

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI 10.15507/2079-6900.25.202304.313-325

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.9, 539.3

Нелинейная математическая модель систем измерения давления в газожидкостных средах**П. А. Вельмисов, Ю. А. Тамарова***ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет»
(г. Ульяновск, Российская Федерация)*

Аннотация. Датчик является первичным звеном приборного оборудования для измерения давления газожидкостной среды. Он предоставляет данные о давлении рабочей среды, определяющем надлежащее функционирование машин, механизмов, систем. Математическое моделирование функционирования систем измерения давления играет важную роль на этапе их проектирования. В данной статье исследуется нелинейная одномерная модель механической системы «трубопровод – датчик давления», предназначенной для измерения и контроля давления рабочей газожидкостной среды в камерах сгорания двигателей. В такой системе для ослабления воздействия виброускорений и высоких температур датчик соединен с двигателем с помощью трубопровода и располагается на некотором расстоянии от него. Целью работы является разработка математической модели системы «трубопровод – датчик давления» и исследование динамики и устойчивости совместных колебаний чувствительного элемента датчика давления и рабочей среды в трубопроводе при заданном законе изменения давления в камере сгорания, в предположении, что рабочая среда идеальная и сжимаемая. Для описания движения рабочей среды (газа или жидкости) используется нелинейная модель механики жидкости и газа. Для начально-краевой задачи, постановка которой содержит нелинейное дифференциальное уравнение с частными производными, предложен численно-аналитический метод решения на основе метода Галеркина, позволяющий свести исследование задачи к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Проведен численный эксперимент и представлены примеры расчета динамики чувствительного элемента датчика. Предложенная математическая модель позволяет определять закон изменения отклонения чувствительного элемента датчика в зависимости от закона изменения давления в камере сгорания.

Ключевые слова: датчик давления, трубопровод, динамика, дифференциальные уравнения, метод Галеркина

Для цитирования: Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А. Нелинейная математическая модель систем измерения давления в газожидкостных средах // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 4. С. 313–325. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.313-325>

Об авторах:

Вельмисов Петр Александрович, профессор кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (430027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), доктор физико-математических наук, профессор, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7825-7015>, velmisov@ulstu.ru

© П. А. Вельмисов, Ю. А. Тамарова



Тамарова Юлия Александровна, соискатель кафедры высшей математики, ФГ-БОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (430027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6408-1573>, kazakovaua@mail.ru

Original article

MSC2020 35Q35, 35Q74, 65M06

Nonlinear mathematical model of pressure measurement systems in gas-liquid media

P. A. Velmisov, Yu. A. Tamarova

Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russian Federation)

Abstract. The primary element of the instrumentation for measuring the pressure of a gas-liquid medium is a sensor that supplies data on the pressure of the working medium. It determines the proper functioning of machines, mechanisms, and systems. Increasing the service life, reducing development time, and reducing the cost of sensors is one of the important tasks. Mathematical modeling of pressure measurement systems' functioning plays an important role at the design stage of such systems. This article examines a nonlinear one-dimensional model of a mechanical system "pipeline – pressure sensor" designed to measure and control the pressure of the working gas-liquid medium in the combustion chambers of engines. In such a system, the sensor is connected to the engine via a pipeline and is located at some distance from it to reduce the impact of vibration accelerations and high temperatures. The purpose of the work is to study the dynamics and stability of joint oscillations of the elastic sensitive element in the pressure sensor and of the working medium in the pipeline for a given law of pressure change in the combustion chamber. The study is provided under the assumption that the working medium is ideal and compressible. To describe the movement of the working medium (gas or liquid), a nonlinear model of fluid and gas mechanics is used. Mathematical description of the process of interest includes an initial boundary value problem, whose formulation contains a nonlinear partial differential equation. To solve it, numerical-analytical method of solution based on the Galerkin method is proposed, which makes it possible to reduce the study of the problem to solving a system of ordinary differential equations. A numerical experiment is carried out and examples of calculating the dynamics of the sensor's sensitive element are presented. The proposed mathematical model makes it possible to determine the law of change in the deviation of the sensor's sensitive element depending on the law of change in pressure in the combustion chamber. The research results are intended for use at the design stage of pressure measurement systems.

