

DOI 10.15507/2079-6900.25.202304.326-341

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 51.72+531.37

Неголономные механические системы на плоскости с переменным углом наклона

Е. А. Микишанина^{1,2}

¹ ФГБУН «Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук» (г. Москва, Российская Федерация) ² ФГБОУ ВО «Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова» (г. Чебоксары, Российская Федерация)

Аннотация. В настоящей статье рассматриваются такие неголономные механические системы, как конек Чаплыгина, неоднородные сани Чаплыгина и шар Чаплыгина, движущиеся в поле силы тяжести по колеблющейся плоскости с углом наклона, меняющимся по периодическому закону. Явным интегрированием уравнений движения конька Чаплыгина и неоднородных саней Чаплыгина получены аналитические выражения скоростей и траекторий точки контакта. Найдены числовые параметры периодического закона, по которому должен изменяться угол наклона, чтобы скорость конька Чаплыгина была неограничена, то есть имело место ускорение. В случае неоднородных саней, наоборот, найдены числовые параметры периодического закона, при которых скорость ограничена и отсутствует дрейф саней, в то время как при равных прочих параметрах и начальных условиях при движении по горизонтальной или наклонной с постоянным углом наклона плоскости скорость и траектория точки контакта неограничены, то есть имеет место дрейф саней. Аналогичная задача решается для шара Чаплыгина, траектории строятся на основе численного интегрирования. Результаты проиллюстрированы графически. Для обсуждения предлагается управление углом наклона плоскости, зависящее от момента импульса шара. Такое управление независимо от начальных условий почти всегда может предотвратить дрейф шара в одном из направлений.

Ключевые слова: неголономная система, сани Чаплыгина, шар Чаплыгина, переменный угол наклона, динамика, ускорение, дрейф

Для цитирования: Микишанина Е. А. Неголономные механические системы на плоскости с переменным углом наклона // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 4. С. 326–341. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.326-341>

Об авторах:

Микишанина Евгения Арифжановна научный сотрудник отдела механики, ФГБУН «Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук» (119991, Россия, г. Москва, ул. Губкина, д. 8), доцент кафедры актуарной и финансовой математики, ФГБОУ ВО «Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова» (428015, Россия, г. Чебоксары, Московский пр., д. 15), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4408-1888>, evaeva_84@mail.ru

© Е. А. Микишанина



MSC2020 70E15, 70Q05

Nonholonomic mechanical systems on a plane with a variable slope

E.A. Mikishanina^{1, 2}¹ *Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation)*² *Chuvash State University (Cheboksary, Russian Federation)*

Abstract. This paper considers such nonholonomic mechanical systems as Chaplygin skate, inhomogeneous Chaplygin sleigh and Chaplygin sphere moving in the gravity field along an oscillating plane with a slope varying with the periodic law. By explicit integration of the equations of motion, analytical expressions for the velocities and trajectories of the contact point for Chaplygin skate and Chaplygin sleigh are obtained. Numerical parameters of the periodic law for the inclination angle change are found, such that the velocity of Chaplygin skate will be unbounded, that is, an acceleration will take place. In the case of inhomogeneous Chaplygin sleigh, on the contrary, numerical parameters of the periodic law of the inclination angle change are found, for which the sleigh velocity is bounded and there is no drift of the sleigh. For similar numerical parameters and initial conditions, when the sleigh moves along a horizontal or inclined plane with the constant slope, the velocity and trajectory of the contact point are unbounded, that is, there is a drift of the sleigh. A similar problem is solved for the Chaplygin sphere; its trajectories are constructed on the basis of numerical integration. The results are illustrated graphically. The control of the slope of the plane, depending on the angular momentum of the sphere, is proposed for discussion. Regardless of the initial conditions, such control can almost always prevent the drift of the sphere in one of the directions.

Keywords: nonholonomic system, Chaplygin sleigh, Chaplygin sphere, variable slope, dynamics, acceleration, drift

For citation: E. A. Mikishanina. Nonholonomic mechanical systems on a plane with a variable slope. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 25:4(2023), 326–341. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.326-341>

About the authors:

Evgeniya A. Mikishanina Researcher, Department of Mechanics, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences (8 Gubkina st., Moscow 119991, Russia), associate professor, Department of Actuarial and Financial Mathematics, Chuvash State University (15 Moskovskii av., Cheboksary 428015, Russia), Ph.D.(Phys.-Math.), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4408-1888>, evaeva_84@mail.ru

1. Введение

Вопросам динамики неголономных систем на горизонтальной плоскости и их управлению посвящено достаточное количество работ. Самыми известными и хорошо изученными системами являются сани Чаплыгина [1], [2], [3], шар Чаплыгина [4], [5], [6], [7], волчок Чаплыгина [8], [9]. Здесь указаны только некоторые работы, хотя на самом деле, этот список может быть гораздо шире.

В научной литературе можно встретить исследования динамики этих систем на наклонной плоскости. В работах [10], [11] исследовано поведение шара Чаплыгина, который катится без проскальзывания по наклонной плоскости в поле силы тяжести. В этих работах уравнения движения шара на наклонной плоскости сводятся к уравнениям движения шара Чаплыгина на горизонтальной плоскости с использованием соответствующей замены координат и времени, но разными способами. Движение саней Чаплыгина по наклонной плоскости исследовано в [1], указаны асимптотики для прямолинейных скольжений саней вдоль линии наибольшего ската.

В данной работе на примере конька Чаплыгина, уравновешенных неоднородных саней Чаплыгина и шара Чаплыгина, движущихся по плоскости в поле силы тяжести, мы продемонстрируем, как изменяя угол наклона опорной плоскости, можно влиять на их динамику. Мы явно покажем, что при скольжении уравновешенных саней Чаплыгина или конька Чаплыгина [12] (уравнения движения эквивалентны) по плоскости, угол наклона которой меняется по периодическому закону, можно подобрать числовые параметры, при которых линейная скорость конька будет неограничена. В таком случае будем говорить, что имеет место ускорение. Для сравнения, при отличной от нуля угловой скорости движение конька как по горизонтальной, так и по наклонной плоскости происходит с ограниченной скоростью. Также для всех рассмотренных систем мы проанализируем характер траекторий точки контакта. Если обе координаты точки контакта механической системы являются ограниченными функциями, то будем говорить, что траектория ограничена. Если хотя бы одна из координат является неограниченной функцией, то будем говорить, что траектория неограничена и имеет место дрейф конька (саней, шара).

