

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.25.202303.174-186

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.958:536.2

## Взаимодействие разреженного слоя частиц с плоскостью постоянного нагрева в присутствии поперечного градиента температуры

А. О. Сыромясов, Ю. П. Еделева

*Национальный исследовательский Мордовский государственный университет  
(г. Саранск, Российская Федерация)*

**Аннотация.** При математическом моделировании поведения дисперсных сред в различных сосудах или трубах может потребоваться найти искажение, вносимое частицами взвеси в распределение температуры внутри емкости. Необходимым этапом такого расчета служит определение температурного поля, возникающего при расположении дисперсных частиц рядом с плоской стенкой сосуда; при этом предполагается, что несущая среда неподвижна, а инородные частицы для простоты считаются шарообразными. Авторы статьи при решении указанной задачи заменяют плоскость фиктивной частицей, зеркально расположенной относительно заданной. Это позволяет далее использовать метод мультипольного разложения для представления температуры, которая в данном случае является гармонической функцией координат. Найденное решение используется для нахождения эффективной теплопроводности слоя частиц, помещенных в полупространство, ограниченное плоскостью постоянной температуры. Для этого полученное решение осредняется по всем возможным положениям частиц внутри бесконечно протяженного объема ограниченной толщины, а результат сравнивается с решением эталонной задачи о распределении температуры в полупространстве, содержащем однородный слой иной теплопроводности. Вычисления проведены в предположении, что взвешенные в среде сферы расположены достаточно редко и потому взаимодействуют только с плоскостью, но не друг с другом. Найдено поправочное слагаемое, которое следует ввести в формулу эффективной теплопроводности в случае, когда общая протяженность среды в направлении, перпендикулярном плоскости, конечна.

**Ключевые слова:** термодинамическое взаимодействие, фиктивная частица, мультипольное разложение, тензорные коэффициенты, эффективная теплопроводность

**Для цитирования:** Сыромясов А. О., Еделева Ю. П. Взаимодействие разреженного слоя частиц с плоскостью постоянного нагрева в присутствии поперечного градиента температуры // Журнал Средневожского математического общества. 2023. Т. 25, № 3. С. 174–186. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202303.174-186>

*Об авторах:*

**Сыромясов Алексей Олегович**, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Национальный исследовательский Мордовский государственный университет (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6520-0204>, [syall@yandex.ru](mailto:syall@yandex.ru)

© А. О. Сыромясов, Ю. П. Еделева



**Еделева Юлия Павловна**, магистрант факультета математики и информационных технологий, Национальный исследовательский Мордовский государственный университет (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68/1), ORCID: <http://orcid.org/0009-0008-5275-1435>, [edelewa.yulia@yandex.ru](mailto:edelewa.yulia@yandex.ru)

*Original article*

MSC2020 35J25, 35Q79, 80A19, 80M35

## Interaction of a Sparce Particle Stratum with a Constantly Heated Plane in Presence of a Transverse Temperature Gradient

A. O. Syromyasov, Yu. P. Edeleva

*National Research Mordovia State University (Saransk, Russian Federation)*

**Abstract.** While modelling dispersions in containers or tubes it may be necessary to find distortions brought by the suspended particles in the temperature distribution in a vessel. Essential step of such a calculation is to determine of temperature field emerging when the particles are placed near the plane wall of the vessel. For simplicity one may suppose additionally that the carrying medium is stationary and that the particles are spherical. Solving this problem, the authors replace the plane by a fictitious particle that is mirror-positioned with respect to a given one. This allows to use multipole expansion for representation of the temperature that is a harmonic function in the case discussed. The obtained solution is used to find effective heat conduction coefficient of particles' stratum placed in a half-space bounded by a plane with constant temperature. To do this, the authors average the temperature in the medium by the particles' positions and compare the result with the solution of reference problem about temperature distribution in a half-space with a uniform stratum of other thermal conductance. The calculation is provided under the assumption that suspended spheres are placed rarely and therefore interact only with the plane but not with each other. A correction term is obtained that must be included in the expression for heat conduction coefficient if the total medium longitude in the direction orthogonal to the plane is finite.

**Keywords:** thermodynamic interaction, fictitious particle, multipole expansion, tensor coefficients, effective heat conduction coefficient

**For citation:** A. O. Syromyasov, Yu. P. Edeleva. Interaction of a Sparce Particle Stratum with a Constantly Heated Plane in Presence of a Transverse Temperature Gradient. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 25:3(2023), 174–186. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202303.174-186>

*About the authors:*

**Alexey O. Syromyasov**, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Ph.D. (Phys.-Math.), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6520-0204>, [syall1@yandex.ru](mailto:syall1@yandex.ru)

**Yuliya P. Edeleva**, Master Student of the Faculty of Mathematics and Information Technologies, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-5275-1435>, [edelewa.yulia@yandex.ru](mailto:edelewa.yulia@yandex.ru)

