

DOI 10.15507/2079-6900.25.202304.255-272

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.956.4+517.988.8

Численное исследование скорости сходимости черновских аппроксимаций к решениям уравнения теплопроводности

К. А. Драгунова¹, Н. Никбахт², И. Д. Ремизов¹

¹ Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
(г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

² Университет Окленда (г. Окленд, Новая Зеландия)

Аннотация. Статья посвящена построению примеров, иллюстрирующих (с помощью компьютерного счёта) скорость сходимости черновских аппроксимаций к решению задачи Коши для уравнения теплопроводности. Рассмотрены две функции Чернова (первого и второго порядка касания по Чернову к оператору взятия второй производной) и несколько начальных условий различной гладкости. В качестве графической иллюстрации для начального условия, равного модулю синуса в степени пять вторых, построены график точного решения задачи Коши и графики десятых черновских аппроксимаций, даваемых двумя разными функциями Чернова. По графикам визуально определяется, что аппроксимации близки к решению. Для каждой из двух функций Чернова, для нескольких начальных условий различной гладкости и для номера аппроксимации до 11 включительно численно найдена соответствующая каждому приближению ошибка, то есть, супремум модуля разности точного решения и аппроксимирующей функции. Как оказалось, во всех исследованных случаях зависимость ошибки от номера аппроксимационного приближения имеет приблизительно степенной вид. Это следует из того, что, как мы обнаружили, зависимость логарифма ошибки от логарифма номера приближения имеет приблизительно линейный вид. Находя уравнение приближающей прямой с помощью линейной регрессии, мы находим показатель степени в степенной зависимости ошибки от номера приближения и называем его порядком сходимости. Порядки сходимости для всех изученных начальных условий собраны в таблицу. На рассмотренном семействе начальных условий найдена эмпирическая зависимость порядка сходимости от класса гладкости начального условия.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, задача Коши, операторные полугруппы, черновские аппроксимации, скорость сходимости, численный эксперимент

Для цитирования: Драгунова К. А., Никбахт Н., Ремизов И. Д. Численное исследование скорости сходимости черновских аппроксимаций к решениям уравнения теплопроводности // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 4. С. 255–272. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.255-272>

Об авторах:

Драгунова Ксения Александровна, магистр факультета информатики, математики и компьютерных наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9318-6681>, k.dragunova13@mail.ru

© К. А. Драгунова, Н. Никбахт, И. Д. Ремизов



Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.
This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Никбахт Насрин, аспирант, факультет математики, университет Окленда, (Окленд 1142, Новая Зеландия), ORCID: <https://orcid.org/0009000171526590>, nasrin.nikbakht@gmail.com

Ремизов Иван Дмитриевич, старший научный сотрудник Международной лаборатории динамических систем и приложений, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1968-0793>, ivremizov@yandex.ru

Original article

MSC2020 65M12, 47D06

Numerical Study of the Rate of Convergence of Chernoff Approximations to Solutions of the Heat Equation

K. A. Dragunova¹, N. Nikbakht², I. D. Remizov¹

¹ *Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russian Federation)*

² *University of Auckland (Auckland, New Zealand)*

Abstract. The article is devoted to construction of examples illustrating (using computer calculation) the convergence rate of Chernoff approximations to the solution of the Cauchy problem for the heat equation. Two Chernoff functions (of the first and second order of Chernoff tangency to the double differentiation operator) and several initial conditions of different smoothness are considered. As an illustration for the initial condition equal to the absolute value of the sine function to the power of five over two, a graph of the exact solution of the Cauchy problem and graphs of the tenth Chernoff approximations given by two different Chernoff functions are plotted. It is visually determined that the approximations are close to the solution. For each of the two Chernoff functions, for several initial conditions of different smoothness and for the approximation numbers up to 11, the error corresponding to each approximation is numerically found. This error is understood as the supremum of the absolute value of the difference between the exact solution and its approximating function. As it turned out, in all the cases studied, the error dependence on the approximation number nearly power-law form. This follows from the fact that the dependence of the error logarithm on the logarithm of the approximation number is close to linear. By finding the equation of the approximating line using linear regression, we find the exponent in the power dependence of the error on the approximation number and call it the order of convergence. These orders for all studied initial conditions are compiled in a table. The empirical dependence of the convergence order on the smoothness class of the initial condition is found on the considered family of initial conditions.

Keywords: heat equation, Cauchy problem, operator semigroups, Chernoff approximations, rate of convergence, numerical experiment

For citation: K. A. Dragunova, N. Nikbakht, I. D. Remizov. Numerical Study of the Rate of Convergence of Chernoff Approximations to Solutions of the Heat Equation. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 25:4(2023), 255–272. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.255-272>

About the authors:

Ksenia A. Dragunova, Master's of the Faculty of Informatics, Mathematics and Computer Science, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9318-6681>, k.dragunova13@mail.ru

Nasrin Nikbakht, PhD student in Mathematics at Department of Mathematics, University of Auckland (Auckland 1142, New Zealand), nasrin.nikbakht@gmail.com.

Ivan D. Remizov, Ph.D. in Physics and Mathematics, Senior Research Fellow of International laboratory of dynamical systems and applications, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1968-0793>, ivremizov@yandex.ru.

1. Введение и предварительные сведения

Как известно [1–4], черновские аппроксимации зачастую являются единственным методом, позволяющим явно выразить решение дифференциального уравнения с частными производными через его переменные коэффициенты – функции, играющие роль параметров. При этом в выражающей формуле содержится предельный переход (черновские аппроксимации сходятся к решению), однако сами допредельные выражения явно выражены через коэффициенты уравнения и ясно, как вычислять предел – то есть, для его вычисления имеется алгоритм, и не требуется проводить неконструктивные процедуры (аналитическое продолжение, основанные на аксиоме выбора конструкции и прочее). Таким образом, черновские аппроксимации подходят для приближённого вычисления решения дифференциальных уравнений с частными производными на ЭВМ. Кроме того, основанные на теореме Чернова [2] конструкции находят применение в теоретических построениях: для математического обоснования интеграла по траекториям (интеграла Фейнмана, континуального интеграла) [5], для усреднения случайных неограниченных операторов [6], для получения решений уравнения Шрёдингера с любым самосопряжённым гамильтонианом из решений того уравнения, которое получается из исходного путём удаления из уравнения мнимой единицы i [7] и в других ситуациях (общим числом не менее 15), см. обзор [1]. Не менее 40 из опубликованных в 2000–2020 годах работ О.Г.Смолянова, его соавторов и учеников посвящены приложениям черновских аппроксимаций в различных разделах математической физики и бесконечномерного анализа, и число таких работ продолжает расти. По данным Google Scholar на октябрь 2023 статья Пола Чернова [2], содержащая формулировку знаменитой теоремы Чернова, была процитирована 525 раз даже при том, что не в каждой работе, где используются черновские аппроксимации, есть ссылка на оригинальную статью Чернова, так как сослаться на учебники или содержащие более современные версии теоремы иногда удобнее.