Непосредственным обобщением саней Чаплыгина являются неоднородные сани Чаплыгина, в которых конек или острое колесико может быть заменено на пневматическое колесико [13]. Если для конька Чаплыгина (саней Чаплыгина) неголономное ограничение имеет вид

$$(\mathbf{v}, \mathbf{n}) = 0,$$

где \mathbf{v} – вектор скорости, \mathbf{n} – нормаль к плоскости (конька) колесика, то для неоднородных саней неголономное ограничение принимает вид

$$(\mathbf{v}, \mathbf{n}) = \text{const}$$

и интерпретируется как увод колеса [14]. В [13] выполнено явное интегрирование уравнений движения неоднородных саней Чаплыгина на горизонтальной плоскости и проведено достаточно полное исследование динамики. В данной работе мы выполним явное интегрирование уравнений движения уравновешенных неоднородных саней Чаплыгина на плоскости с постоянным и периодическим углом наклона и покажем, что, подобрав соответствующим образом параметры управления углом наклона, можно добиться движения саней с ограниченной скоростью по ограниченной траектории, в то время как при аналогичных начальных условиях движение саней по горизонтальной или наклонной плоскости происходит с неограниченной скоростью и имеет место дрейф саней.

Аналогичная задача решается и для шара Чаплыгина. С помощью численных расчетов мы строим траектории точки контакта для иллюстрации сделанных выводов и подтверждения гипотез.

В качестве обсуждения рассматривается управление углом наклона опорной плоскости, зависящее от кинетического момента шара. В этом случае всегда можно подобрать

параметры управления таким образом, что уравнения движения при достаточно больших временах будут эквивалентны уравнениям движения шара Чаплыгина на горизонтальной плоскости и фазовые кривые управляемой системы будут лежать в сколь угодно малой окрестности инвариантных торов системы, соответствующей свободному движению шара Чаплыгина по горизонтальной плоскости.

2. Конек Чаплыгина

Рассмотрим конек Чаплыгина (уравновешенные сани Чаплыгина – эквивалентная система) на плоскости. Выберем на опорной плоскости некоторую точку O и введем систему координат Oxy . Исследуем динамику конька на горизонтальной плоскости; на плоскости, находящейся под постоянным вдоль оси Ox углом к горизонту; на колеблющейся плоскости, с периодически меняющимся вдоль оси Ox углом наклона.

В случае движения по плоскости, находящейся под постоянным углом χ вдоль оси Ox к горизонту, динамика конька описывается системой

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -\mu \cos \varphi, & \dot{\omega} &= 0, & \dot{\varphi} &= \omega, \\ \dot{x} &= v \cos \varphi, & \dot{y} &= v \sin \varphi, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\mu = g \sin \chi$, v – линейная скорость центра масс конька, ω – угловая скорость конька, φ – угол между осью конька и положительным направлением оси Ox , x, y – координаты точки контакта конька на опорной плоскости.

Динамика на горизонтальной плоскости конька Чаплыгина довольно тривиальна. Он демонстрирует равномерное движение по прямой или равномерное движение по окружности.

Пусть $\chi \neq 0$. В случае $\omega_0 = 0$ система (2.1) имеет решение

$$\begin{aligned} v &= -\mu \cos \varphi_0 \cdot t + v_0, & \omega &= 0, & \varphi &= \varphi_0, \\ x &= x_0 + v_0 \cos \varphi_0 \cdot t - \frac{\mu}{4} t^2 - \frac{\mu \cos 2\varphi_0}{4} t^2, & y &= y_0 + v_0 \sin \varphi_0 \cdot t - \frac{\mu \sin 2\varphi_0}{4} t^2, \end{aligned}$$

то есть конек в зависимости от начальных условий скользит по прямой равномерно или равноускоренно.

Замечание. Здесь и далее нижним индексом «0» будем обозначать начальное значение функции в момент времени $t = 0$.

В случае $\omega_0 \neq 0$ решения системы (2.1) задаются аналитическими выражениями

$$\begin{aligned} v &= c - \frac{\mu}{\omega_0} \sin \varphi, & \omega &= \omega_0, & \varphi &= \omega_0 t + \varphi_0, & c &= v_0 + \frac{\mu}{\omega_0} \sin \varphi_0, \\ x &= x_0 + \frac{c}{\omega_0} (\sin \varphi - \sin \varphi_0) + \frac{\mu}{4\omega_0^2} (\cos 2\varphi - \cos 2\varphi_0), \\ y &= y_0 - \frac{\mu}{2\omega_0} \cdot t - \frac{c}{\omega_0} (\cos \varphi - \cos \varphi_0) + \frac{\mu}{4\omega_0^2} (\sin 2\varphi - \sin 2\varphi_0). \end{aligned}$$

Система демонстрирует хорошо известный эффект – дрейф конька с периодической скоростью вдоль оси Oy , несмотря на то, что плоскость имеет наклон по оси Ox .

Уравнения движения, описывающие динамику конька Чаплыгина на плоскости с периодическим углом наклона

$$\chi(t) = \arcsin(\delta \sin \Omega t) \in [-\arcsin \delta, \arcsin \delta] \subset [-\pi/2, \pi/2], \quad \Omega \neq 0, \quad (2.2)$$

имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -\sigma \sin \Omega t \cos \varphi, & \dot{\omega} &= 0, & \dot{\varphi} &= \omega, \\ \dot{x} &= v \cos \varphi, & \dot{y} &= v \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\sigma = g\delta$. Считаем, что δ достаточно мало и отрыва тела от опорной плоскости не происходит. Динамика такой системы более разнообразна. Классифицируем ее по двум признакам: ограниченность-неограниченность линейной скорости v и ограниченность-неограниченность траекторий (наличие-отсутствие дрейфа).