## 1. Введение

Мелкие частицы примесей, диспергированные в веществах и имеющие свойства, отличные от свойств несущей среды, изменяют поведение этих веществ и тем самым оказывают влияние на процессы, в которые эти вещества вовлечены. Так, присутствие тел иной теплопроводности искажает распределение температуры в среде. Дж. К. Максвеллом была установлена аналогия между распространением тепла и электрического поля, а также найдено эффективное удельное сопротивление среды с не взаимодействующими включениями [1]. Этот результат стал отправной точкой для более подробных исследований, учитывающих специфику расположения и взаимного влияния частиц. Например, в [2] вычислена эффективная теплопроводность среды с шарообразными включениями, образующими кубическую решетку.

Чтобы уточнить модели процессов в сосудах или трубах, целесообразно изучать распределение температуры в дисперсной среде вблизи некоторой поверхности (стенки сосуда или трубы), тепловое поле на которой задано. В перспективе это должно стать одним из этапов при моделировании течений суспензий с переменными свойствами. Так, в [3] изучается движение жидкости, вязкость которой зависит от температуры, в канале с неравномерно нагретыми стенками, но наличие взвеси в ней не учитывается. Напротив, в [4] обсуждается гидродинамическое взаимодействие дисперсных частиц в такой жидкости, но не учтено влияние границ сосуда.

Трудность состоит в том, что размеры поверхности много больше размеров дисперсных частиц. Поэтому прямое численное моделирование пристенных облаков взвеси требует существенного измельчения расчетной сетки и ведет к росту вычислительных затрат. Выходом служит решение задачи о термодинамическом взаимодействии одной или нескольких частиц с плоскостью и дальнейшее его осреднение по объему облака.

Известно несколько подходов к аналитическому описанию систем вида “несущая среда + инородные частицы вблизи плоскости”. Так, в [5] распределение потенциала в среде с такой геометрией вычисляется непосредственно – переходом в цилиндрическую систему координат. В работах [6–7] для решения сходных задач применяется метод отражений, изложенный также в [8]. Статья [9] рассматривает плоскость как предельный случай сферы большого радиуса, а задачу о двух сферах предлагается решать переходом в бисферическую систему координат.

Перечисленные методы имеют недостатки. Переход к криволинейным координатам не позволяет исследовать систему из нескольких частиц, взаимодействующих друг с другом. Метод отражений решает эту проблему, но приводит к весьма громоздким выражениям. Следовательно, возникает необходимость в методе, не “привязанном” к криволинейным системам координат и позволяющим сравнительно просто моделировать термодинамическое взаимодействие частиц и плоскости. С этой целью предлагается использовать подход, описанный в [10] применительно к движению сферы вблизи плоскости в вязкой жидкости. В нем плоскость заменяется фиктивной частицей, зеркально расположенной относительно исходной, а суммарные возмущения, вносимые в искомую величину обеими сферами, удовлетворяют граничные условия на плоскости<sup>1</sup>.

Настоящая статья организована следующим образом. Раздел 2 содержит постановку и решение задачи об одиночной сфере вблизи плоскости. В рассмотрение вводится упомянутая ранее фиктивная частица, после чего используется мультипольное разло-

<sup>1</sup>Подобный подход, используемый, например, для построения функций Грина уравнения Лапласа [11], также называется методом отражений, что в сравнении с изложенным в работе [8] создает терминологическую путаницу.

жение температуры. В разделе 3 ставится задача об эффективной теплопроводности слоя инородных сфер и моделируется прохождение постоянного градиента температуры через полупространство, содержащее однородный слой иной теплопроводности. Путем сравнения с этим эталонным результатом в разделе 4 вычисляется эффективная теплопроводность слоя частиц, расположенных над плоскостью постоянной температуры; при этом решение задачи раздела 2 осредняется по положениям центров взвешенных частиц внутри слоя. Наконец, в разделе 5 обсуждается, какое влияние на значение эффективной теплопроводности слоя оказывают конечные размеры области, заполненной дисперсной средой.

## 2. Распределение температуры в полупространстве с инородным сферическим включением

Пусть в пространстве введена декартова прямоугольная система координат  $Ox_1x_2x_3$  с началом  $O$  и вектор  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  задает положение произвольной точки относительно  $O$ . Предположим, что полупространство  $x_3 > 0$  заполнено неподвижной сплошной средой с теплопроводностью  $\kappa_f$  и температурой  $T_f = T_f(\vec{x})$ , а ограничивающая его координатная плоскость  $W = Ox_1x_2$  поддерживается при постоянной температуре  $T_W$ :

$$T_f \Big|_{x_3=0} = T_W. \quad (2.1)$$

Далее, пусть в точке  $\vec{r} = (0, 0, h)$  располагается центр сферического включения  $\Omega$  с радиусом  $a < h$  и теплопроводностью  $\kappa_p \neq \kappa_f$ . Вдали от  $W$  градиент температуры постоянен и перпендикулярен плоскости:

$$\begin{aligned} T_f(\vec{x}) &\rightarrow T_\infty(\vec{x}), \\ T_\infty &= T_W + T_3x_3, \quad T_3 = \text{const}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Таким образом,  $T_\infty$  – это температура сплошной среды в отсутствие включения (Рис. 2.1).