Keywords: pressure sensor, pipeline, dynamics, differential equations, Galerkin method

For citation: P. A. Velmisov, Yu. A. Tamarova. Nonlinear mathematical model of pressure measurement systems in gas-liquid media. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 25:4(2023), 313–325. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.313-325>

About the authors:

Petr A. Velmisov, Professor of the Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 432027, Russia), Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7825-7015>, velmisov@ulstu.ru

Yuliya A. Tamarova, Postgraduate Student, Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 432027, Russia), Postgraduate Student, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6408-1573>, kazakovau@mail.ru

1. Введение

Во многих отраслях науки и техники важное место занимает проблема повышения надежности и долговечности конструкций, взаимодействующих с потоком жидкости или газа. Такая проблема, в частности, возникает при проектировании датчиков давления газожидкостных сред. В связи с этим возникает задача исследования динамики и устойчивости колебаний элементов конструкций, так как воздействие потока может приводить к значениям амплитуды, скорости, ускорений колебаний, не позволяющим осуществлять их надежную эксплуатацию и обеспечивать необходимую функциональную точность. Развитие ракетно-космической, авиационной и другой техники требует как разработки новых типов первичных преобразователей, так и постоянного совершенствования существующих. Во многих работах представлено описание датчиков измерительных систем, принципы их работы, технические характеристики, например [1–6].

Каждый датчик давления в той или иной степени критичен к воздействию температур и виброускорений. При размещении датчиков давления непосредственно на двигателе на них воздействуют широкие диапазоны температур и повышенные виброускорения, что приводит к дополнительной погрешности измерений, и в ряде случаев к разрушению чувствительного элемента датчика. В работе [7] рассмотрены вопросы, связанные с построением и оптимизированным исследованием математических моделей датчиков давления, работающих в нестационарных неоднородных полях измеряемой и окружающей сред. Работа [8] посвящена вопросам повышения вибростойкости тонкопленочных нано- и микросистем и датчиков давления на их основе. Совокупность некоторых моделей и методов исследования механической системы «трубопровод – датчик давления» представлена в [9–10]. В случае несжимаемости рабочей среды математические модели системы «трубопровод – датчик давления» рассматривались в работах [11–13]. В работах [14–16] исследуется взаимодействие упругих тел с вязкой несжимаемой жидкостью. Для сжимаемой рабочей среды исследования механической системы «трубопровод – датчик давления» в линейной модели проводились, например, в работах [17–18].

В данной статье на основе нелинейной одномерной модели, представляющей собой начально-краевую задачу для системы дифференциальных уравнений, исследуется совместная динамика чувствительного элемента датчика давления и рабочей среды в трубопроводе в предположении, что среда идеальная и сжимаемая. Движение рабочей среды описывается нелинейной моделью механики жидкости и газа. Для описания динамики чувствительного элемента датчика используется модель, основой которой является обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее колебательный процесс одномассовой системы. С помощью метода Галеркина [19] исследование начально-краевой задачи сведено к решению систем дифференциальных уравнений. Разработана программа в системе Mathematica 12.0, позволяющая при различном задании закона

изменения давления рабочей среды получать графики деформации чувствительного элемента датчика.

2. Постановка задачи

На рисунке 2.1 в начальном сечении $x = 0$ трубопровода (на выходе из камеры сгорания двигателя) задан закон изменения давления рабочей среды $P = P_0 + P_*(t)$, где P_0 - давление в состоянии покоя, $P_*(t)$ - избыточное давление. Состоянию покоя соответствует положение $x = l$ поршня, являющегося составной частью датчика давления и закрепленного с помощью системы упругих связей и демпферов. Отклонение поршня от положения равновесия обозначим $w(t)$. Поставим своей целью получение уравнения, связывающего закон изменения давления в двигателе $P_*(t)$ с величиной перемещения поршня $w(t)$ в любой момент времени t .

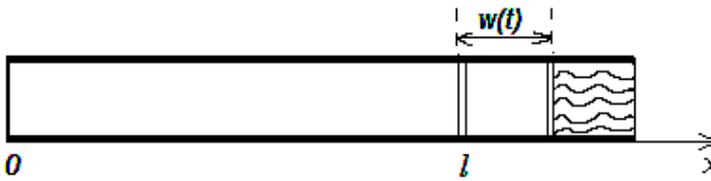


Рис. 2.1. Схема механической системы "трубопровод - датчик давления"

Fig. 2.1. Scheme of the mechanical system "pipeline-pressure sensor"