1. $\omega = \omega_0 = 0$.

Тогда линейная скорость ограничена

$$v = \frac{\sigma}{2\Omega} (\cos(\Omega t + \varphi_0) + \cos(\Omega t - \varphi_0)) + d, \quad d = v_0 - \frac{\sigma}{\Omega} \cos \varphi_0.$$

Траектория определяется следующими образом:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{\sigma \cos \varphi_0}{2\Omega^2} (\sin(\Omega t + \varphi_0) + \sin(\Omega t - \varphi_0)) + d \cos \varphi_0 \cdot t, \\ y &= y_0 + \frac{\sigma \sin \varphi_0}{2\Omega^2} (\sin(\Omega t + \varphi_0) + \sin(\Omega t - \varphi_0)) + d \sin \varphi_0 \cdot t. \end{aligned} \quad (2.4)$$

При $d = 0$ траектория, как и скорость, ограничена и носит периодический характер, при $d \neq 0$ имеет место дрейф конька.

2. $\omega = \omega_0 \neq 0$

- В случае $\Omega = \pm\omega_0$ имеем

$$\begin{aligned} v &= v_0 \pm et \mp \frac{\sigma}{2\omega_0} \sin \omega_0 t \sin \varphi, & \varphi &= \omega_0 t + \varphi_0, \\ x &= x_0 + \frac{v_0}{\omega_0} (\sin \varphi - \sin \varphi_0) \pm \left(\frac{e}{\omega_0} t \sin \varphi + \frac{e}{\omega_0^2} (\cos \varphi - \cos \varphi_0) \right) \pm \\ &\quad \pm \frac{\sigma}{24\omega_0^2} (-3 \sin(2\varphi - \omega_0 t) + \sin(2\varphi + \omega_0 t) + 2 \sin 2\varphi_0), \\ y &= y_0 - \frac{v_0}{\omega_0} (\cos \varphi - \cos \varphi_0) \pm \left(-\frac{e}{\omega_0} t \cos \varphi + \frac{e}{\omega_0^2} (\sin \varphi - \sin \varphi_0) \right) \pm \\ &\quad \pm \frac{\sigma}{24\omega_0^2} (3 \cos(2\varphi - \omega_0 t) - \cos(2\varphi + \omega_0 t) - 2 \cos 2\varphi_0) \pm \frac{\sigma}{4\omega_0^2} (\cos \omega_0 t - 1). \end{aligned}$$

где $e = \frac{\sigma}{2} \sin \varphi_0$. Очевидно, что при $e \neq 0$ имеет место неограниченное возрастание абсолютной скорости и неограниченность траектории. Иначе скорость v и координаты x, y снова являются ограниченными и периодическими.

- В случае $\Omega \neq \pm\omega_0$ скорость ограничена и задается формулой

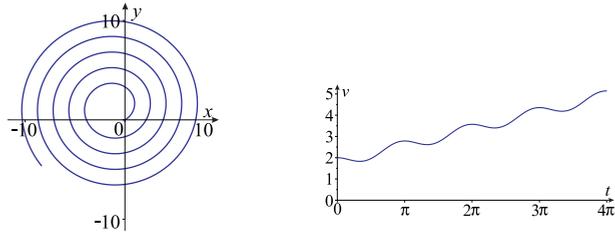
$$v = h + \frac{\sigma}{2(\omega_0 + \Omega)} \cos((\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0) - \frac{\sigma}{2(\omega_0 - \Omega)} \cos((\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0),$$

где $h = v_0 + \frac{\sigma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cos \varphi_0$. Далее возможны следующие случаи.

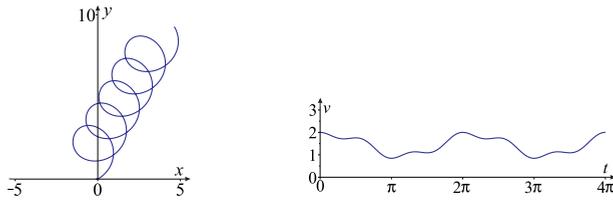
– $\Omega \neq \pm 2\omega_0$. Траектории периодические, в силу их громоздкости не будем приводить здесь явных формул.

– $\Omega = \pm 2\omega_0$ Траектории неограниченные. Имеет место дрейф конька.

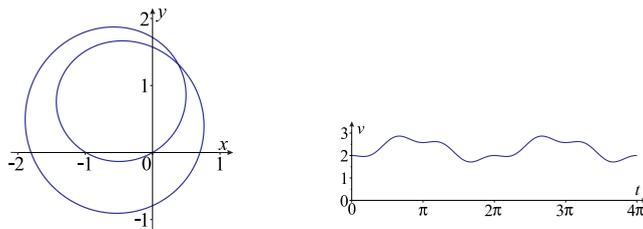
На Рис. 2.1 приведены траектории и график линейной скорости конька при движении по колеблющейся плоскости для различных значений механических параметров.



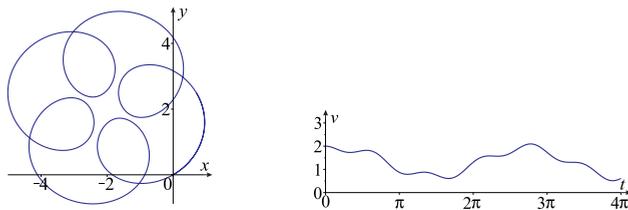
a) $\omega_0 = 1, \quad \Omega = 1$



b) $\omega_0 = 1, \quad \Omega = 2$



c) $\omega_0 = 2, \quad \Omega = 1$



d) $\omega_0 = 1, \quad \Omega = 1.8$

Рис. 2.1. Траектория и график линейной скорости конька Чаплыгина при $\sigma = 1$, начальных условиях $v_0 = 2, \varphi_0 = \pi/6, \omega = \omega_0$ и различных значениях параметра Ω

Fig 2.1. Trajectory and graph of a linear velocity of the Chaplygin skate with $\sigma = 1$, the initial conditions $v_0 = 2, \varphi_0 = \pi/6, \omega = \omega_0$ and different value of the Ω

Таким образом, при $\omega_0 \neq 0$ конек движется по наклонной (с постоянным углом наклона) или горизонтальной плоскости с ограниченной скоростью. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 2.1. *Сколь угодно малыми колебаниями плоскости $|\delta| > 0$, в результате которых ее угол наклона меняется по периодическому закону $\chi = \pm \arcsin(\delta \sin \omega_0 t)$, где $\omega_0 \neq 0$ – угловая скорость конька, и при начальном условии $\varphi_0 \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$ можно разогнать конек Чаплыгина, в результате чего будет иметь место неограниченное возрастание абсолютного значения линейной скорости.*

Это утверждение проиллюстрировано на Рис. 2.1 (а).

