–15.
8. Pirogov S. P., Cherentsov D. A., Chuba A. Yu., Ustinov N. N. Simulation of forced oscillations of pressure monitoring devices // *International Journal of Engineering Trends and Technology*. 2022. Vol. 70, No. 2. pp. 32–36. DOI: <https://doi.org/10.14445/22315381/IJETT-V70I2P205>
9. Эткин Л. Г. Виброчастотные датчики. Теория и практика. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 408 с.
10. Датчики измерительных систем: в 2-х кн. / Ж. Аш [и др.] ; пер. с франц. М.: Мир, 1992. 419 с.
11. Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А. Нелинейная математическая модель систем измерения давления в газожидкостных средах // *Журнал Средне-волжского математического общества*. 2023. Т. 25, № 4. С. 313–325. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.313-325>
12. Velmisov P. A., Pokladova Yu. V. Mathematical modelling of the «pipeline – pressure sensor» system // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1353, No. 1. pp. 012085. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1353/1/012085>
13. Вельмисов, П. А., Тамарова Ю. А. Математическое моделирование динамики аэроупругой системы «трубопровод – датчик давления» // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2024. № 2. С. 69–78. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2024.2.08>

Поступила 01.06.2024; доработана после рецензирования 4.08.2024;  
принята к публикации 28.08.2024

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## REFERENCES

1. D. B. Giacobbi, C. Semler, M. P. Paidoussis, “Dynamics of Pipes Conveying Fluid of Axially Varying Density”, *Journal of Sound and Vibration*, **473** (2020), 115202. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115202>.
2. A. R. Abdelbaki, M. P. Paidoussis, A. K. Misra, “A Nonlinear Model for a Hanging Cantilevered Pipe Discharging Fluid with a Partially-Confined External Flow”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **118** (2020), 103290. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2019.103290>.
3. D. V. Kondratov, T. S. Kondratova, V. S. Popov, M. V. Popova, “Modeling Hydroelastic Response of the Channel Wall Resting on a Nonlinear Elastic Foundation”, *Lecture Notes in Mechanical Engineering*, 2023, 261–270. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-031-38126-3\\_27](https://doi.org/10.1007/978-3-031-38126-3_27).
4. L. I. Mogilevich, E. V. Popova, “Longitudinal Waves in the Walls of an Annular Channel Filled with Liquid and Made of a Material with Fractional Nonlinearity”, *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, **31**:3 (2023), 365–376. DOI: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-003040>.
5. P. A. Velmisov, A. V. Ankilov, Yu. V. Pokladova, “On the Stability of Solutions of Certain Classes of Initial-Boundary-Value Problems in Aerohydroelasticity”, *Journal of Mathematical Sciences*, **259**:2 (2021), 296–308. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05618-6>.
6. A. G. Dmitrienko, S. A. Isakov, E. M. Belozubov, “Pressure Sensors Based on Nano- and Microelectromechanical Systems for Rocket and Aviation Equipment”, *Sensors and Systems*, **160**:9 (2012), 19–25 (In Russ.).
7. V. Stuchebnikov, Y. Vaskov, E. Savchenko, “Special Pressure Sensors of the Industrial Group «MIDA»”, *Components and Technologies*, **238**:5 (2021), 12–15 (In Russ.).
8. S. P. Pirogov, D. A. Cherentsov, A. Yu. Chuba, N. N. Ustinov, “Simulation of Forced Oscillations of Pressure Monitoring Devices”, *International Journal of Engineering Trends and Technology*, **70**:2 (2022), 32–36. DOI: <https://doi.org/10.14445/22315381/IJETT-V70I2P205>.
9. L. G. Etkin, *Vibrofrequency Sensors. Theory and Practice*, Bauman MSTU Publ., Moscow, 2004 (In Russ.), 408 p.
10. J. Ash et al., *Sensors of Measuring Systems: In 2 books*, Mir Publ., Moscow, 1992 (In Russ.), 419 p.

11. P. A. Velmisov, Yu. A. Tamarova, “Nonlinear Mathematical Model of Pressure Measurement Systems in Gas-Liquid Media”, *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, **25**:4 (2023), 313–325. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.313-325> (In Russ.).
12. P. A. Velmisov, Yu. V. Pokladova, “Mathematical Modelling of the «Pipeline – Pressure Sensor» System”, *Journal of Physics: Conference Series*, **1353**:1 (2019), 012085\_1–012085\_6. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1353/1/012085>.
13. P. A. Velmisov, Yu. A. Tamarova, “Mathematical Modeling of the Dynamics of the Aeroelastic «Pipeline – Pressure Sensor» System”, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2024, no. 2, 69–78. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2024.2.08> (In Russ.).

*Submitted 01.06.2024; Revised 4.08.2024; Accepted 28.08.2024*

*The authors have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The authors declare no conflict of interest.