Описанная система моделирует вещество в сосуде (трубе, цистерне), противоположные стенки которого, удаленные на значительное расстояние  $L$  друг от друга, нагреты по-разному; это различие и приводит к возникновению среднего градиента температуры, равного  $T_3$ . Предположим, что вещество содержит слой дисперсных частиц, находящихся на расстоянии порядка  $h$  от одной из стенок; тогда если  $h \ll L$ , вторую стенку в некотором приближении можно считать бесконечно удаленной.

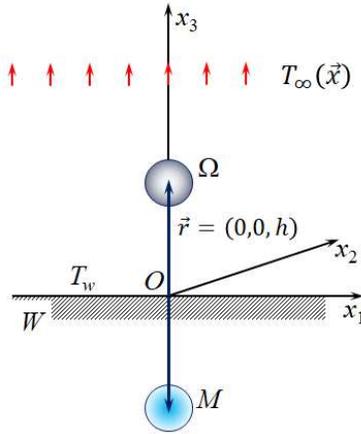
Присутствие частицы с иными свойствами приводит к искажению изотерм, которые изначально являлись плоскостями, параллельными  $W$ . Поэтому  $T_f$  есть неизвестная заранее функция, удовлетворяющая граничным условиям (2.1)–(2.2) и, в силу их стационарности, уравнению

$$\Delta_x T_f = 0, \quad \vec{x} \notin \Omega. \quad (2.3)$$

Здесь и далее  $\Delta_x$  есть оператор Лапласа, вычисленный по координатам  $\vec{x}$ .

Распределение температуры  $T_p$  внутри включения также неизвестно и должно быть найдено из уравнения

$$\Delta_y T_p = 0, \quad \vec{y} \in \Omega, \quad (2.4)$$



**Рис. 2.1.** Взаимодействие сферической частицы с плоскостью и введение зеркальной частицы

**Fig 2.1.** Interaction of a spherical particle with a plane and introduction of mirror particle

где  $\vec{y} = \vec{x} - \vec{r}$ . Граничным условием на  $T_p$  служит непрерывность температуры и теплового потока на границе сферы  $\partial\Omega$ :

$$T_f = T_p, \quad \kappa_f \frac{\partial T_f}{\partial n} = \kappa_p \frac{\partial T_p}{\partial n}, \quad |\vec{x} - \vec{r}| = a, \tag{2.5}$$

производная берется по направлению внешней нормали  $\vec{n}$  к поверхности.

Наконец, внутри включения температура должна принимать конечные значения:

$$|T_p(\vec{y})| < +\infty, \quad \forall \vec{y} \in \Omega. \tag{2.6}$$

Первая из задач настоящего исследования заключается в том, чтобы найти функции  $T_f(\vec{x})$  и  $T_p(\vec{y})$ , удовлетворяющие уравнениям (2.3)–(2.4) и дополнительным условиям (2.1)–(2.2), (2.5)–(2.6).

Проблема заключается в том, что поверхности  $W$  и  $\partial\Omega$  имеют разную геометрию. С другой стороны, подход к моделированию термодинамического взаимодействия двух сферических частиц в безграничной среде известен [12]: вне сфер температура записывается в виде линейной комбинации мультиполей вида

$$L_0(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|}, \quad L_{i_1 \dots i_n} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} \left( \frac{1}{|\vec{x}|} \right), \tag{2.7}$$

а внутри – в виде комбинации выражений того же вида, умноженных на  $|\vec{x}|^{2n+1}$ . Поэтому заменим  $W$  фиктивной сферой  $M$ , зеркально расположенной относительно  $\Omega$  (Рис. 2.1). Тогда полученная конфигурация частиц, “наложенная” на граничные условия (2.1)–(2.2), (2.5), будет иметь группу симметрии  $\infty \cdot m$  в обозначениях А. В. Шубникова:  $Ox_3$  есть поворотная ось бесконечного порядка, через которую проходят плоскости зеркальной симметрии  $Ox_1x_3$  и  $Ox_2x_3$ . Следовательно, искомые функции представимы в виде суммы “фона”  $T_\infty$  и возмущений  $T'$ , индуцированных частицами, таким