3. Неоднородные сани Чаплыгина

Рассмотрим уравновешенные неоднородные сани Чаплыгина, которые отличаются от классических саней Чаплыгина (конька Чаплыгина) тем, что вместо конька (острого колесика) установлено пневматическое колесо, способное скользить в перпендикулярном своей плоскости направлении [13].

Введем еще одну систему координат $O_1x_1y_1$, связанную с центром колесика, и осями O_1x_1 , направленной вдоль оси саней, и O_1y_1 , перпендикулярной плоскости колесика. Пусть $\mathbf{v} = (v, u)$ – вектор скорости центра масс колесика или конька в подвижной системе координат $O_1x_1y_1$. В отличие от конька Чаплыгина, на которое накладывается неголономное ограничение

$$u = 0,$$

неголономное ограничение в случае неоднородных саней Чаплыгина имеет вид

$$u = u_0 = \text{const.} \quad (3.1)$$

Уравнения движения уравновешенных (центр масс саней совпадает с центром пневматического колесика) неоднородных саней на плоскости, находящейся под углом χ вдоль оси Ox к горизонту, принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{v} &= u_0\omega - \mu \cos \varphi, & \dot{\omega} &= 0, & \dot{\varphi} &= \omega, \\ \dot{x} &= v \cos \varphi - u_0 \sin \varphi, & \dot{y} &= v \sin \varphi + u_0 \cos \varphi, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $\mu = g \sin \chi$. Считаем, что $u_0 \neq 0$. Справедливы следующие очевидные утверждения.

Предложение 3.1. *При $\omega = \omega_0 = 0$ проекция скорости на ось O_1x_1 и координаты точки контакта неоднородных саней Чаплыгина и конька Чаплыгина связаны равенствами*

$$\begin{aligned} v_{\text{неод}} &= v_{\kappa}, \\ x_{\text{неод}} &= x_{\kappa} - u_0 \sin \varphi_0 \cdot t, \\ y_{\text{неод}} &= y_{\kappa} + u_0 \cos \varphi_0 \cdot t, \end{aligned}$$

где $v_{\text{неод}}, v_{\kappa}$ – проекции вектора скорости на ось O_1x_1 неоднородных саней Чаплыгина и конька Чаплыгина, $(x_{\text{неод}}, y_{\text{неод}})$ – координаты точки контакта неоднородных саней Чаплыгина, (x_{κ}, y_{κ}) – координаты точки контакта конька Чаплыгина, найденные при прочих равных параметрах и начальных условиях.

Предложение 3.2. При $\omega = \omega_0 \neq 0$ проекция скорости на ось O_1x_1 и координаты точки контакта неоднородных саней Чаплыгина и конька Чаплыгина связаны равенствами

$$\begin{aligned} v_{неод} &= v_{\kappa} + u_0\omega_0 t, \\ x_{неод} &= x_{\kappa} + u_0 \sin \varphi \cdot t + \frac{2u_0}{\omega_0} (\cos \varphi - \cos \varphi_0), \\ y_{неод} &= y_{\kappa} - u_0 \cos \varphi \cdot t + \frac{2u_0}{\omega_0} (\sin \varphi - \sin \varphi_0) \end{aligned}$$

где $v_{неод}, v_{\kappa}$ – проекции вектора скорости на ось O_1x_1 неоднородных саней Чаплыгина и конька Чаплыгина, $(x_{неод}, y_{неод})$ – координаты точки контакта неоднородных саней Чаплыгина, (x_{κ}, y_{κ}) – координаты точки контакта конька Чаплыгина, найденные при прочих равных параметрах и начальных условиях.

Рассмотрим далее задачу о возможности подбора режима колебаний опорной плоскости с периодически меняющимся углом наклона (2.2), позволяющим ограничить скорость и предотвратить дрейф неоднородных саней, который имеет место при движении саней по горизонтальной или наклонной плоскости.

Пусть $\omega = \omega_0 \neq 0$. Явные выражения для скорости v и траектории саней на плоскости с постоянным углом наклона χ , согласно Предложению (3.2), имеют вид:

$$\begin{aligned} v &= c + u_0\omega_0 t - \frac{\mu}{\omega_0} \sin \varphi, \quad \varphi = \omega_0 t + \varphi_0, \quad c = v_0 + \frac{\mu}{\omega_0} \sin \varphi_0 \\ x &= x_0 + u_0 \sin \varphi \cdot t + \frac{c}{\omega_0} (\sin \varphi - \sin \varphi_0) + \\ &+ \frac{2u_0}{\omega_0} (\cos \varphi - \cos \varphi_0) + \frac{\mu}{4\omega_0^2} (\cos 2\varphi - \cos 2\varphi_0), \\ y &= y_0 - \left(u_0 \cos \varphi + \frac{\mu}{2\omega_0} \right) t - \frac{c}{\omega_0} (\cos \varphi - \cos \varphi_0) + \\ &+ \frac{2u_0}{\omega_0} (\sin \varphi - \sin \varphi_0) + \frac{\mu}{4\omega_0^2} (\sin 2\varphi - \sin 2\varphi_0). \end{aligned}$$

Видим, что скорость v и траектория точки контакта всегда неограничены.