Математическая модель рассматриваемой механической системы может быть представлена в виде

$$\Phi_{tt} + 2\Phi_x \Phi_{xt} + \Phi_x^2 \Phi_{xx} = \left[a_0^2 - (\chi - 1) \left(\Phi_t + \frac{1}{2} \Phi_x^2 \right) \right] \Phi_{xx}, \quad (2.1)$$

$$P(0, t) = P_0 + P_*(t), \quad (2.2)$$

$$\Phi_x(l_*(t), t) = \dot{w}(t), \quad l_* = l + w(t), \quad (2.3)$$

$$L(w(t)) \equiv m\ddot{w}(t) + \alpha\dot{w}(t) + \gamma w(t) = P(l_*(t), t). \quad (2.4)$$

В (2.1)-(2.4) $\Phi(x, t)$ - потенциал скорости; $P(x, t)$ - давление в рабочей среде (в жидкости или газе); a_0 - скорость звука, соответствующая состоянию покоя рабочей среды; χ - коэффициент Пуассона; m - масса чувствительного элемента; α , γ - коэффициенты демпфирования и жесткости упругой связи; индексы x , t снизу обозначают частные производные по координате x и времени t , точка сверху - производную по t .

Уравнения (2.1), (2.4) следует дополнить начальными условиями. Эти условия будут записаны при решении задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, к которой будет сведено решение задачи (2.1)-(2.4).

Уравнение (2.1) для потенциала скорости $\Phi(x, t)$ описывает движение сжимаемой рабочей среды (в модели идеального газа) в трубопроводе, условие (2.2) задает закон изменения давления $P_*(t)$ рабочей среды на выходе из камеры сгорания (на входе в трубопровод $x = 0$), условие (2.3) - условие непротекания на поверхности поршня, (2.4)

– уравнение, описывающее движение поршня. При этом давление в потоке определяется интегралом Лагранжа – Коши

$$P(x, t) = P_0 \left[1 - \frac{\chi - 1}{a_0^2} \left(\Phi_t + \frac{1}{2} \Phi_x^2 \right) \right]^{\frac{\chi}{\chi - 1}} \tag{2.5}$$

Условие (2.2) с учетом (2.5) можно записать в виде

$$\left(\Phi_t + \frac{1}{2} \Phi_x^2 \right)_{x=0} = \psi(t) = \frac{a_0^2}{\chi - 1} \left[1 - \left(1 + \frac{P_*(t)}{P_0} \right)^{\frac{\chi - 1}{\chi}} \right] \tag{2.6}$$

3. Построение решения задачи

Введем функции $u = \Phi_x, v = \Phi_t + \frac{1}{2} \Phi_x^2$. Тогда уравнения (2.1)-(2.5), представляющие математическую модель, будут иметь вид

$$v_t + uv_x - [a_0^2 - (\chi - 1)v] u_x = 0, \tag{3.1}$$

$$v_x - u_t - uu_x = 0, \tag{3.2}$$

$$v(0, t) = \psi(t), \tag{3.3}$$

$$u(l_*, t) = \dot{w}(t), \tag{3.4}$$

$$L(w) = P_0 \left[1 - \frac{\chi - 1}{a_0^2} v(l_*, t) \right]^{\frac{\chi}{\chi - 1}} \tag{3.5}$$

В (3.4)-(3.5) $l_* = l + w(t)$. Исходя из граничных условий (3.3), (3.4), будем искать функции $u(x, t), v(x, t)$ в виде отрезков степенных рядов

$$u(x, t) = \dot{w}(t) + \sum_{n=1}^N u_n(t)(l_* - x)^n, \tag{3.6}$$

$$v(x, t) = \psi(t) + \sum_{k=1}^N v_k(t)x^k, \tag{3.7}$$

выбрав тем самым в качестве пробных функций $\{(l_* - x)^n\}, n = 1 \div \infty$ и $\{x^k\}, k = 1 \div \infty$. Подставляя (3.6), (3.7) в (3.1), (3.2), записывая условия ортогональности полученных невязок к функциям $\{\theta_n(x)\}$, образующих на $[0, l_*]$ полную систему, получим $2N$ уравнений для $(2N + 1)$ функции $w(t), u_1(t), \dots, u_N(t), v_1(t), \dots, v_N(t)$. К этим уравнениям следует добавить уравнение (3.5). Ввиду граничных условий (3.3),(3.4) в качестве поперечных функций [19] $\theta_n(x)$ можно выбрать, например,

$$\theta_n(x) = x(l_* - x)^n, \quad \theta_n(x) = x^n(l_* - x), \quad \theta_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{l_*}x\right), \quad n = 1 \div \infty. \tag{3.8}$$

Рассмотрим в качестве примера $N = 1$, тогда

$$u(x, t) = \dot{w}(t) + u_1(t)(l_* - x), \quad v(x, t) = \psi(t) + v_1(t)x. \tag{3.9}$$