В связи с несомненной теоретической и возможной практической важностью метода черновских аппроксимаций актуален вопрос о скорости сходимости этих аппроксимаций. Исследования в этой области ведутся учёными по всему миру (см. [8] и ссылки там) в основном в теоретическом ключе и ещё далеки от завершения. Даже для случая очень простого одномерного уравнения теплопроводности стоят открытые вопросы и имеется очень мало данных о скорости сходимости для разных функций Чернова и разных начальных условий. Сбор этих данных – большая задача, важная не для исследования самого уравнения теплопроводности (за прошедшие с его открытия триста лет оно уже очень хорошо изучено), не для развития методов решения этого уравнения

(их известно очень много и они дают хорошие результаты), а для исследования метода черновских аппроксимаций, поскольку общие его черты проявляются во всех ситуациях, так как метод основан на одной и той же итерационной формуле из утверждающей части теоремы Чернова. Численным экспериментам по этой задаче и посвящена настоящая статья.

В статье найдены скорости сходимости для новых, ранее не рассмотренных начальных условий, а также найдена эмпирическая зависимость скорости сходимости от класса гладкости начального условия на том семействе условий, которые удалось исследовать. Эту зависимость ещё предстоит проверить на других начальных условиях другой гладкости и из других семейств функций, после чего попытаться дать её теоретическое обоснование. Несмотря на недавние продвижения [8–16] тема скорости сходимости черновских аппроксимаций к решениям уравнения теплопроводности ещё только начинает развиваться. Сперва, следуя [3] и [4], дадим необходимые определения, а потом приведём краткий обзор известных результатов по теме и изложим новые результаты.

Определение 1.1. Пусть \mathcal{F} — банахово пространство. Пусть $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ — пространство всех линейных ограниченных операторов в \mathcal{F} . Пусть дано отображение

$$V: [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{F}).$$

То есть, если $t \geq 0$ фиксировано, то $V(t)$ — это линейный ограниченный оператор, отображающий \mathcal{F} в \mathcal{F} . Отображение V называется C_0 -полугруппой, или, что то же самое, сильно непрерывной однопараметрической полугруппой линейных ограниченных операторов, если оно удовлетворяет трём условиям:

- 1) $V(0)$ это тождественный оператор I , т. е. $\forall \varphi \in \mathcal{F} : V(0)\varphi = \varphi$;
- 2) V сопоставляет сложению чисел в $[0, +\infty)$ композицию операторов в $\mathcal{L}(\mathcal{F})$, т. е. $\forall t \geq 0, \forall s \geq 0 : V(t+s) = V(t) \circ V(s)$, где использовано обозначение $(A \circ B)(\varphi) = A(B(\varphi))$ для каждого $\varphi \in \mathcal{F}$;
- 3) V непрерывно при надделении $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ сильной операторной топологией, т. е. $\forall \varphi \in \mathcal{F}$ функция $t \mapsto V(t)\varphi$ непрерывна как отображение $[0, +\infty) \rightarrow \mathcal{F}$.

Определение 1.2. Если $(V(t))_{t \geq 0}$ — C_0 -полугруппа в банаховом пространстве \mathcal{F} , то линейный оператор \mathcal{L} , определенный равенством

$$\mathcal{L}\varphi = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{V(t)\varphi - \varphi}{t}$$

на линейном пространстве

$$\left\{ \varphi \in \mathcal{F} : \exists \lim_{t \rightarrow +0} \frac{V(t)\varphi - \varphi}{t} \right\} \stackrel{\text{обозн.}}{=} D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F}$$

называется инфинитезимальным генератором (или, короче, генератором) C_0 -полугруппы $(V(t))_{t \geq 0}$. При этом говорят, что оператор $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{F}$ порождает полугруппу, и используют обозначение $V(t) = e^{t\mathcal{L}}$.

Пусть X — бесконечное множество, и \mathcal{F} — банахово пространство (не обязательно всех) числовых функций на X , причём в \mathcal{F} действует замкнутый линейный оператор $L : D(L) \rightarrow \mathcal{F}$ с плотной в \mathcal{F} областью определения $D(L) \subset \mathcal{F}$; также предполагается, что X надделено всеми необходимыми структурами для корректного задания оператора L . Рассматривается задача Коши для эволюционного уравнения

$$\begin{cases} u'_t(t, x) = Lu(t, x), \\ u(0, x) = f(x), \end{cases} \quad (1.1)$$

где $x \in X$, $f \in \mathcal{F}$, $u(t, \cdot) \in \mathcal{F}$ для всех $t \geq 0$, а L – это, например, в тривиальном случае лапласиан Δ (и тогда $u'_t = Lu$ это уравнение теплопроводности), или (в менее тривиальном случае) более сложно устроенный линейный дифференциальный оператор с переменными коэффициентами, не зависящими от t , но зависящими (как правило, нелинейно) от x .

Как известно [3], в случае существования C_0 -полугруппы $(e^{tL})_{t \geq 0}$ с генератором $(L, D(L))$ решение задачи Коши (1.1) существует (в смысле равенства левой и правой частей в \mathcal{F}) и даётся равенством $u(t, x) = (e^{tL}f)(x)$ для $t \geq 0$ и $x \in X$. Если $f \in D(L)$, то $u(t, \cdot) \in D(L)$ для всех $t \geq 0$ и решение является классическим (в терминологии [3]), а для произвольного $f \in \mathcal{F}$ решение задачи Коши существует лишь как решение соответствующего интегрального уравнения $u(t, \cdot) = L \int_0^t u(s, \cdot) ds + f$. Иногда пишут $u(t, x)$, а иногда $u(t, \cdot)$, допуская, что в роли \mathcal{F} может выступать, например, пространство $L^p(\mathbb{R})$, тогда (1.1) выполняется лишь для почти всех $x \in \mathbb{R}$. И, хотя в этом случае запись $u(t, x)$ не вполне корректна из-за того, что все версии функции $x \mapsto u(t, x)$ соответствуют одному вектору $u(t, \cdot) \in L^p(\mathbb{R})$, обычно это не приводит к недоразумениям. В настоящей статье в качестве \mathcal{F} будет рассматриваться пространство $UC_b(\mathbb{R})$ всех вещественных, определённых на вещественной оси функций, которые ограничены и равномерно непрерывны. Эти функции определены всюду, поэтому упомянутый выше нюанс роли не играет.