образом:

$$\begin{aligned}
 T_f &= T_\infty(\vec{x}) + T'(\vec{x}, \vec{r}); \\
 T' &= T_3 \left[ HA^{\text{ext}}(\Omega)L_3(\vec{x} - \vec{r}) + FA^{\text{ext}}(\Omega)L_{33}(\vec{x} - \vec{r}) + \right. \\
 &\quad + GA^{\text{ext}}(\Omega)L_{333}(\vec{x} - \vec{r}) + \dots + HA^{\text{ext}}(M)L_3(\vec{x} + \vec{r}) + \\
 &\quad \left. + FA^{\text{ext}}(M)L_{33}(\vec{x} + \vec{r}) + GA^{\text{ext}}(M)L_{333}(\vec{x} + \vec{r}) + \dots \right].
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Для поля внутри частицы аналогичное представление следующее:

$$\begin{aligned}
 T_p &= T_\infty(\vec{r}) + T_3 \left[ AA^{\text{int}}(\Omega)L_0(\vec{y})|\vec{y}| + HA^{\text{int}}(\Omega)L_3(\vec{y})|\vec{y}|^3 + \right. \\
 &\quad \left. + FA^{\text{int}}(\Omega)L_{33}(\vec{y})|\vec{y}|^5 + GA^{\text{int}}(\Omega)L_{333}(\vec{y})|\vec{y}|^7 + \dots \right].
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Коэффициенты  $AA$ ,  $HA$ , ... постоянны и соответствуют возмущениям, вносимым реальной ( $\Omega$ ) и зеркальной ( $M$ ) частицами; индексы “ext” и “int” указывают на разложение температуры вне и внутри  $\Omega$ .

В силу определения (2.7) записанная таким образом  $T_f$  удовлетворяет (2.3) и (2.2), а  $T_p$  – (2.4) и (2.6). Нетрудно убедиться, что четность мультиполей  $L_{3\dots 3}(\vec{x})$  как функций координаты  $x_3$  совпадает с четностью количества их индексов. Поэтому, положив

$$HA^{\text{ext}}(M) = HA^{\text{ext}}(\Omega), FA^{\text{ext}}(M) = -FA^{\text{ext}}(\Omega), GA^{\text{ext}}(M) = GA^{\text{ext}}(\Omega), \dots \tag{2.10}$$

мы удовлетворим условию (2.1) глобально – на всей плоскости  $x_3 = 0$ .

Далее обозначение “( $\Omega$ )” у коэффициентов будем опускать.

Остается найти  $HA^{\text{ext}}$ ,  $FA^{\text{ext}}$ , ... и  $AA^{\text{int}}$ ,  $HA^{\text{int}}$ ,  $FA^{\text{int}}$ , ... Для этого подставим выражения (2.8), (2.9) и (2.10) в (2.5), разложим мультиполи в ряд Тейлора в окрестности  $\vec{x} = \vec{r}$  и будем искать неизвестные коэффициенты в виде асимптотического разложения по степеням  $\varepsilon = a/h < 1$ . В итоге с точностью до  $\varepsilon^5$  получим:

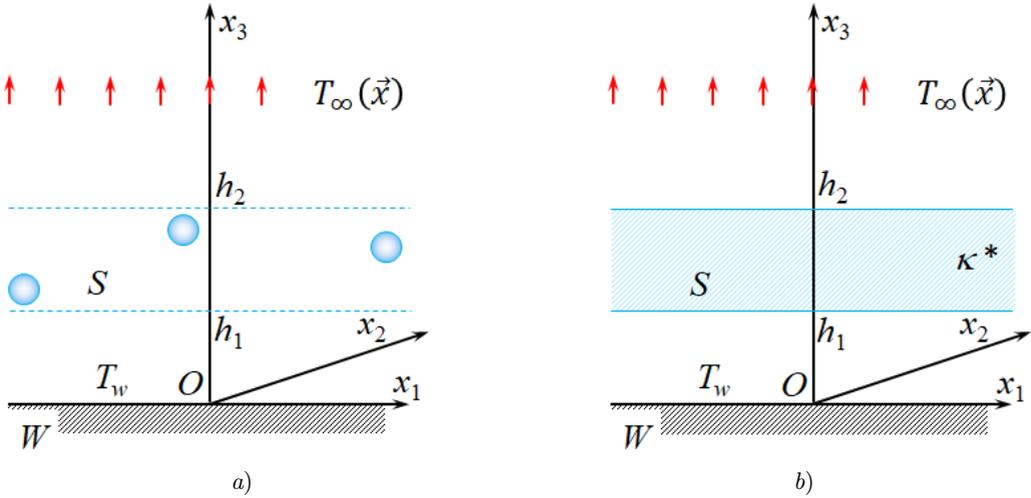
$$\begin{aligned}
 HA^{\text{ext}} &= a^3 \left[ \frac{\kappa_p - \kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} + \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{\kappa_p - \kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} \right)^2 \varepsilon^3 \right], \\
 FA^{\text{ext}} &= \frac{3a^4(\kappa_p - \kappa_f)^2 \varepsilon^4}{16(\kappa_p + 2\kappa_f)(2\kappa_p + 3\kappa_f)}, GA^{\text{ext}} = \frac{a^5(\kappa_p - \kappa_f)^2 \varepsilon^5}{16(\kappa_p + 2\kappa_f)(3\kappa_p + 4\kappa_f)}, \\
 AA^{\text{int}} &= a \left[ -\frac{1}{4} \cdot \frac{\kappa_p - \kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} \varepsilon^2 - \frac{1}{16} \left( \frac{\kappa_p - \kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} \right)^2 \varepsilon^5 \right], \\
 HA^{\text{int}} &= -\frac{3\kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} - \frac{3\kappa_f(\kappa_p - \kappa_f)\varepsilon^3}{(\kappa_p + 2\kappa_f)^2}, \\
 FA^{\text{int}} &= -\frac{15\kappa_f(\kappa_p - \kappa_f)\varepsilon^4}{32a(\kappa_p + 2\kappa_f)(2\kappa_p + 3\kappa_f)}, GA^{\text{int}} = -\frac{7\kappa_f(\kappa_p - \kappa_f)\varepsilon^5}{48a^2(\kappa_p + 2\kappa_f)(3\kappa_p + 4\kappa_f)}.
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Отметим, что решение может быть найдено и с более высокой точностью по  $\varepsilon$ ; для этого следует включить в (2.8)–(2.9) мультиполи более высоких порядков. При  $\varepsilon \rightarrow 0$ , т. е. при бесконечном удалении плоскости от частицы, оно переходит в известное выражение для одиночной сферы [13].