Подставим (3.9) в (3.1), (3.2):

$$\begin{aligned} v_1(t) - \ddot{w}(t) - \dot{u}_1(t)(l_* - x) - u_1(t)\dot{w}(t) + [\dot{w}(t) + u_1(t)(l_* - x)] u_1(t) &= 0, \\ \dot{\psi}(t) + \dot{v}_1(t)x + [\dot{w}(t) + u_1(t)(l_* - x)] v_1(t) + [a_0^2 - (\chi - 1)(\psi(t) + v_1(t)x)] u_1(t) &= 0. \end{aligned}$$

Умножим полученные невязки на $x(l_* - x)$ и проинтегрируем в пределах от 0 до l_*

$$2(v_1 - \ddot{w}) - l_*(\dot{u}_1 - u_1^2) = 0, \quad (3.10)$$

$$2 \left[\dot{\psi} + \dot{w}v_1 + (a_0^2 - (\chi - 1)\psi)u_1 \right] + [\dot{v}_1 - (\chi - 1)v_1u_1 + u_1v_1]l_* = 0. \quad (3.11)$$

Уравнение (3.5) принимает вид

$$L(w) = P_0 \left[1 - \frac{\chi - 1}{a_0^2} (\psi(t) + v_1(t)l_*) \right]^{\frac{\chi}{\chi - 1}}. \quad (3.12)$$

Отметим, что к исследованию точно такой же системы дифференциальных уравнений (3.10)-(3.12) приводит использование в качестве поверочных функций $\theta_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{l_*}x\right)$ (в первом приближении $\theta_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{l_*}\right)$).

Система трех нелинейных уравнений (3.10)-(3.12) служит для определения трех функций $u_1(t)$, $v_1(t)$, $w(t)$ и является основой для проведения численного эксперимента. Для решения в пакете Mathematica 12.0 система уравнений (3.10)-(3.12) приведена к нормальной форме и имеет вид

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = \frac{1}{m} P_0 \left[1 - \frac{\chi - 1}{a_0^2} (\psi(t) + y_4(l + y_1)) \right]^{\frac{\chi}{\chi - 1}} - \frac{\alpha}{m} y_2 - \frac{\gamma}{m} y_1, \\ \dot{y}_3 = y_3^2 + \frac{2}{l + y_1} \left(y_4 - \frac{1}{m} P_0 \left[1 - \frac{\chi - 1}{a_0^2} (\psi(t) + y_4(l + y_1)) \right]^{\frac{\chi}{\chi - 1}} + \frac{\alpha}{m} y_2 + \frac{\gamma}{m} y_1 \right), \\ \dot{y}_4 = (\chi - 2)y_3y_4 - \frac{2}{l + y_1} (\dot{\psi} + y_2y_4 + (a_0^2 - (\chi - 1)\psi)y_3), \end{cases} \quad (3.13)$$

где $y_1(t) = w(t)$, $y_2(t) = \dot{w}(t)$, $y_3(t) = u_1(t)$, $y_4(t) = v_1(t)$.

4. Тепловая задача

Математическая постановка тепловой задачи для механической системы «трубопровод-датчик давления» с учетом движения рабочей среды в случае, когда стенки трубопровода и чувствительный элемент датчика теплоизолированы, имеет вид

$$\rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (4.1)$$

$$T(0, t) = T_*(t), \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(l_*, t) = 0. \quad (4.3)$$

Здесь $T(x, t)$ - закон изменения температуры рабочей среды; $T_*(t)$ - закон изменения температуры на входе в трубопровод (на выходе из камеры сгорания); k - коэффициент теплопроводности среды; ρ - плотность среды; c - коэффициент теплоемкости среды.

Учитывая граничные условия (4.2), (4.3), функцию $T(x, t)$ будем искать в виде

$$T(x, t) = T_*(t) + \sum_{n=2}^{N+1} T_{n-1}(t)(x^n - nl_*^{n-1}x). \quad (4.4)$$

При $N = 1$ имеем

$$T(x, t) = T_*(t) + T_1(t)(x^2 - 2l_*x). \quad (4.5)$$

Подставляя (4.5), (3.9) в (4.1), получим

$$\dot{T}_*(t) + \dot{T}_1(t)(x^2 - 2l_*x) - 2\dot{T}_1(t)x\dot{w}(t) + 2T_1(t)(x - l_*)(\dot{w}(t) + u_1(t)(l_* - x)) = \frac{2k}{\rho c}T_1(t). \quad (4.6)$$