Равенство $u(t, x) = (e^{tL}f)(x)$ показывает, что нахождение полугруппы $(e^{tL})_{t \geq 0}$ это трудная задача, так как она равносильна решению задачи Коши (1.1) для каждого $f \in \mathcal{F}$. Более того, в выражении e^{tL} показатель степени в общем случае представляет собой не ограниченный и не самосопряжённый оператор, поэтому задать экспоненту нельзя ни стандартным степенным рядом, ни интегралом с помощью спектральной теоремы. Равенство $V(t) = e^{tL}$ мы понимаем как полный синоним слов « V является C_0 -полугруппой с генератором L », а определение C_0 -полугруппы не даёт конструктивного способа нахождения этой полугруппы даже если генератор известен. Однако, если построена так называемая (см. [1],[7]) операторнозначная функция Чернова C , т.е., по определению, функция, удовлетворяющая условиям теоремы Чернова (в частности, равенству $C(t) = I + tL + o(t)$ при $t \rightarrow +0$), то полугруппа дается равенством $e^{tL} = \lim_{n \rightarrow \infty} (C(t/n))^n$. Преимущество такого подхода состоит в том, что обычно удаётся задать C не очень длинной явной формулой, содержащей коэффициенты оператора L , и, тем самым, получить приближения к решению задачи Коши (1.1), сходящиеся к решению в \mathcal{F} при $n \rightarrow \infty$. Функции $(C(t/n))^n f$ как раз и называются черновскими аппроксимациями решения задачи Коши (1.1). Настоящее сообщение посвящено исследованию того, с какой скоростью (при фиксированном $t > 0$) в зависимости от $f \in \mathcal{F}$ убывает при $n \rightarrow \infty$ норма разности приближённого и точного решений $\|(C(t/n))^n f - e^{tL} f\|$. История этого вопроса будет обсуждаться в соответствующем разделе статьи. Итак, общий контекст уже задан выше, и можно теперь привести строгие определения и теорему Чернова в современной формулировке.

О п р е д е л е н и е 1.3. *Говорят, что операторнозначная функция C называется по Чернову оператором L (подробности приведены ниже), если выполняются следующие условия (СТ0)-(СТ4):*

(СТ0). \mathcal{F} – банахово пространство, и $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ – пространство всех линейных ограниченных операторов в \mathcal{F} . Пусть C – это отображение $C: [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{F})$, или, иначе говоря, семейство линейных ограниченных операторов $(C(t))_{t \geq 0}$. Замкнутый линейный оператор $L: D(L) \rightarrow \mathcal{F}$ имеет плотную в \mathcal{F} область определения $D(L) \subset \mathcal{F}$.

(СТ1). Семейство C сильно непрерывно (= непрерывно в сильной операторной топологии пространства $\mathcal{L}(\mathcal{F})$), т. е. отображение $t \mapsto C(t)f \in \mathcal{F}$ непрерывно на $[0, +\infty)$ для каждого $f \in \mathcal{F}$;

(СТ2). $C(0) = I$, т. е. $C(0)f = f$ для каждого $f \in \mathcal{F}$;

(СТ3). Существует такое плотное в \mathcal{F} линейное подпространство $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$, что при всех $f \in \mathcal{D}$ существует предел $\lim_{t \rightarrow 0} (C(t)f - f)/t$, значение которого обозначим символом $C'(0)f$;

(СТ4). Замыкание оператора $(C'(0), \mathcal{D})$ существует и равно $(L, D(L))$.

Плотность $D(L)$ в \mathcal{F} следует из (СТ3) и (СТ4), поэтому отдельно требовать это в (СТ0) не обязательно. Классическую теорему Чернова (Paul Robert Chernoff [2], 1968) можно сформулировать теперь следующим образом, отделяя в её условиях (E)xistence condition и (N)orm growth condition от (СТ).

Т е о р е м а 1.1. ТЕОРЕМА ЧЕРНОВА, СОВРЕМЕННАЯ ФОРМУЛИРОВКА.

(И.Д.Ремизов [7], 2016) Пусть \mathcal{F} — банахово пространство. Пусть дано отображение $C: [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{F})$ и замкнутый линейный оператор $L: D(L) \rightarrow \mathcal{F}$, где $D(L) \subset \mathcal{F}$. Пусть выполнены следующие условия:

(E). Существует C_0 -полугруппа $(e^{tL})_{t \geq 0}$ с генератором $(L, D(L))$;

(СТ). C касается по Чернову оператора L ;

(N). Существует такое число $\omega \in \mathbb{R}$, что $\|C(t)\| \leq e^{\omega t}$ при всех $t \geq 0$.

Тогда для каждого $f \in \mathcal{F}$ и $t > 0$ верно, что $(C(\frac{t}{n}))^n f \rightarrow e^{tL}f$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $t \in [0, T]$ для каждого $T > 0$.

З а м е ч а н и е 1.1. Равномерная сходимость по $t \in [0, T]$ для каждого $T > 0$ также называется локально равномерной по $t \in [0, +\infty)$ сходимостью. Иными словами, это сходимость, равномерная по t из каждого отрезка, лежащего в $[0, +\infty)$. Поэтому утверждающую часть теоремы Чернова можно прочитать так:

Для каждого $f \in \mathcal{F}$ и $T > 0$ верно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \left\| \left(C\left(\frac{t}{n}\right) \right)^n f - e^{tL}f \right\| = 0.$$

Введём теперь важное для наших целей понятие касания по Чернову порядка $k \in \mathbb{N}$ следующим образом.

О п р е д е л е н и е 1.4. Будем говорить, что операторнозначная функция C касается по Чернову оператора L с порядком черновского касания k , если выполняются условия (СТ0)-(СТ4) и следующее условие (СТЗ- k):

(СТЗ- k). Существует такое плотное в \mathcal{F} линейное подпространство $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$, что при всех $f \in \mathcal{D}$ верно, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^k} \left\| C(t)f - \left(I + tLf + \frac{1}{2}t^2L^2 + \dots + \frac{1}{k!}t^kL^k \right) f \right\| = 0.$$

2. Скорость сходимости черновских аппроксимаций

Пусть в силу теоремы Чернова имеет место сходимость $(C(t/n))^n f \rightarrow e^{tL}f$ для каждого $f \in \mathcal{F}$. Но с какой скоростью происходит эта сходимость, как быстро убывает к нулю невязка $\left\| (C(\frac{t}{n}))^n f - e^{tL}f \right\|$ с ростом n ? Несмотря на разбор некоторых частных

случаев [16], построение этой теории не завершено, и тема привлекает внимание исследователей [8–15]. Неисчерпаемость этой темы следует из следующих двух утверждений.

Предложение 2.1. (О.Е.Галкин, И.Д. Ремизов [14]) *Существуют банахово пространство \mathcal{F} , C_0 -полугруппа $(e^{tL})_{t \geq 0}$ в \mathcal{F} с генератором $(L, D(L))$ и функция Чернова S для оператора $(L, D(L))$, такие что $\|e^{tL}\| = \|S(t)\| = 1$ для каждого $t \geq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(S(t/n))^n f - e^{tL} f\| = 0$ для всех $f \in \mathcal{F}$, но $\|(S(t/n))^n - e^{tL}\| \geq 1$ для каждого $t > 0$ и каждого $n \in \mathbb{N}$.*

Таким образом, черновские аппроксимации могут сходиться на каждом векторе, и при этом не сходиться по норме.