Итак, формулы (2.8)–(2.11) описывают решение искомое распределение температуры в системе “сферическое включение в полупространстве”.

### 3. Задача об эффективной теплопроводности слоя

Рассмотрим теперь не одну, а бесконечно много однотипных частиц, случайным образом расположенных в слое  $S = \{\vec{x} | h_1 \leq x_3 \leq h_2\}$ , проходящем параллельно плоскости  $W$  (рис. 3.1, а). Их распределение внутри слоя будем считать равномерным. Тогда в среднем все эти частицы, вместе взятые, оказывают на поле температуры такое же влияние, как если бы  $S$  был заполнен однородной средой с теплопроводностью  $\kappa^* \neq \kappa_f$ , которую логично назвать *эффективной* (рис. 3.1, б). Возникает вопрос, как оценить это влияние и найти указанную величину.



**Рис. 3.1.** Поперечный градиент температуры в полубесконечных средах с включениями: а) среда с разреженным слоем частиц, б) среда с включенным в нее однородным слоем

**Fig 3.1.** Transverse temperature gradient in semi-infinite media with inclusions а) a medium with sparse particle stratum, б) a medium with immersed uniform stratum

Решим сначала модельную задачу о температуре  $T_f$  в полупространстве  $x_3 > 0$ , содержащем сплошной слой теплопроводности  $\kappa^*$ .

Плоскости  $x_3 = h_1$  и  $x_3 = h_2$  разбивают полупространство на три области  $V_1 = \{\vec{x} | x_3 < h_1\}$ ,  $V_2 = S$  и  $V_3 = \{\vec{x} | x_3 > h_2\}$ , распределение температуры в которых будет различным. Обозначим через  $T_f = T^{(k)}$  температуру внутри  $V_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Для каждой из этих функций должно быть выполнено уравнение Лапласа:

$$\Delta_x T^{(1)} = 0, \vec{x} \in V_1; \quad \Delta_x T^{(2)} = 0, \vec{x} \in V_2; \quad \Delta_x T^{(3)} = 0, \vec{x} \in V_3. \tag{3.1}$$

По-прежнему будем считать, что плоскость  $W$  нагрета до температуры  $T_W$ , т. е. выполнено (2.1). Условие (2.2) заменим на более слабое:

$$\nabla T_f \rightarrow (0, 0, T_3), x_3 \rightarrow \infty. \tag{3.2}$$

Наконец, на границах  $S$  должны быть выполнены условия, аналогичные (2.5):

$$\begin{aligned} T^{(1)} &= T^{(2)}, \quad \kappa_f \frac{\partial T^{(1)}}{\partial n} = \kappa^* \frac{\partial T^{(2)}}{\partial n}, \quad x_3 = h_1, \\ T^{(2)} &= T^{(3)}, \quad \kappa^* \frac{\partial T^{(2)}}{\partial n} = \kappa_f \frac{\partial T^{(3)}}{\partial n}, \quad x_3 = h_2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Очевидно, что в обсуждаемом случае температура зависит только от  $x_3$ . Используя (3.1)–(3.3), легко получить, что