Теперь будем изменять угол наклона плоскости по закону (2.2), где $\Omega = \omega_0$. Уравнения движения саней имеют вид (3.2), где $\mu = \sigma \sin \Omega t$, $\sigma = g\delta$. Тогда функции v , x , y , согласно Предложению (3.2), запишутся в виде

$$\begin{aligned} v &= (u_0\omega_0 + e)t + f_v(t), \\ x &= \frac{e + u_0\omega_0}{\omega_0} t \sin \varphi + f_x(t), \\ y &= -\frac{e + u_0\omega_0}{\omega_0} t \cos \varphi + f_y(t). \end{aligned}$$

где $e = \frac{\sigma}{2} \sin \varphi_0$, $f_v(t)$, $f_x(t)$, $f_y(t)$ – периодические функции времени. Тогда, если выполнены условия

$$\Omega = \omega_0, \quad e + u_0\Omega = 0, \tag{3.3}$$

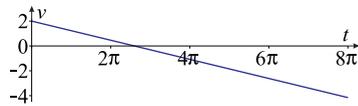
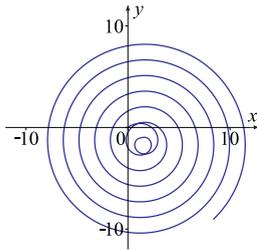
то скорость v и траектория точки контакта ограничены, в то время как при движении по горизонтальной или наклонной плоскости, но при прочих одинаковых параметрах и начальных условиях, скорость v и траектория точки контакта будут неограничены.

Аналогичные рассуждения будут иметь место в случае $\Omega = -\omega_0$. Если выполнены условия

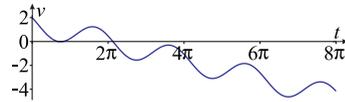
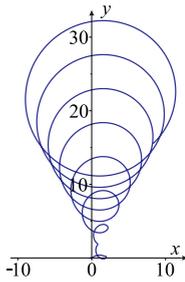
$$\Omega = -\omega_0, \quad e + u_0\Omega = 0, \quad (3.4)$$

то скорость v и траектория точки контакта также будут ограничены.

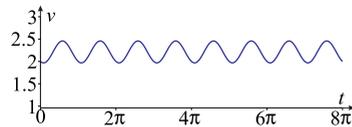
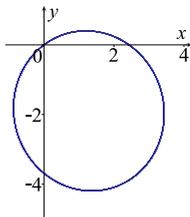
Иллюстрация приведенных выше результатов дана на Рис. 3.1 при заданных параметрах $u_0 = 0.245$, $g = 9.8$ и начальных условиях $v_0 = 2$, $\varphi_0 = \pi/6$, $\omega_0 = \Omega$. Траектория, изображенная на Рис. 3.1(с) соответствует условию (3.3). Как видим, скорость и траектория являются ограниченными.



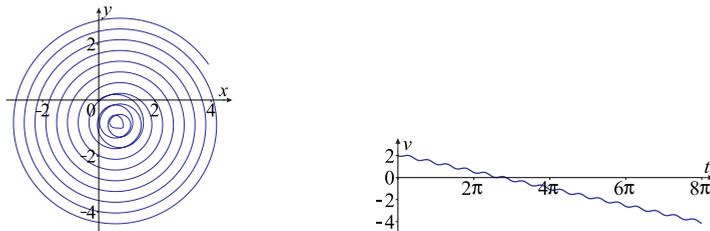
a) $\Omega = -1, \quad \chi = 0$



b) $\Omega = -1, \quad \chi = \arcsin 0.1$



c) $\Omega = -1, \quad \chi = \arcsin(0.1 \sin \Omega t)$



d) $\Omega = -2, \quad \chi = \arcsin(0.1 \sin \Omega t)$

Рис. 3.1. Траектории неоднородных саней Чаплыгина и графики скоростей v при числовых параметрах $u_0 = 0.2, g = 9.8$ и начальных условиях $v_0 = 2, \varphi_0 = \pi/6, \omega_0 = \Omega$

Fig 3.1. Trajectories of the inhomogeneous Chaplygin sleigh and graphs of velocities with the numerical parameters $u_0 = 0.2, g = 9.8$ and the initial conditions $v_0 = 2, \varphi_0 = \pi/6, \omega_0 = \Omega$

4. Шар Чаплыгина

Уравновешенный шар Чаплыгина массой m и радиусом R катится без проскальзывания в поле силы тяжести по плоскости, которая находится под углом χ вдоль оси Ox к горизонту. Ось Oz перпендикулярна опорной плоскости, ось Oy параллельна линии горизонта. Введем еще одну систему координат $O_1x_1y_1z_1$, связанную с геометрическим центром O_1 шара, оси которой совпадают с главными осями инерции шара.

Пусть угол наклона χ опорной плоскости меняется по закону (2.2). Не ограничивая общности, будем считать, что $\Omega > 0$.

Проекции координатных векторов α, β, γ осей Ox, Oy, Oz на оси системы координат $O_1x_1y_1z_1$ образуют ортогональную матрицу перехода от системы координат $Oxyz$ к системе координат $O_1x_1y_1z_1$:

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \in SO(3).$$

Полная система уравнений движения, определяющая ориентацию шара, имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{M} &= M \times \omega - q \sin \Omega t \cdot \beta, \\ \omega &= \mathbf{A}M + \mathbf{A}\gamma Z, \quad Z = \frac{(\mathbf{A}M, \gamma)}{d^{-1} - (\mathbf{A}\gamma, \gamma)}, \\ \dot{\alpha} &= \alpha \times \omega, \quad \dot{\beta} = \beta \times \omega, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega. \end{aligned} \tag{4.1}$$