Умножая полученную невязку на $x(l_* - x)$ и интегрируя в пределах от 0 до l_* , получим уравнение

$$10(\dot{T}_*(t) - 2T_1(t)\dot{w}(t)l_* - \frac{2k}{\rho c}T_1(t)) - l_*^2(7\dot{T}_1(t) + 6T_2(t)u_1(t)) = 0, \quad (4.7)$$

которое в нормальной форме имеет вид (учитывая введенные функции в (3.13))

$$\dot{T}_1(t) = \frac{1}{7(l + y_1(t))} \left[-6T_1(t)y_3(t) + 10(\dot{T}_* - 2T_1(t)y_2(t)(l + y_1(t)) - \frac{2k}{\rho c}T_1(t)) \right]. \quad (4.8)$$

Таким образом, система пяти уравнений (3.13), (4.8) служит для определения пяти функций $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$, $y_4(t)$, $T_1(t)$ и является основой для проведения численного эксперимента. Для решения в системе Mathematica 12.0 начальные условия заданы в виде: $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 0$, $y_3(0) = 0$, $y_4(0) = 0$, $T_1(0) = 0$.

5. Численный эксперимент

Пусть рабочая среда - воздух ($\rho = 1.225$). Параметры механической системы: $P_0 = 101325$, $c = 1.005$, $k = 0.022$, $a_0 = 332$, $\chi = 1.5$, $l = 3$, $m = 0.01$, $\alpha = 10^8$, $\gamma = 10^9$ (все значения приведены в системе СИ). На рисунках 5.1-5.4 представлены примеры численных расчетов при задании различных законов изменения давления $P_*(t)$ и $T_*(t)$.

Графики рисунка 5.1 соответствуют случаю, когда на постоянное рабочее давление в двигателе, находящемся в стационарном режиме работы, наложено периодическое возмущение. Случай, когда рабочее давление в двигателе постоянно, представлен на рисунке 5.2. Графики рисунков 5.3, 5.4 соответствуют случаям, когда на постоянное рабочее давление в двигателе, находящемся в стационарном режиме работы, наложены экспоненциально убывающее (рис. 5.3) и возрастающее (рис. 5.4) возмущения.

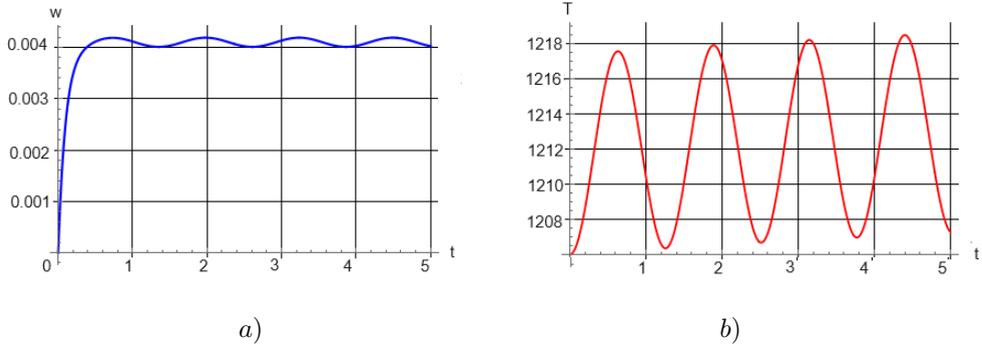


Рис. 5.1. Результаты численного эксперимента при $P_* = 4 * 10^6 + 10^5 \text{Cos}(5t)$, $T_* = 1226 - 20\text{Cos}(5t)$: a) отклонение поршня от положения равновесия $w(t)$, м; b) температура рабочей среды $T(x,t)$ в точке $x = l_*$, C°

Fig 5.1. Results of a numerical experiment with $P_* = 4 * 10^6 + 10^5 \text{Cos}(5t)$, $T_* = 1226 - 20\text{Cos}(5t)$: a) deviation of the piston from the equilibrium position $w(t)$, m; b) temperature of the working medium $T(x,t)$ at a point $x = l_*$, C°