$$\begin{aligned} T^{(k)} &= m^{(k)} x_3 + b^{(k)}, \quad k = 1, 2, 3, \\ m^{(1)} &= T_3, \quad b^{(1)} = T_W, \\ m^{(2)} &= T_3 \frac{\kappa_f}{\kappa^*}, \quad b^{(2)} = T_W - T_3 h_1 \frac{\kappa_f - \kappa^*}{\kappa^*}, \\ m^{(3)} &= T_3, \quad b^{(3)} = T_W + T_3 (h_2 - h_1) \frac{\kappa_f - \kappa^*}{\kappa^*}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Эти равенства представляют собой решение прямой задачи: вычисление температуры по заданным свойствам веществ и граничным условиям. Однако они помогают решить и обратную задачу по определению  $\kappa^*$ . Действительно, угловой коэффициент

$$m^{(2)} = \frac{T_f(h_2) - T_f(h_1)}{h_2 - h_1}, \quad (3.5)$$

поэтому если температуры  $T_f(h_1)$  и  $T_f(h_2)$  на границах слоя  $S$  известны, то из (3.4) можно вычислить

$$\kappa^* = \kappa_f \frac{T_3(h_2 - h_1)}{T_f(h_2) - T_f(h_1)}. \quad (3.6)$$

Ниже полученное выражение будет использовано для вычисления эффективной теплопроводности слоя частиц.

#### 4. Эффективная теплопроводность слоя сферических частиц, взаимодействующих с плоскостью

Проведем расчеты, предполагая, что слой  $S$  является разреженным: расстояние от инородных сфер до плоскости много меньше, чем дистанция между ближайшими друг к другу частицами, а значит, они взаимодействуют лишь с плоскостью, но не друг с другом. Тогда возмущение, вносимое каждой из них, описывается равенствами (2.8)–(2.10), (2.11) с поправкой на то, что вектор  $\vec{r}$  в общем случае имеет отличные от нуля горизонтальные компоненты:

$$\vec{r} = \vec{r}_{2D} + \vec{h}, \quad \vec{r}_{2D} = (r_1, r_2, 0), \quad \vec{h} = (0, 0, h). \quad (4.1)$$

В качестве  $T_f$  в формуле (3.6) будем рассматривать значение этой функции, осредненное по всем возможным  $\vec{r}$ .

Введем  $n$  – числовую плотность частиц внутри  $S$ , тогда их объемная доля в слое есть  $\phi = n|\Omega|$ , где  $|\Omega| = 4\pi a^3/3$  есть объем одного включения. Итогом вычислений должна стать зависимость  $\kappa^*(\phi)$ .

Учтем, что центры частиц расположены в слое  $S' = \{\vec{x} | h_1 + a \leq x_3 \leq h_2 - a\}$ . Это значит, что плотность  $n_C$  центров частиц внутри этой более узкой полосы равна

$$n_C = n \frac{h_2 - h_1}{h_2 - h_1 - 2a}. \quad (4.2)$$

Поскольку  $T_\infty$  в (2.8) не зависит от  $\vec{r}$ , осреднению подлежит лишь возмущение, вносимое сферами. Обозначим его результат через  $T'_\Sigma$ :

$$T'_\Sigma = \int_{S'} T'(\vec{x}, \vec{r}) n_C dr_1 dr_2 dh. \quad (4.3)$$

Представим вектор  $\vec{x}$  в виде, аналогичном (4.1):

$$\vec{x} = \vec{x}_{2D} + \vec{x}_3, \quad \vec{x}_{2D} = (x_1, x_2, 0), \quad \vec{x}_3 = (0, 0, x_3),$$

а затем воспользуемся этими представлениями, объединяя их с (2.8), (2.10) и (4.3). Учтем, что величины  $HA^{\text{ext}}, FA^{\text{ext}}, \dots$  зависят от  $\varepsilon$ , а значит, и от  $h$ :

$$\begin{aligned} T'_\Sigma = n_C T_3 \int_{h_1+a}^{h_2-a} dh \iint_{-\infty}^{\infty} \left\{ HA^{\text{ext}}(h) \left[ L_3(\vec{x}_{2D} + \vec{x}_3 - \vec{r}_{2D} - \vec{h}) + \right. \right. \\ \left. \left. + L_3(\vec{x}_{2D} + \vec{x}_3 - \vec{r}_{2D} + \vec{h}) \right] + FA^{\text{ext}}(h) \left[ L_{33}(\vec{x}_{2D} + \vec{x}_3 - \vec{r}_{2D} - \vec{h}) - \right. \right. \\ \left. \left. - L_{33}(\vec{x}_{2D} + \vec{x}_3 - \vec{r}_{2D} + \vec{h}) \right] + \dots \right\} dr_1 dr_2. \end{aligned}$$

В этом равенстве принято во внимание, что при  $\vec{r}_{2D} \neq \vec{0}$  зеркальному отражению относительно  $W$  подлежит лишь вертикальная компонента вектора  $\vec{r}$ , т. е.  $\vec{h}$ .