где $q = mgR\delta, d = mR^2, mg$ – вес шара, $\mathbf{A} = (\mathbf{I} + d\mathbf{E})^{-1} = \text{diag}(a_1, a_2, a_3), \mathbf{I}$ – центральный тензор инерции шара, ω – вектор угловой скорости шара, заданный в системе координат $O_1x_1y_1z_1$. Координаты точки контакта шара (x, y) на плоскости Oxy определяются из уравнений

$$\dot{x} = R(\omega, \beta), \quad \dot{y} = -R(\omega, \alpha). \tag{4.2}$$

Уравнения (4.1) обладают шестью геометрическими интегралами

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) &= 1, & (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) &= 1, & (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) &= 1, \\ (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) &= 0, & (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) &= 0, & (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}) &= 0,\end{aligned}$$

и тремя линейными по $\boldsymbol{\omega}$ интегралами

$$(\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha}) = c_\alpha, \quad (\mathbf{M}, \boldsymbol{\beta}) - \frac{q}{\Omega} \cos \Omega t = c_\beta, \quad (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) = c_\gamma,$$

где $c_\beta = (\mathbf{M}_0, \boldsymbol{\beta}_0) - \frac{q}{\Omega}$, $c_\alpha = (\mathbf{M}_0, \boldsymbol{\alpha}_0)$, $c_\gamma = (\mathbf{M}_0, \boldsymbol{\gamma}_0)$. Тогда момент \mathbf{M} можно разложить по базису системы координат $Oxyz$:

$$\mathbf{M} = c_\alpha \boldsymbol{\alpha} + \mu \boldsymbol{\beta} + c_\gamma \boldsymbol{\gamma},$$

где $\mu = \mu(t) = \frac{q}{\Omega} \cos \Omega t + c_\beta$, откуда следует $(\mathbf{M}, \mathbf{M}) = c_\alpha^2 + \mu^2 + c_\gamma^2$.

Выражая угловую скорость

$$\boldsymbol{\omega} = \mu \mathbf{A} \left(\boldsymbol{\beta} + \frac{\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})}{d^{-1} - (\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})} \right) + c_\alpha \mathbf{A} \left(\boldsymbol{\alpha} + \frac{\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma})}{d^{-1} - (\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})} \right) + c_\gamma \mathbf{A}\boldsymbol{\gamma} \frac{d^{-1}}{d^{-1} - (\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})},$$

перепишем уравнения (4.2) в виде

$$\begin{aligned}\dot{x} &= R\mu\Phi_1 + Rc_\alpha\Phi_2 + Rc_\gamma\Phi_3, \\ \dot{y} &= -R\mu\Phi_2 - Rc_\alpha\Phi_4 - Rc_\gamma\Phi_5, \\ \Phi_1 &= (\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) + \frac{(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})^2}{d^{-1} - (\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})} > 0, \\ \Phi_2 &= (\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + \frac{(\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta})(\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma})}{d^{-1} - (\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})}, \\ \Phi_3 &= \frac{d^{-1}(\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta})}{d^{-1} - (\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})}, \\ \Phi_4 &= (\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) + \frac{(\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma})^2}{d^{-1} - (\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})} > 0, \\ \Phi_5 &= \frac{d^{-1}(\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha})}{d^{-1} - (\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})}.\end{aligned}\tag{4.3}$$

Для динамически симметричного шара ($a_1 = a_2 = a_3 = a$), уравнения (4.3) принимают простую форму

$$\dot{x} = R\mu, \quad \dot{y} = -Rc_\alpha.\tag{4.4}$$

Как известно, почти все траектории точки контакта динамически несимметричного шара Чаплыгина на горизонтальной плоскости являются неограниченными [4]. Фазовое пространство системы (4.1) расщивается на трехмерные торы. В работе [15] были сформулированы и доказаны теоремы о среднем по траектории при движении по тору. С учетом этих теорем и формул (4.3), сформулируем следующую гипотезу.

Гипотеза. При движении динамически несимметричного шара Чаплыгина по плоскости, угол наклона которой меняется по закону (2.2) с параметрами δ, Ω такими, что $c_\beta = 0$, почти всегда отсутствует дрейф шара вдоль оси Ox . При движении на нулевом уровне интеграла c_α почти всегда отсутствует дрейф шара вдоль оси Oy . При движении на нулевых уровнях интегралов $c_\alpha = c_\beta = 0$ почти все траектории точки контакта ограничены.

Очевидно, что при движении динамически симметричного шара Чаплыгина траектория находится аналитически и на нулевом уровне интеграла $c_\beta = 0$, *всегда* отсутствует дрейф шара вдоль оси Ox .

На Рис. 4.1-4.2 проиллюстрированы траектории динамически несимметричного шара Чаплыгина для различных значений параметров на колеблющейся плоскости.

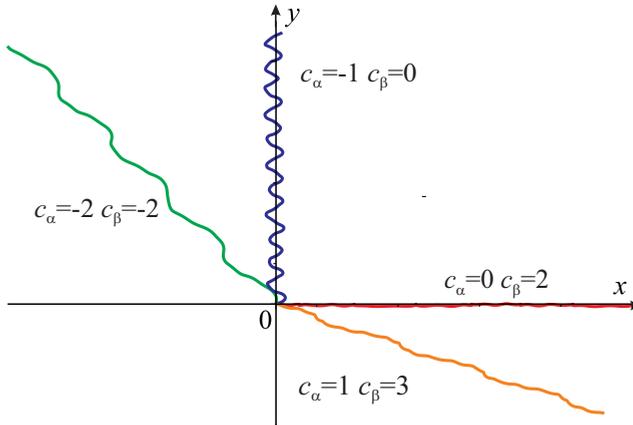
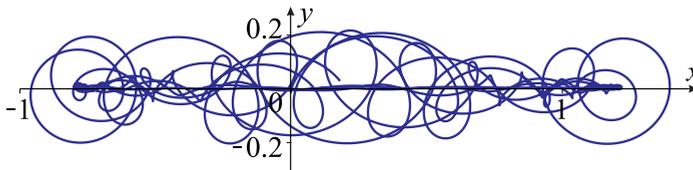
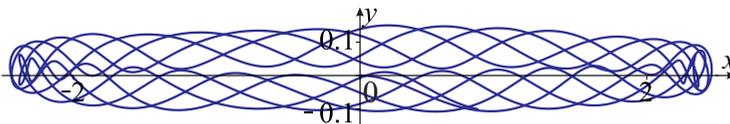