Предложение 2.2. (О.Е.Галкин, И.Д. Ремизов [14]) *Для произвольно выбранной невозрастающей непрерывной функции $v: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ существуют банахово пространство \mathcal{F} , C_0 -полугруппа $(e^{tL})_{t \geq 0}$ в \mathcal{F} , функция Чернова S , а также вектора $f_0 \in \mathcal{F} \setminus D(L)$ и $f_1 \in \bigcap_{j=1}^{\infty} D(L^j)$, такие что:*

- 1) $\|f_0\| = \|f_1\| = 1$, $\|e^{tL}\| = \|S(t)\| = 1$ для каждого $t \geq 0$;
- 2) для любого $T > 0$ при всех натуральных $n \geq n_0$ (где $n_0 \in \{1, 2, 3, \dots\}$ выбирается из условия $T \cdot v(n_0/T) \leq 1/2$) верно равенство

$$\sup_{t \in [0, T]} \|(S(t/n))^n f_0 - e^{tL} f_0\| = \sup_{t \in [0, T]} \|(S(t/n))^n f_1 - e^{tL} f_1\| = T v(n/T).$$

Таким образом, скорость сходимости черновских аппроксимаций на отдельно взятом ненулевом векторе может быть как сколь угодно велика (для этого функция $v(x)$ должна стремиться к нулю при $x \rightarrow +\infty$ со сколь угодно большой скоростью, например, $v(x) = e^{-x}$, $v(x) = e^{-e^x}$ и так далее), так и сколь угодно низка (для этого $v(x)$ должна стремиться к нулю при $x \rightarrow +\infty$ сколь угодно медленно, например, $v(x) = 1/\ln(x+e)$, $v(x) = 1/\ln(\ln(x+e^e))$ и так далее).

В связи с этим резонно ставить вопрос о том, какие условия нужно наложить на функцию Чернова, чтобы получить оценку сверху на скорость сходимости. Эти условия недавно были получены для случая степенной оценки и даются следующей теоремой.

Теорема 2.1. (О.Е.Галкин, И.Д. Ремизов [14]) *Пусть выполнены следующие три условия:*

1) *В произвольном банаховом пространстве \mathcal{F} задана C_0 -полугруппа $(e^{tL})_{t \geq 0}$ с генератором $(L, D(L))$, такая что при некоторых $M_1 \geq 1$ и $w \geq 0$ для всех $t \geq 0$ выполняется неравенство $\|e^{tL}\| \leq M_1 e^{wt}$.*

2) *Задано отображение $S: (0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{F})$, такое что при некотором $M_2 \geq 1$ для всех $k = 1, 2, 3, \dots$ и всех $t > 0$ верно неравенство $\|S(t)^k\| \leq M_2 e^{kwt}$.*

3) *Для некоторых чисел $m \in \{0, 1, 2, \dots\}$ и $p \in \{1, 2, 3, \dots\}$ существует такое $(e^{tL})_{t \geq 0}$ -инвариантное подпространство $\mathcal{D} \subset D(L^{m+p}) \subset \mathcal{F}$ (то есть $(e^{tL})(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$ для каждого $t \geq 0$, возможно, $\mathcal{D} = D(L^{m+p})$) и существуют такие функции $K_j: (0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, где $j = 0, 1, \dots, m+p$, что для всех $t > 0$ и всех $f \in \mathcal{D}$ выполняется неравенство*

$$\left\| S(t)f - \sum_{k=0}^m \frac{t^k L^k f}{k!} \right\| \leq t^{m+1} \sum_{j=0}^{m+p} K_j(t) \|L^j f\|.$$

Тогда верны следующие два утверждения:

1) Для всех $t > 0$, всех $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ и всех векторов $f \in \mathcal{D}$ верна оценка

$$\|(S(t/n))^n f - e^{tL} f\| \leq \frac{M_1 M_2 t^{m+1} e^{wt}}{n^m} \sum_{j=0}^{m+p} C_j(t/n) \|L^j f\|,$$

где $C_{m+1}(t) = K_{m+1}(t)e^{-wt} + M_1/(m+1)!$ и $C_j(t) = K_j(t)e^{-wt}$ при $j \neq m+1$.

2) Если \mathcal{D} плотно в \mathcal{F} и для всех $j = 0, 1, \dots, m+p$ при $t \rightarrow +0$ верно соотношение $K_j(t) = o(t^{-m})$, то для всех $T > 0$ и всех $g \in \mathcal{F}$ справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in (0, T]} \|(S(t/n))^n g - e^{tL} g\| = 0.$$

Грубо говоря, приведённая выше теорема О.Е.Галкиной и И.Д.Ремизова утверждает, что если порядок черновского касания равен m , и функция Чернова не слишком сильно уклоняется от своего многочлена Тейлора порядка m , то скорость сходимости черновских аппроксимаций к полугруппе будет не сильно хуже, чем константа, умноженная на n^{-m} . Точны ли эти оценки - в октябре 2023 года не известно. Об оценках снизу на скорость сходимости также не известно ничего, хотя некоторые предположения можно извлечь из гипотез, высказанных в работе [13]. И, конечно, ничего не известно о скорости сходимости в случае, если вектор f не удовлетворяет условиям теоремы Галкиной-Ремизова, при этом сам факт сходимости гарантируется теоремой Чернова. Взяв достаточно простой пример, можно исследовать эту скорость сходимости численно, а потом попытаться интерпретировать полученные данные.

Определение 2.1. Пусть даны C_0 -полугруппа $(e^{tL})_{t \geq 0}$, функция Чернова C , вектор f , число $\tau > 0$. Тогда $d(n, \tau) = \|e^{\tau L} f - u_n(\tau, \cdot)\|$, где $u_n(\tau, x) = ((C(\tau/n))^n f)(x)$, называется невязкой (ошибкой приближения) для построенных по функции Чернова C черновских аппроксимаций $(C(\tau/n))^n f$ к полугруппе $(e^{tL})_{t \geq 0}$ на начальном условии f в момент времени $t = \tau$. Если существуют такие числа $\beta_\tau, M_\tau > 0$ что $d(n, \tau) - M_\tau n^{-\beta_\tau} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то $M_\tau n^{-\beta_\tau}$ будем называть степенной частью невязки, а β_τ будем называть порядком сходимости.

Если в качестве генератора полугруппы взять оператор дифференцирования (он соответствует уравнению переноса) или оператор взятия второй производной (он соответствует уравнению теплопроводности), то управлять принадлежностью вектора f областям определения степеней генератора можно с помощью гладкости функции f . В зависимости от того, в каком пространстве функций мы рассматриваем наш оператор, требования на гладкость могут выглядеть по-разному. Поэтому важно накопить достаточный запас численно исследованных конкретных случаев, чтобы потом, анализируя их, можно было делать новые теоретические предположения.