Нетрудно убедиться в следующих свойствах последнего выражения. Во-первых, фигурирующие в нем двойные несобственные интегралы сходятся абсолютно, ибо мультиполи  $L_{3\dots 3}(\vec{x}_{2D} + \vec{x}_3 - \vec{r}_{2D} - \vec{h})$  при  $|\vec{r}_{2D}| \rightarrow \infty$  имеют порядок малости  $|\vec{r}_{2D}|^{-3}$  или выше. Во-вторых, значение  $\vec{x}_{2D}$  не влияет на  $T'_\Sigma$ , т. к. интегрирование по  $r_1$  и  $r_2$  производится по всей плоскости  $\mathbb{R}_2$ . Поэтому положим  $\vec{x}_{2D} = \vec{0}$  и будем далее писать  $T'_\Sigma = T'_\Sigma(x_3)$ .

Нахождение  $T'_\Sigma$  сведется к вычислению значения выражений вида

$$\iint_{-\infty}^{\infty} L_{3\dots 3}(\vec{r}_{2D} + \vec{z}) dr_1 dr_2,$$

где вектор  $\vec{z} = \vec{x}_3 \pm \vec{h}$  перпендикулярен  $\vec{r}_{2D}$ ; обозначим также  $z = x_3 \pm h$ . Непосредственная проверка показывает, что

$$\iint_{-\infty}^{\infty} L_3(\vec{r}_{2D} + \vec{z}) dr_1 dr_2 = \begin{cases} -2\pi, & z > 0, \\ 2\pi, & z < 0, \end{cases}$$

остальные интегралы такого типа равны нулю независимо от  $\vec{z}$ .

При  $x_3 > 0$  величина  $x_3 + h$  всегда положительна. Т. к.  $h \in [h_1 + a, h_2 - a]$ , то  $x_3 - h < 0$  при  $x_3 = h_1$ . Исходя из вышесказанного, это значит, что  $T'_\Sigma(h_1) = 0$ . Аналогично,  $h_2 - h > 0$ , поэтому  $T'_\Sigma(h_2) = I_H$ , где

$$I_H = -4\pi n_C T_3 \int_{h_1+a}^{h_2-a} HA^{\text{ext}}(h) dh.$$

Используя теперь (2.11), (4.2) и заменяя  $\varepsilon$  на  $a/h$ , получим

$$\begin{aligned} I_H &= -3\phi T_3(h_2 - h_1) \frac{\kappa_p - \kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} (1 + \chi), \\ \chi &= \frac{\kappa_p - \kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} \cdot \frac{a^3(h_1 + h_2)}{8(h_1 + a)^2(h_2 - a)^2}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Окончательно, подставив в (3.6) выражения

$$T_f(h_1) = T_\infty(h_1), \quad T_f(h_2) = T_\infty(h_2) + I_H, \tag{4.5}$$

где  $I_H$  определена равенством (4.4), найдем

$$\kappa^*(\phi) = \kappa_f \cdot \frac{\kappa_p + 2\kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f - 3(1 + \chi)(\kappa_p - \kappa_f)\phi} \approx \kappa_f \left[ 1 + 3 \frac{\kappa_p - \kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} (1 + \chi)\phi \right]. \tag{4.6}$$

Последнее приближение справедливо при  $\phi \rightarrow 0$ . Это и есть искомое выражение для эффективной теплопроводности слоя. Отметим, что фигурирующий в этой формуле параметр  $\chi$  зависит не только от физических свойств взвешенных в среде частиц, но и от их размеров, а также от положения слоя  $S$  относительно плоскости  $W$ .

Сравним этот результат с классическим выражением Максвелла. Согласно [1], эффективная теплопроводность безграничной среды с редко расположенными ( $\phi \ll 1$ ) сферическими включениями равна

$$\kappa^*(\phi) = \kappa_f \cdot \frac{\kappa_p + 2\kappa_f + 2(\kappa_p - \kappa_f)\phi}{\kappa_p + 2\kappa_f - (\kappa_p - \kappa_f)\phi} \approx \kappa_f \left( 1 + 3 \frac{\kappa_p - \kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} \phi \right).$$

Выполним предельный переход в (4.6). Предположим, что слой инородных частиц заполняет все полупространство:  $h_1 \rightarrow 0$ ,  $h_2 \rightarrow \infty$ ; в этом случае  $\chi \rightarrow 0$ , а  $\kappa^*(\phi)$  переходит в приведенную выше приближенную формулу Максвелла. Таким образом, проверка предельным переходом успешно выполнена.