Рис. 4.1. Типовые траектории шара Чаплыгина для различных значений c_α и c_β

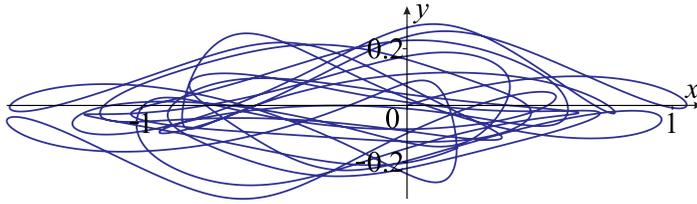
Fig 4.1. Typical trajectories of the Chaplygin sphere with different values of c_α and c_β



a) $c_\alpha = 0, c_\beta = 0, c_\gamma = 6$



b) $c_\alpha = 0, c_\beta = 0, c_\gamma = 4$



c) $c_\alpha = 0, c_\beta = 0, c_\gamma = 2$

Рис. 4.2. Примеры типовых траекторий шара Чаплыгина для заданных $c_\alpha, c_\beta, c_\gamma$ и $\Omega = 1, R = 1, q = 2, \mathbf{A} = \text{diag}(0.4, 0.5, 0.6)$

Fig 4.2. Examples of typical trajectories of the Chaplygin sphere with the given $c_\alpha, c_\beta, c_\gamma$ and $\Omega = 1, R = 1, q = 2, \mathbf{A} = \text{diag}(0.4, 0.5, 0.6)$

5. Обсуждение

Для обсуждения, рассмотрим интересное управление углом наклона плоскости, по которой катится без проскальзывания шар Чаплыгина:

$$\chi = \arcsin \left(\frac{\delta(\mathbf{M}, \boldsymbol{\beta})}{\sqrt{(\mathbf{M}, \mathbf{M}) + 1}} \right), \delta \in [-1, 0) \cup (0, 1]. \tag{5.1}$$

Тогда уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} - \frac{q\boldsymbol{\beta}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\beta})}{\sqrt{(\mathbf{M}, \mathbf{M}) + 1}}, \quad q = mgR\delta, \\ \boldsymbol{\omega} &= \mathbf{A}\mathbf{M} + \mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}Z, \quad Z = \frac{(\mathbf{A}\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma})}{d^{-1} - (\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})}, \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} &= \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

Считаем, что δ достаточно мало и отрыва шара от опорной плоскости не происходит.

Функция $\mu = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\beta})$ является решением дифференциального уравнения

$$\dot{\mu} = - \frac{q\mu}{\sqrt{(\mathbf{M}, \mathbf{M}) + 1}}, \tag{5.3}$$

где $(\mathbf{M}, \mathbf{M}) = \mu^2 + c_\alpha^2 + c_\gamma^2$, которое может быть проинтегрировано как численно, так и аналитически. При начальном условии $\mu_0 = 0$ имеем классическую задачу о шаре Чаплыгина на горизонтальной плоскости. Пусть $\mu_0 \neq 0$. Тогда при $t \rightarrow +\infty$

- μ неограничена, если $q < 0$;
- μ демонстрирует асимптотическое поведение $\mu \rightarrow 0$, если $q > 0$.

Если $\mu^2 + c_\alpha^2 = 0$, то $\mathbf{M} \parallel \boldsymbol{\gamma}$ и уравнения движения системы (5.2) эквивалентны соответствующим уравнениям движения шара Чаплыгина на горизонтальной плоскости:

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\gamma}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{5.4}$$

Если $\mu_0^2 + c_\alpha^2 \neq 0$, то $M \nparallel \gamma$. Разложим векторы α, β по неортогональному базису $(\gamma, M, M \times \gamma)$:

$$\begin{aligned} \alpha &= sc_\gamma \gamma - sM + rM \times \gamma, \\ \beta &= p\gamma + rM + sM \times \gamma, \\ p &= -\frac{\mu c_\gamma}{\mu^2 + c_\alpha^2}, \quad r = \frac{\mu}{\mu^2 + c_\alpha^2}, \quad s = -\frac{c_\alpha}{\mu^2 + c_\alpha^2}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Тогда уравнения (5.2) сводятся к уравнениям в переменных M, γ :

$$\begin{aligned} \dot{M} &= M \times \omega - \frac{q\mu^2 (M - c_\gamma \gamma)}{\Delta} + \frac{qc_\alpha \mu (M \times \gamma)}{\Delta}, \\ \dot{\gamma} &= \gamma \times \omega, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где $\Delta = \Delta(\mu, c_\alpha, c_\gamma) = (\mu^2 + c_\alpha^2) \sqrt{\mu^2 + c_\alpha^2 + c_\gamma^2 + 1}$ и функция μ является решением уравнения (5.3).

Тогда справедливо следующее утверждение.

Предложение 5.1. *Если $q > 0$, то для произвольных $c_\alpha, c_\gamma, \mu_0 \neq 0$, начиная с некоторого момента времени \hat{t} , фазовая траектория системы (5.6) остается в сколь угодно малой окрестности инвариантного тора системы (5.4).*

Имеет место следующая гипотеза.

Гипотеза. *При движении динамически несимметричного шара Чаплыгина по плоскости с меняющимся по закону (5.1) с числовым параметром $q > 0$ углом наклона почти всегда отсутствует дрейф вдоль оси Ox . Если $c_\alpha = 0$, то почти всегда траектория точки контакта ограничена.*

Очевидно, что при движении динамически симметричного шара Чаплыгина по плоскости с меняющимся по закону (5.1) с числовым параметром $q > 0$ углом наклона всегда отсутствует дрейф вдоль оси Ox . Если $c_\alpha = 0$, то при $t \rightarrow +\infty$

$$x \rightarrow x_0 = const, \quad y = y_0.$$

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского Научного Фонда в рамках проекта № 19-71-30012, <https://rscf.ru/project/19-71-30012/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика саней Чаплыгина // ПММ. 2009. Т. 73, вып. 2. С. 219–225.
2. Бизяев И. А. Сани Чаплыгина с движущейся точечной массой // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27, вып. 4. С. 583–589. DOI: <https://doi.org/10.20537/vm170408>
3. Карапетян А. В., Шамин А. Ю. О движении саней Чаплыгина по горизонтальной плоскости с сухим трением // ПММ. 2019. Т. 83, № 2. С. 228–233. DOI: 10.1134/S0032823519020097
4. Чаплыгин С. А. О катании шара по горизонтальной плоскости // Матем. сб. 1903. Т. 24, № 1. С. 139–168.