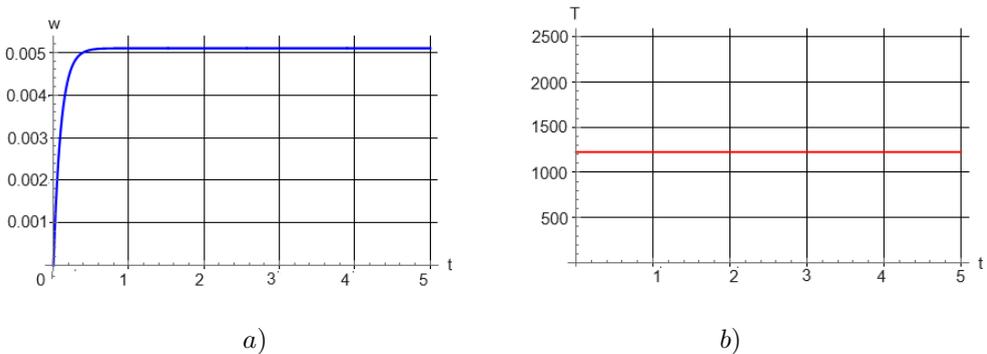


Рис. 5.2. Результаты численного эксперимента при $P_* = 5 * 10^6$, $T_* = 1226$: a) отклонение поршня от положения равновесия $w(t)$, м; b) температура рабочей среды $T(x,t)$ в точке $x = l_*$, C°

Fig 5.2. Results of a numerical experiment with $P_* = 5 * 10^6$, $T_* = 1226$: a) deviation of the piston from the equilibrium position $w(t)$, m; b) temperature of the working medium $T(x,t)$ at a point $x = l_*$, C°

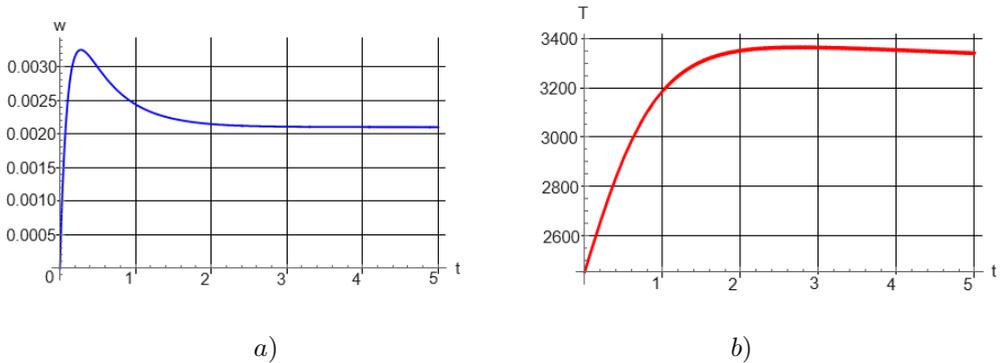


Рис. 5.3. Результаты численного эксперимента при $P_* = 2 * 10^6 * (e^{-2t} + 1)$, $T_* = 1226(e^{-2t} + 1)$: a) отклонение поршня от положения равновесия $w(t)$, м; b) температура рабочей среды $T(x, t)$ в точке $x = l_*$, C^o

Fig 5.3. Results of a numerical experiment with $P_* = 2 * 10^6 * (e^{-2t} + 1)$, $T_* = 1226(e^{-2t} + 1)$: a) deviation of the piston from the equilibrium position $w(t)$, m; b) temperature of the working medium $T(x, t)$ at a point $x = l_*$, C^o

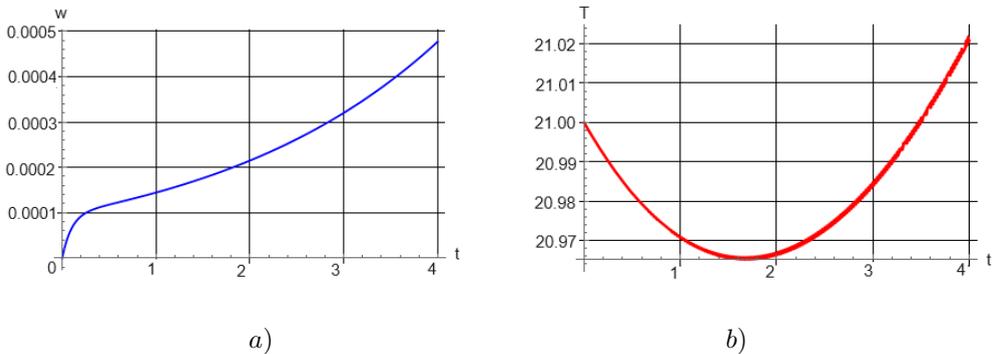


Рис. 5.4. Результаты численного эксперимента при $P_* = 10^5 * (e^{0.4t} - 1)$, $T_* = 20 + e^{0.1t}$: a) отклонение поршня от положения равновесия $w(t)$, м; b) температура рабочей среды $T(x, t)$ в точке $x = l_*$, C^o