3. Выбор модельного примера и постановка задачи

В настоящей статье мы рассматриваем оператор L , заданный равенством $Lf = f''$, и задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u'_t(t, x) = u''_{xx}(t, x) \text{ для } t > 0, x \in \mathbb{R}^1, \\ u(0, x) = u_0(x), \text{ для } x \in \mathbb{R}^1, \end{cases} \quad (3.1)$$

которая является хорошим модельным примером, поскольку её ограниченное решение $u(t, x)$ уже известно и задается формулой

$$(e^{tL}u_0)(x) = u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x - z, t)u_0(z)dz, \text{ где } \Phi(x, t) = \exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right). \quad (3.2)$$

Формула (3.2) позволяет находить решение с наперед заданной точностью - для этого требуется заменить несобственный интеграл на собственный (допуская ошибку не выше заданной), а потом вычислить интеграл по отрезку с помощью одного из сеточных методов (снова допуская ошибку не выше заданной) для любого начального условия u_0 .

В настоящей работе мы специально выбрали простой случай (3.1), когда решение (3.2) уже известно, и на этом простом примере исследуем сам метод черновских аппроксимаций, саму формулу Чернова $e^{tL} = \lim_{n \rightarrow \infty} (C(t/n))^n$ в общем случае. То есть, для нас интерес представляет не решение уравнения теплопроводности, не черновские аппроксимации к этому решению, а только скорость сходимости аппроксимаций к решению, поскольку есть предположение, что скорость сходимости не слишком сильно зависит от уравнения. Чтобы проверить это предположение, нужно набрать запас экспериментальных данных, и мы начинаем с простого случая - с уравнения теплопроводности. Первые шаги в этом направлении были сделаны в работе [15], где были рассмотрены уравнение теплопроводности и уравнение переноса, и начальные условия $\sin(x)$ и $e^{-|x|}$. Мы следуем тому же пути, рассматриваем только одно уравнение (теплопроводности), но больше начальных условий: помимо $\sin(x)$ и $e^{-|x|}$, также проводим численный эксперимент для $|\sin(x)|^\alpha$ при $\alpha \in \{5/2, 3/2, 1, 3/4, 1/2, 1/4\}$. В результате нам удалось обнаружить нетривиальную зависимость скорости сходимости от класса гладкости начального условия, это и есть главное содержание статьи.

Мы рассматриваем банахово пространство $\mathcal{F} = UC_b(\mathbb{R})$ всех ограниченных, равномерно непрерывных функций $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, наделенное равномерной нормой $\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. Рассмотрим оператор L , заданный при каждом $x \in \mathbb{R}$ равенством $(Lf)(x) = f''(x)$, справедливом для всех бесконечно гладких функций $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ограниченных вместе со всеми производными ($f \in D = C_b^\infty(\mathbb{R})$). Задача Коши (3.1) является частным случаем задачи Коши с постоянными (единица, ноль, ноль) коэффициентами, рассмотренной в [17], и соответствующая функция Чернова была найдена в [17], частный случай этой функции Чернова представлен ниже:

$$(G(t)f)(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{4}f(x + 2\sqrt{t}) + \frac{1}{4}f(x - 2\sqrt{t}),$$

В [17] было доказано, что $G(t)$ является касательной по Чернову первого порядка к d^2/dx^2 . Позже А.В.Веденин [11] предложил другую функцию Чернова, её частный случай даётся равенством

$$(S(t)f)(x) = \frac{2}{3}f(x) + \frac{1}{6}f(x + \sqrt{6t}) + \frac{1}{6}f(x - \sqrt{6t}).$$

А.В.Веденин доказал, что $S(t)$ является касательной по Чернову второго порядка к d^2/dx^2 .

В настоящей статье мы исследуем, как $d(n, \tau)$ зависит от n при фиксированном $\tau = 1/2$ и $u_n(\tau, x)$, заданном в виде

$$u_n(\tau, x) = ((C(\tau/n))^n u_0)(x),$$

где $C \in \{G, S\}$, а $C(\tau/n)$ получается заменой t на τ/n в формуле, определяющей $C(t)$, а $(C(\tau/n))^n = C(\tau/n)C(\tau/n) \dots C(\tau/n)$ является композицией n копий линейного ограниченного оператора $C(\tau/n)$. Мы рассматриваем несколько начальных условий u_0 , которые являются гёльдеровыми функциями (следовательно, все принадлежат пространству $UC_b(\mathbb{R})$), и имеют различные показатели Гельдера, либо дифференцируемы и имеют гёльдеровы производные. Для двух функций Чернова G, S и нескольких начальных условий u_0 мы численно находим норму разницы между точным решением и его черновской аппроксимацией.

4. Комментарии о методах вычислений

Вычисления проводились в среде Python 3 с помощью написанной нами программы, которая доступна в Приложении к препринту [12]. Все измерения, для уменьшения вычислительной сложности, для каждого значения n (изменяющегося от 1 до 11) проводились для 1000 точек, равномерно делящих отрезок $[-\pi, \pi]$ или $[-2\pi, 2\pi]$. Начальные условия вида $u_0(x) = |\sin x|^\alpha$ для различных $\alpha \in \{5/2, 3/2, 1, 3/4, 1/2, 1/4\}$, как и любое из основанных на них черновских приближений, являются периодическими функциями. Таким образом, получается, что

$$d(n, \tau) = \sup_{x \in [-2\pi, 2\pi]} |u_n(\tau, x) - u(\tau, x)|,$$

где u - точное решение (3.1), а u_n - черновское приближение. Это рассуждение применимо к каждому $\tau > 0$, в настоящей работе всюду использовалось $\tau = 1/2$.

Программный код написан с возможностью задания любого оператора и любого начального условия, т.е. без упрощения функций Чернова и использования биномиальных коэффициентов, в отличие от работы [15], опубликованной ранее. Более того, начальное условие не обязательно должно быть гладкой функцией. Количество итераций не ограничено числом 11, значение n может быть изменено, как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения. Мы выбрали оптимальное значение n , так как программа очень времязатратна: через Jupyter Notebook 6.1.4 Anaconda 3 Python 3.8.3, установленный на персональном компьютере с Windows 10, CPU Intel Core i5-1035G1, 1.0-3.6 GHz, 8 Gb RAM на выполнение программы для всех начальных условий с построением графиков для них уходит около 20 минут.

5. Пример приближения для начального условия $u_0(x) = |\sin x|^{5/2}$

На рисунке 5.1 показаны два графика приближенного решения для изучаемых нами функций при $n = 10$ и точного решения при начальном условии $u_0(x) = |\sin x|^{5/2}$. Видно, что график аппроксимаций в целом повторяет график точного решения. Так как визуально ошибку оценить сложно, мы построили график убывания ошибки в зависимости от n , в обычном и логарифмическом масштабе.