5. Kilin A. A. The dynamics of Chaplygin ball: The qualitative and computer analysis // Regul. Chaotic Dyn. 2001. Vol. 6, No. 3. pp. 291–306. DOI: <https://doi.org/10.1070/RD2001v006n03ABEH000178>
6. Mikishanina E. A. Dynamics of the Chaplygin sphere with additional constraint // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2023. Vol. 117. 106920. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2022.106920>
7. Борисов А. В., Мамаев И. С. Гамильтоновость задачи Чаплыгина о качении шара // Математические заметки. 2001. Т. 70, № 5. С. 793–795. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm791>
8. Борисов А. В., Казаков А. О., Сатаев И. Р. Регулярные и хаотические аттракторы в неголономной модели волчка Чаплыгина // Нелинейная динамика. 2014. Т. 10, № 3. С. 361–380.
9. Borisov A. V., Kazakov A. O., Sataev I. R. Spiral chaos in the nonholonomic model of a Chaplygin top // Regul. Chaotic Dyn. 2016. Vol. 21, No. 7-8. pp. 939–954. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1560354716070157>
10. Borisov A. V., Mamaev I. S. Motion of Chaplygin ball on an inclined plane // Doklady Physics. 2006. Vol. 51, No. 2. pp. 73–76. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1028335806020078>
11. Харламова Е. И. Качение шара по наклонной плоскости // ПММ. 1958. Т. 22, № 4. С. 504–509.
12. Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. On the Hadamard–Hamel Problem and the Dynamics of Wheeled Vehicles // Regul. Chaotic Dyn. 2015. Vol. 20, No. 6. pp. 752–766. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1560354715060106>
13. Борисов А. В., Мамаев И. С. Неоднородные сани Чаплыгина // Нелинейная динамика. 2017. Т. 13, № 4. С. 625–639. DOI: <https://doi.org/10.20537/nd1704014>
14. Rocard Y. L'instabilité en mécanique: Automobiles, avions, ponts suspendus. Paris: Masson, 1954.
15. Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Проблема дрейфа и возвращаемости при качении шара Чаплыгина // Нелинейная динамика. 2013. Т. 9, № 4. С. 721–754 DOI: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2021-29-6-863-868>

*Поступила 09.09.2023; доработана после рецензирования 5.11.2023;
принята к публикации 24.11.2023*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. A. V. Borisov, I. S. Mamaev, “The dynamics of a Chaplygin sleigh”, *J. Appl. Math. Mech.*, **73**:2 (2009), 156–161. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2009.04.005>

2. I. A. Bizyaev, “A Chaplygin sleigh with a moving point mass”, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, **27**:4 (2017), 583–589 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.20537/vm170408>
3. A. V. Karapetyan, A. Y. Shamin, “On motion of Chaplygin sleigh on a horizontal plane with dry friction”, *Mechanics of Solids*, **54**:5 (2019), 632–637. DOI: <https://doi.org/10.20537/nd190205>
4. S. A. Chaplygin, “On a ball’s rolling on a horizontal plane”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **7**:2 (2002), 131–148. DOI: <https://doi.org/10.1070/RD2002v007n02ABEH000200>
5. A. A. Kilin, “The dynamics of Chaplygin ball: The qualitative and computer analysis”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **6**:3 (2001), 291–306. DOI: <https://doi.org/10.1070/RD2001v006n03ABEH000178>
6. E. A. Mikishanina, “Dynamics of the Chaplygin sphere with additional constraint”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **117** (2023), 106920. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2022.106920>
7. A. V. Borisov, I. S. Mamaev, “Chaplygin’s Ball Rolling Problem Is Hamiltonian”, *Math. Notes*, **70**:5 (2001), 720–723. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1012995330780>
8. A.V. Borisov, A. O. Kazakov, I. R. Sataev, “Regular and chaotic attractors in nonholonomic Chaplygin top model”, *Nelin. dinam.*, **10**:3 (2014), 361–380 (In Russ.), <https://www.mathnet.ru/eng/nd450>.
9. A.V. Borisov, A. O. Kazakov, I. R. Sataev, “Spiral Chaos in the Nonholonomic Model of a Chaplygin Top”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **21**:7–8 (2016), 939–954. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1560354716070157>
10. A.V. Borisov, I. S. Mamaev, “Motion of Chaplygin ball on an inclined plane”, *Doklady Physics*, **51**:2 (2006), 73–76. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1028335806020078>
11. E. I. Kharlamova, “Rolling of the ball on an inclined plane.”, *Prikl. Mat. Mekh.*, **22**:4 (1958), 504–509 (In Russ.).
12. A. V. Borisov, A. A. Kilin, I. S. Mamaev, “On the Hadamard–Hamel Problem and the Dynamics of Wheeled Vehicles”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **20**:6 (2015), 752–766. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1560354715060106>
13. A. V. Borisov, I. S. Mamaev, “An inhomogeneous Chaplygin sleigh”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **22**:4 (2017), 435–447. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1560354717040062>
14. Y. Rocard, *Línstabilité en mécanique: Automobiles, avions, ponts suspendus*, Masson, Paris, 1954.
15. A. V. Borisov, A. A. Kilin, I. S. Mamaev, “The problem of drift and recurrence for the rolling Chaplygin ball”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **18**:6 (2013), 832–859. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1560354713060166>

Submitted 09.09.2023; Revised 5.11.2023; Accepted 24.11.2023

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.