Fig 5.4. Results of a numerical experiment with $P_* = 10^5 * (e^{0.4t} - 1)$, $T_* = 20 + e^{0.1t}$: a) deviation of the piston from the equilibrium position $w(t)$, m; b) temperature of the working medium $T(x, t)$ at a point $x = l_*$, C^o

Предложенная математическая модель механической системы «трубопровод-датчик давления» позволяет определять закон изменения отклонения чувствительного элемента датчика в зависимости от закона изменения давления рабочей среды в камере сгорания. С помощью метода Галеркина построены решения соответствующей начально-краевой задачи и приведены примеры численных расчетов.

Благодарности. Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда № 23-21-00517.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эткин Л. Г. Виброчастотные датчики. Теория и практика. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 407 с.
2. Казарян А. А., Грошев Г. П. Универсальный датчик давления // Измерительная техника. 2008. № 3. С. 26–30.
3. Датчики измерительных систем: в 2-х кн. / Ж. Аш [и др.]; пер. с франц. М.: Мир, 1992.
4. Агейкин Д. И., Костина Е. Н., Кузнецова Н. Н. Датчики контроля и регулирования. М.: Н. Машиностроение, 1965. 928 с.
5. Корсунов В. П. Упругие чувствительные элементы. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1980. 264 с.
6. Андреева Л. Е. Упругие элементы приборов. – 2-е изд. М.: Машиностроение, 1981. 392 с.
7. Математические модели функционирования датчика давления для космических летательных аппаратов при нестационарной температуре измеряемой и окружающей сред / В. М. Панкратов [и др.] // Микросистемная техника. 2003. № 6. С. 20–29.
8. Белозубов Е. М., Белозубова Н. Е. Повышение стойкости тонкопленочных нано-микросистем и датчиков давления на их основе к воздействию повышенных виброускорений // Труды Международного симпозиума «Надежность и качество». 2011. Т. 2. С. 426–429.
9. Математическое моделирование механической системы «трубопровод – датчик давления» / А. В. Анкилов [и др.]. Ульяновск: УлГТУ, 2008. 188 с.
10. Вельмисов П. А., Покладова Ю. В. Исследование динамики деформируемых элементов некоторых аэрогидроупругих систем. Ульяновск: УлГТУ, 2018. 152 с.
11. Вельмисов П. А., Покладова Ю. В., Серебрянникова Е. С. Математическое моделирование системы «трубопровод – датчик давления» // Журнал Средневожского математического общества. 2010. Т. 12, № 4. С.85–93.
12. Velmisov P. A., Pokladova Yu. V. Mathematical modelling of the “pipeline – pressure sensor” system // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1353. pp.1–6. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1353/1/012085>

13. Velmisov P. A., Pokladova Yu. V., Mizher U. J. Mathematical modelling of the mechanical system “pipeline – pressure sensor” // AIP Conference Proceedings. 2019. Vol. 2172. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5133495>
14. Математическая модель для исследования нелинейных волн в упругой цилиндрической оболочке, окруженной упругой средой / А. И. Землянухин [и др.] // Прикладная математика и механика. 2014. № 10. С. 80–83.
15. Моделирование волновых процессов в двух соосных оболочках, заполненных вязкой жидкостью и окруженных упругой средой / Ю. А. Блинков [и др.] // Вестник РУДН. Серия МИФ. 2018. Т. 26, № 3. С. 203–215. DOI: <https://doi.org/10.22363/2312-9735-2018-26-3-203-215>
16. Математическое моделирование волн деформации в двух соосных, кубически нелинейных оболочках, взаимодействующих с окружающей средой и заполненных жидкостью / Л. Могилевич [и др.] // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2020. № 4. DOI: <https://doi.org/10.24411/2541-9269-2020-00003>
17. Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А. Математическое моделирование систем измерения давления в газожидкостных средах // Журнал СВМО. 2020. Т. 22, № 3. С. 352–367. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.22.202003.352-367>
18. Исследование динамических процессов в системах измерения давления газожидкостных сред / Ю. А. Тамарова [и др.] // Журнал СВМО. 2021. Т. 23, № 4. С. 461–471.
19. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир, 1988. 353 с.