На рисунке 5.2 показаны графики убывающей ошибки черновских приближений как функции n , где $1 \leq n \leq 11$. Слева показаны графики убывающей погрешности для функций Чернова $S(t)$ (синим цветом) и $G(t)$ (зеленым цветом) в обычной шкале (по горизонтальной оси отложен номер аппроксимации n , а по вертикальной оси отложена ошибка $d(n, 1/2)$), а справа – те же графики в логарифмической шкале (по горизонтальной оси отложен $\ln(n)$, а по вертикальной оси отложен $\ln(d(n, 1/2))$). Из графиков

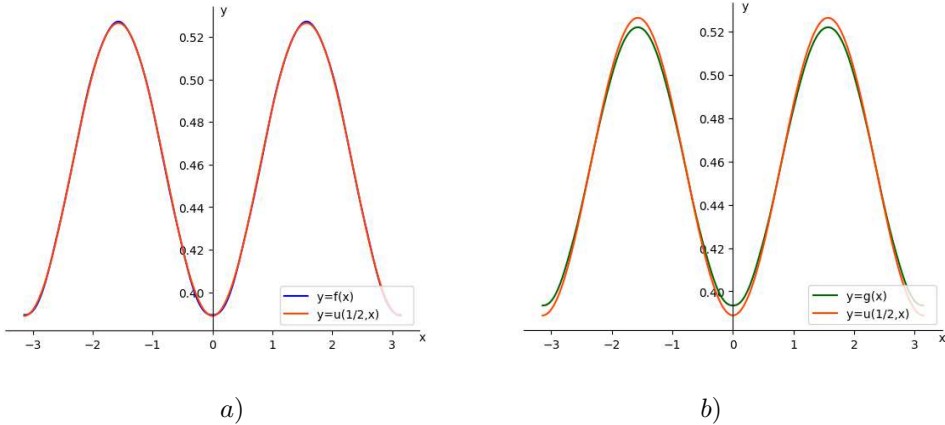


Рис. 5.1. График точного решения $u(1/2, x) = (\sqrt{2\pi})^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-z)^2}{2}} u_0(z) dz$ при начальном условии $u_0(x) = |\sin x|^{5/2}$ в момент времени $\tau = \frac{1}{2}$ и графики приближенных решений при $n = 10$: а) $f(x) = ((S(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10}))^{10} u_0)(x)$, б) $g(x) = ((G(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10}))^{10} u_0)(x)$

Fig 5.1. Graph of the exact solution $u(1/2, x) = (\sqrt{2\pi})^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-z)^2}{2}} u_0(z) dz$ for initial condition $u_0(x) = |\sin x|^{5/2}$ at the moment of time $\tau = \frac{1}{2}$ and graphs of approximate solutions for $n = 10$: а) $f(x) = ((S(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10}))^{10} u_0)(x)$, б) $g(x) = ((G(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10}))^{10} u_0)(x)$

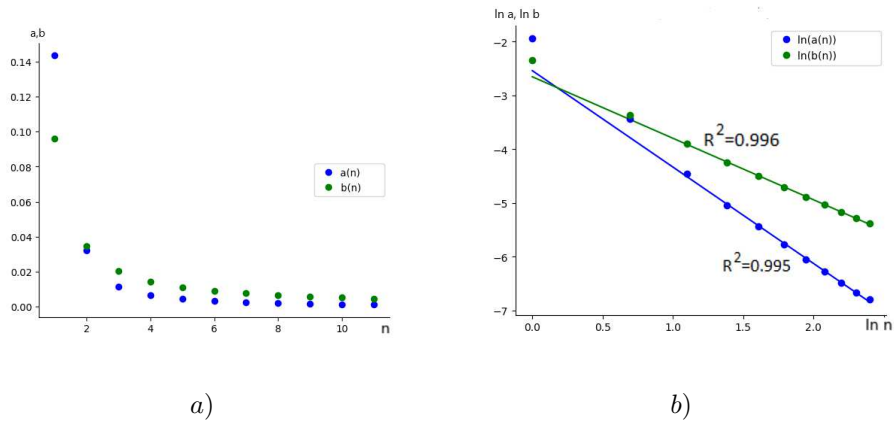


Рис. 5.2. Графики погрешности для функций Чернова $S(t)$ и $G(t)$ при $u_0(x) = |\sin x|^{5/2}$ и $t = \frac{1}{2}$: а) $a(n) = d(n, 1/2)$ (синий цвет) для $S(t)$ и $b(n) = d(n, 1/2)$ (зеленый цвет) для $G(t)$, б) $\ln a(n) = \ln d(n, 1/2)$ (синий цвет) для $S(t)$ и $\ln b(n) = \ln d(n, 1/2)$ (зеленый цвет) для $G(t)$

Fig 5.2. Graphs of error for Chernoff functions $S(t)$ and $G(t)$, $u_0(x) = |\sin x|^{5/2}$, $\tau = \frac{1}{2}$: а) $a(n) = d(n, 1/2)$ (blue line) for $S(t)$ and $b(n) = d(n, 1/2)$ (green line) for $G(t)$, б) $\ln a(n) = \ln d(n, 1/2)$ (blue line) for $S(t)$ and $\ln b(n) = \ln d(n, 1/2)$ (green line) для $G(t)$

следует, что скорость сходимости для функции $S(t)$ меньше скорости сходимости для функции $G(t)$.

Визуально определяется, что если отбросить точки $n = 1, 2$, то на графике справа синие точки почти лежат на некоторой прямой, а зелёные почти лежат на некоторой другой прямой. Нас интересует асимптотическое поведение ошибки при $n \rightarrow \infty$, поэтому отбросить первые два значения $n = 1, 2$ ради больше точности уместно. Каковы уравнения этих прямых, и как выразить числом слова «почти лежат» – можно узнать с помощью метода линейной регрессии, т.е. метода наименьших квадратов (МНК) в линейном случае.

Используя реализацию линейной регрессии с помощью стандартного пакета в Excel, мы построили синюю прямую, аппроксимирующую синие точки, и зелёную прямую, аппроксимирующую зелёные точки. Также мы нашли уравнения этих прямых линий и коэффициенты детерминации. Визуально определяется, что точки на правом графике незначительно удалены от построенных по методу наименьших квадратов прямых. Как известно, $R^2 = 1$ в моделях линейной регрессии соответствует случаю, когда точки полностью лежат на прямой. На практике принято считать, что регрессия проведена удовлетворительно, если коэффициент детерминации $R^2 > 0.8$. Таким образом, хорошее визуально определяемое соответствие прямой и точек подтверждается и указанными на графиках числами – значениями коэффициента детерминации $R^2 > 0.98$, что очень близко к 1.

Близкая к линейной зависимость логарифма ошибки от логарифма n означает, что зависимость ошибки от n близка к степенной. Округляя коэффициенты, видим, что для синей линии (см. рис. 5.2) уравнение выглядит следующим образом: $\ln(y(n)) = -1.792 \ln(n) - 2.538$, т.е. $y(n) = n^{-1.792} e^{-2.538}$. Аналогично, для зелёной линии (см. рис. 5.2) уравнение $\ln(y(n)) = -1.143 \ln(n) - 2.652$, т.е. $y(n) = n^{-1.143} e^{-2.652}$. Используя введённую в Определении 2.1 терминологию, можно сказать так: мы численно продемонстрировали, что для $n \in \{3, \dots, 11\}$ на начальном условии $u_0(x) = |\sin x|^{5/2}$ при $\tau = 1/2$ степенная часть ошибки для функции Чернова S равна $n^{-1.792} e^{-2.538}$, т.е. $\beta_\tau = 1.792$. Аналогично, в той же ситуации для функции Чернова G получаем $\beta_\tau = 1.143$.

Используя тот же подход, мы исследовали поведение ошибки для других начальных условий и получили таблицу порядков скоростей сходимости.

6. Таблица порядков скоростей сходимости

В таблице 6.1 приведены экспериментально (с помощью моделирования в Python) полученные порядки убывания ошибки в зависимости от класса гладкости начального условия и функции Чернова.

Мы видим, что на начальном условии с высокой гладкостью (первая строка в таблице), первый порядок касания по Чернову соответствует убывания скорости ошибки примерно $const/n$, а второй порядок – скорости убывания примерно $const/n^2$. Это согласуется с предположением из [13] и теоремой из [14].

По мере потери гладкости (вторая строка в таблице и ниже) теория из [14] перестает работать, а экспериментальное наблюдение состоит в следующем: скорость сходимости постепенно уменьшается и преимущества функции Чернова со вторым порядком касания Чернова постепенно исчезают.

Таблица 6.1. Скорость сходимости аппроксимаций к точному решению для начальных условий различной гладкости**Table 6.1.** Speed of convergence of approximations to the exact solution for initial conditions of different smoothness

Начальное условие	Класс гладкости α начального условия u_0	Порядок сходимости $\beta_{1/2}$ для функции Чернова $G(t)$	Порядок сходимости $\beta_{1/2}$ для функции Чернова $S(t)$
$u_0(x) = \sin(x)$	C^∞ , т.е. все производные существуют и ограничены	1.042	2.092
$u_0(x) = \sin(x) ^{5/2}$	$H^{2\frac{1}{2}}$, т.е. первая и вторая производные существуют и ограничены, причём вторая гёльдерова с показателем Гёльдера $1/2$	1.143, регрессия проводилась без учета $n = 1, n = 2$	1.792, регрессия проводилась без учета $n = 1, n = 2$
$u_0(x) = \sin(x) \sin(x)$	H^2 , т.е. первая производная существует, ограничена и гёльдерова с показателем Гёльдера 1	1.178, регрессия проводилась без учета $n = 1, n = 2$	1.996, регрессия проводилась без учета $n = 1, n = 2$
$u_0(x) = \sin(x) ^{3/2}$	$H^{1\frac{1}{2}}$, т.е. первая производная существует, ограничена и гёльдерова с показателем Гёльдера $1/2$	0.979, регрессия проводилась без учета $n = 1$	1.511
$u_0(x) = \sin(x) $	H^1 , т.е. гёльдерова с показателем Гёльдера 1	1.051	1.095
$u_0(x) = e^{- x }$	H^1 , т.е. гёльдерова с показателем Гёльдера 1	0.929	1.056
$u_0(x) = \sin(x) ^{3/4}$	$H^{3/4}$, т.е. гёльдерова с показателем Гёльдера $3/4$	0.815	0.926
$u_0(x) = \sin(x) ^{1/2}$	$H^{1/2}$, т.е. гёльдерова с показателем Гёльдера $1/2$	0.691	0.772
$u_0(x) = \sin(x) ^{1/4}$	$H^{1/4}$, т.е. гёльдерова с показателем Гёльдера $1/4$	0.614	0.665

Представим результаты из таблицы графически (см. рис. 6.1).

Видно, что точки, соответствующие гёльдеровым начальным условиям с показате-

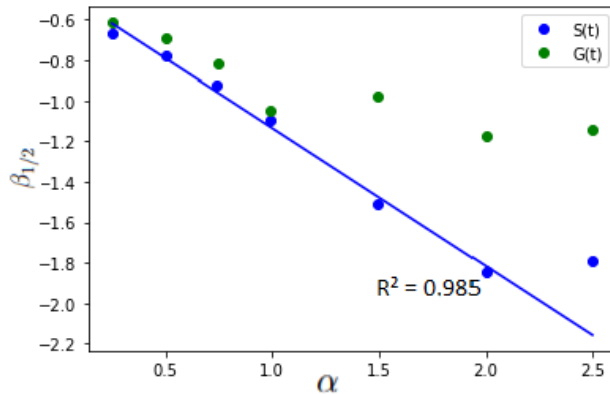


Рис. 6.1. Скорость сходимости аппроксимаций к точному решению для начальных условий различной гладкости.

Fig. 6.1. Speed of convergence of approximations to the exact solution for initial conditions of different smoothness.

лем Гёльдера не выше 1, расположены достаточно близко к некоторой прямой. Найдём уравнение этой прямой, игнорируя точки, соответствующие гладкости 1.5, 2 и 2.5. Уравнение аппроксимирующей прямой, полученное с помощью метода линейной регрессии: $y(x) = -0.684x - 0.447$. Интересно, что точки для начальных условий с гладкостью 1.5 и 2 тоже расположены недалеко от прямой. Полученное выше эмпирическое уравнение можно интерпретировать следующим образом: когда класс гладкости α начального условия u_0 не превышает порядка касания по Чернову, тогда $\beta = 0.684\alpha + 0.447$ и

$$d(n, 1/2) \approx \text{const} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{0.684\alpha + 0.447}.$$

Между тем, когда класс гладкости α начального условия u_0 больше порядка касания по Чернову соответствующей функции Чернова, то легко устанавливаемой зависимости нет, но все же функция Чернова $S(t)$ с касанием по Чернову второго порядка дает лучшее приближение, чем функция Чернова $G(t)$ с касанием по Чернову первого порядка.

7. Заключение

Результаты численного моделирования в целом согласуются с теорией, вытекающей из высказанного в 2018 году предположения в [13], а также рассмотрены случаи, не описываемые никакой известной в 2023 году теорией. В работе нам удалось обнаружить нетривиальную зависимость порядка скорости сходимости от класса гладкости начального условия. В будущем следует рассмотреть наиболее интересный случай переменных коэффициентов, понимая их как параметры аналогично u_0 , однако и для постоянных коэффициентов уже обнаружены явления, не имеющие строгого теоретического обоснования. Также встаёт вопрос: как связаны скорость сходимости черновских аппроксимаций на некотором начальном условии и принадлежность начального условия

областям определения степеней генератора? Так что исследования в этом направлении далеки от завершения.