*Поступила 30.08.2023; доработана после рецензирования 01.10.2023;
принята к публикации 24.11.2023*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. L. G. Etkin, *[Vibration sensors. Theory and practice]*, MGTU im. N. E. Bauman Publ., Moscow, 2004 (In Russ.), 407 p.
2. A. A. Kazaryan, G. P. Groshev, “[Universal pressure sensor]”, *Izmeritel'naya tekhnika*, **3** (2008), 26–30 (In Russ.).
3. J. Ash, et al., *[Sensors of measuring systems: in 2 books.]*, Mir Publ., M., 1992 (In Russ.).
4. D. I. Agejkin, E. N. Kostina, N. N. Kuznecova, *[Sensors of control and regulation]*, N. Mashinostroyeniye Publ., Moscow, 1965 (In Russ.), 928 p.
5. V. P. Korsunov, *[Elastic sensitive elements]*, Saratov State Univ. Publ., Saratov, 1980 (In Russ.), 264 p.

6. *[Sensors. Converters. Systems: Catalog.]*, FGUP NII fizicheskikh izmereniy Publ., Penza, 2012 (In Russ.).
7. V. M. Pankratov, V. E. Dzhashitov, V. I. Ulybin, E. A. Mokrov, V. A. Semenov, D. V. Tihomirov, “[Mathematical models of the functioning of a pressure sensor for spacecraft at non-stationary temperatures of the measured and environmental media]”, *Microsistemnaya tekhnika*, 2003, no. 6, 20–29 (In Russ.).
8. E. M. Belozubov, N. E. Belozubova, “[Increasing the resistance of thin-film nano- and microsystems and pressure sensors based on them to the effects of increased vibration accelerations]”, *Trudy Mezhdunarodnogo simpoziuma "Nadezhnost' i kachestvo"*, 2011, no. 2, 426–429 (In Russ.).
9. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, V. D. Gorbokononko, Yu. V. Pokladova, *[Mathematical modeling of the mechanical system “pipeline – pressure sensor”]*, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2008 (In Russ.), 188 p.
10. P. A. Velmisov, Yu. V. Pokladova, *[Study of the dynamics of deformable elements of some aerohydroelastic systems]*, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2018 (In Russ.), 152 p.
11. P. A. Velmisov, Yu. V. Pokladova, E. S. Serebryannikova, “[Mathematical modeling of the system “pipeline – pressure sensor”]”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **12**:4 (2010), 85–93 (In Russ.).
12. P. A. Velmisov, Yu. V. Pokladova, “Mathematical modelling of the “pipeline – pressure sensor” system”, *Journal of Physics: Conference Series*, **1353** (2019) (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1353/1/012085>
13. P. A. Velmisov, Yu. V. Pokladova, U. J. Mizher, “Mathematical modelling of the mechanical system “pipeline – pressure sensor””, *AIP Conference Proceedings*, **2172** (2019) (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5133495>
14. A. I. Zemlyanukhin, S. V. Ivanov, L. I. Mogilevich, V. S. Popov, A. YU. Blinkov, “[Mathematical model for studying nonlinear waves in an elastic cylindrical shell surrounded by an elastic medium]”, *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2014, no. 10, 80–83 (In Russ.).
15. Yu. A. Blinkov, E. V. Yevdokimova, L. I. Mogilevich, A. Yu. Rebrina, “[Modeling of wave processes in two coaxial shells filled with a viscous liquid and surrounded by an elastic medium]”, *Vestnik RUDN. Seriya MIF*, **26**:3 (2018), 203–215 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.22363/2312-9735-2018-26-3-203-215>
16. L. I. Mogilevich, D. V. Kondratov, T. S. Kondratova, S. V. Ivanov, “[Mathematical modeling of deformation waves in two coaxial, cubically nonlinear shells interacting with the environment and filled with liquid]”, *Matematicheskoye modelirovaniye, komp'yuternyy i naturnyy eksperiment v yestestvennykh naukakh*, **4** (2020) (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.24411/2541-9269-2020-00003>
17. P. A. Velmisov, YU. A. Tamarova, “[Mathematical modeling of pressure measurement systems in gas-liquid media]”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **22**:3 (2020), 352–367 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.22.202003.352-367>

18. YU. A. Tamarova, P. A. Velmisov, N. D. Aleksanin, N. I. Nurullin, “[Study of dynamic processes in systems for measuring pressure of gas-liquid media]”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **23**:4 (2021), 461—471 (In Russ.).
19. K. Fletcher, [*Numerical methods based on the Galerkin method*], Mir Publ., 1988, 353 p.

Submitted 30.08.2023; Revised 01.10.2023; Accepted 24.11.2023

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.