Благодарности. Результаты разделов 2 и 3 статьи получены при участии членов научно-образовательной группы «Эволюционные полугруппы и их новые приложения» (грант научного фонда ВШЭ №23-00-031). Изложенные в разделах статьи 4, 5, 6 и 7 результаты получены при поддержке гранта РФФ № 23-71-30008 «Диссипативная динамика бесконечномерных и конечномерных систем, разработка математических моделей механических, гидродинамических процессов». Авторы выражают благодарность рецензенту за замечания по рукописи, которые позволили улучшить изложение полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Butko Ya. A. The method of Chernoff approximation // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 2020. Vol. 325. P. 19–46. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-46079-2_2
2. Chernoff P. R. Note on product formulas for operator semigroups // J. Functional Analysis. 1968. Vol. 238, No 2. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-1236\(68\)90020-7](https://doi.org/10.1016/0022-1236(68)90020-7)
3. Engel K.-J., Nagel R. One-parameter semigroups for linear evolution equations. NY: Springer, 1999. 589 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/b97696>
4. Remizov I. D. Feynman and Quasi-Feynman formulas for evolution equations // Doklady Mathematics. 2017. Vol. 96. P. 433-437. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1064562417050052>
5. Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. Континуальные интегралы. М.: Изд-во МГУ. 1990. 150 с.
6. Кальметьев Р. Ш., Орлов Ю. Н., Сакбаев В. Ж. Итерации Чернова как метод усреднения случайных аффинных преобразований // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62, № 6. С. 1030–1041. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0044466922060114>
7. Remizov I. D. Quasi-Feynman formulas – a method of obtaining the evolution operator for the Schrödinger equation // Journal of Functional Analysis. 2016. Vol. 270, No. 12. P. 4540–4557. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2015.11.017>
8. Zagrebnov V. A. Notes on the Chernoff product formula // Journal of Functional Analysis. 2020. Vol. 279, No. 7. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2020.108696>
9. Vedenin A. V. Fast converging Chernoff approximations to solution of a parabolic differential equation on a real line // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 2022. Vol. 24, No. 3. pp. 280–288. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202203.280-288>
10. Galkin O. E., Remizov I. D. Upper and lower estimates for rate of convergence in the Chernoff product formula for semigroups of operators. 2021. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2104.01249>

11. Веденин А. В., Воеводкин В. С., Галкин В. Д., Каратецкая Е. Ю., Ремизов И. Д. Скорость сходимости черновских аппроксимаций решений эволюционных уравнений // Матем. заметки. 2020. Т. 108, № 3. С. 463–468. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm12704>
12. Dragunova K. A. Garashenkova, A. A. ,Nikbakht N., Remizov I. D. Numerical study of the rate of convergence of Chernoff approximations to solutions of the heat equation with full list of illustrations and Python source code. 2023. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2301.05284>
13. Remizov I. D. On estimation of error in approximations provided by Chernoff 's product formula // International Conference "ShilnikovWorkshop-2018" dedicated to the memory of outstanding Russian mathematician Leonid Pavlovich Shilnikov (1934-2011). Nizhny Novgorod: Lobachevsky State University, 2018. P. 38–41.
14. Галкин О. Е., Ремизов И. Д. Скорость сходимости черновских аппроксимаций операторных C_0 -полугрупп // Матем. заметки. 2022. Т. 111, № 2. С. 297–299. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm13292>
15. Prudnikov P. S. Speed of convergence of Chernoff approximations for two model examples: heat equation and transport equation. 2020. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2012.09615>
16. Орлов Ю. Н., Сакбаев В. Ж., Смолянов О. Г. Скорость сходимости фейнмановских аппроксимаций полугрупп, порождаемых гамильтонианом осциллятора // ТМФ. 2012. Т. 172, № 1. С. 122–137. DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6936>
17. Remizov I. D. Approximations to the solution of Cauchy problem for a linear evolution equation via the space shift operator (second-order equation example) // Applied Mathematics and Computation. 2018. Vol. 328. P. 243–246. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.01.057>

*Поступила 17.08.2023; доработана после рецензирования 08.10.2023;
принята к публикации 24.11.2023*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. Ya. A. Butko, “The method of Chernoff approximation”, *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, **325** (2020), 19–46. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-46079-2_2
2. P. R. Chernoff, “Note on product formulas for operator semigroups.”, *J. Functional Analysis*, **238:2** (1968). DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-1236\(68\)90020-7](https://doi.org/10.1016/0022-1236(68)90020-7)
3. K.-J. Engel, R Nagel, *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, Springer, NY, 1999 DOI: <https://doi.org/10.1007/b97696>, 589 p.

4. I. D. Remizov, “Feynman and Quasi-Feynman formulas for evolution equations”, *Doklady Mathematics*, **96** (2017), 433–437. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1064562417050052>
5. O. G. Smolyanov, E. T. Shavgulidze, [*Continual integrals*], MSU Publ., Moscow, 1990 (In Russ.), 150 с.
6. R. Sh. Kalmeteв, Yu. N. Orlov, V. Zh. Sakbaev, “Chernoff iterations as an averaging method for random affine transformations”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **62:6** (2022), 996–1006. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0044466922060114>
7. I. D. Remizov, “Quasi-Feynman formulas – a method of obtaining the evolution operator for the Schrödinger equation”, *Journal of Functional Analysis*, **270:12** (2016), 4540–4557. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2015.11.017>
8. V.A. Zagrebnov, “Notes on the Chernoff product formula”, *Journal of Functional Analysis*, **279:7** (2020). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2020.108696>
9. A. V. Vedenin, “Fast converging Chernoff approximations to solution of a parabolic differential equation on a real line.”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **24:3** (2022), 280–288. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202203.280-288>
10. O. E. Galkin, I. D. Remizov, “Upper and lower estimates for rate of convergence in the Chernoff product formula for semigroups of operators”, 2021. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2104.01249>
11. A. V. Vedenin, V. S. Voevodkin, V. D. Galkin, E. Yu. Karatetskaya, I. D. Remizov, “Speed of convergence of Chernoff approximations to solutions of evolution Equation”, *Math. Notes*, **108:3** (2020), 451–456 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm12704>
12. K. A. Dragunova, A. A. Garashenkova, N. Nikbakht, I. D. Remizov, “Numerical study of the rate of convergence of Chernoff approximations to solutions of the heat equation with full list of illustrations and Python source code”, 2023. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2301.05284>
13. I. D. Remizov, “On estimation of error in approximations provided by Chernoff’s product formula.”, *International Conference "Shilnikov Workshop-2018" dedicated to the memory of outstanding Russian mathematician Leonid Pavlovich Shilnikov (1934-2011)*, 2018, 38–41.
14. O. E. Galkin, I. D. Remizov, “Rate of Convergence of Chernoff Approximations of operator C_0 -semigroups”, *Mathematical Notes*, **111:2** (2022), 305–307. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm13292>
15. P. S. Prudnikov, “Speed of convergence of Chernoff approximations for two model examples: heat equation and transport equation”, 2020. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2012.09615>

16. Yu. N. Orlov, V. Zh. Sakbaev, O. G. Smolyanov, “Rate of convergence of Feynman approximations of semigroups generated by the oscillator Hamiltonian”, *Theoretical and Mathematical Physics*, **172**:1 (2012), 987–1000 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6936>
17. I. D. Remizov, “Approximations to the solution of Cauchy problem for a linear evolution equation via the space shift operator (second-order equation example)”, *Applied Mathematics and Computation*, **328** (2018), 243-246. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.01.057>

Submitted 17.08.2023; Revised 08.10.2023; Accepted 24.11.2023

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.