## 5. Влияние конечных размеров области на значение эффективной теплопроводности

Предположим теперь, что сплошная среда занимает не все полупространство  $x_3 > 0$ , а область  $x_3 \in (0; L)$ . На его нижней границе, вблизи которой расположены частицы, сохраним условие (2.1), а ограничение (2.2) заменим на

$$T_f = T_W + T_3 L, \quad x_3 = L. \tag{5.1}$$

Иными словами, теперь  $T_3$  является средним градиентом температуры.

Задача (3.1), (2.1), (3.3), (5.1) имеет решение, переходящее в (3.4) при  $L \rightarrow \infty$ . В частности,

$$m^{(2)} = \frac{\kappa_f T_3 L}{L\kappa^* + (h_2 - h_1)(\kappa_f - \kappa^*)},$$

откуда

$$\kappa^* = \kappa_f \cdot \frac{T_3 L - m^{(2)}(h_2 - h_1)}{m^{(2)}L - m^{(2)}(h_2 - h_1)}.$$

Вновь используя выражения (3.5), (4.5), считая  $\phi$  малым, а  $L$  – большим, найдем

$$\kappa^*(\phi) \approx \kappa_f \left[ 1 + 3 \frac{\kappa_p - \kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} (1 + \chi) \phi \left( 1 + \frac{h_2 - h_1}{L} \right) \right].$$

От (4.6) эта формула отличается поправочным слагаемым  $(h_2 - h_1)/L$ . Новое приближение действительно, если  $(h_2 - h_1)/L$  есть малая величина более низкого порядка, чем  $\phi$ . В противном случае корректив, вносимая в (4.6), приобретает порядок  $\phi^2$ , что требует дополнительного учета взаимодействия частиц в слое друг с другом.

## 6. Заключение

Итак, в статье найдено распределение температуры в полупространстве, заполненном однородной сплошной средой и содержащей одиночное сферическое включение. Для этого адаптирован метод мультипольного разложения, позволяющий моделировать взаимодействие произвольного количества частиц. Полученное решение было использовано для расчета эффективной теплопроводности дисперсного слоя, расположенного параллельно плоскости, ограничивающей полупространство. Оказалось, что найденная величина не просто является характеристикой некоего “эффективного” материала, но и зависит от геометрических параметров слоя. В предельном случае вычисленная теплопроводность переходит в известную формулу Максвелла. Рассмотрено также влияние, оказываемое на теплопроводность слоя конечными размерами сосуда, содержащего среду.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Максвелл Дж. К. Трактат об электричестве и магнетизме: в 2-х т. М. : Наука, 1989. Т. I. 416 с.
2. Бердичевский А. Л. Об эффективной теплопроводности сред с периодически расположенными включениями // Доклады АН СССР. 1979. Т. 247, N 6. С. 1363–1367.
3. Thakur R., Sharma A., Govindarajan R. Early evolution of optimal perturbations in a viscosity-stratified channel // Journal of Fluid Mechanics. 2021. Vol. 914. DOI: <https://doi.org/10.1017/jfm.2020.1160>
4. Ziegler S., Smith A.-S. Hydrodynamic particle interactions in linear and radial viscosity gradients // Journal of Fluid Mechanics. 2022. Vol. 943. DOI: <https://doi.org/10.1017/jfm.2022.421>
5. Stillinger F. H., Jr. Interfacial solutions of the Poisson – Boltzmann equation // Journal of Chemical Physics. 1961. Vol. 35, N 5. pp. 1584–1589. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1732113>
6. Hao Y., Haber S. Electrophoretic motion of a charged spherical particle normal to a planar dielectric wall // International Journal of Multiphase Flow. 1998. Vol. 24, N 5. pp. 793–824.

7. Сенницкий В. Л. О силовом взаимодействии шара и вязкой жидкости в присутствии стенки // Прикладная математика и техническая физика, 2000. Т. 41, N 1. С. 57–62. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02465236>
8. Хашпель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М. : Мир, 1976. 632 с.
9. Liu H., Bau H. H. The dielectrophoresis of cylindrical and spherical particles submerged in shells and in semi-infinite media // *Physics of Fluids*. 2004. Vol. 16, № 5. pp. 1217–1228. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1649237>
10. Баранов В. Е., Мартынов С. И. Моделирование динамики частиц в вязкой жидкости при наличии плоской стенки // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. Т. 50, N 9. С. 1669–1686.
11. Владимиров В. С., Жаринов В. В. Уравнения математической физики – 2-е изд., стереотип. М. : Физматлит, 2004. 400 с.
12. Сыромясов А. О. Термодинамическое взаимодействие сферических частиц в среде с постоянным градиентом температуры // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2011. Т 4, №. 3. С. 1158–1160.
13. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 736 с.

*Поступила 26.05.2023; доработана после рецензирования 30.07.2023;  
принята к публикации 25.08.2023*

*Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.*

## REFERENCES

1. J. C. Maxwell, *A treatise on electricity and magnetism*, **1**, Clarendon Press, Oxford, 1873.
2. A. L. Berdichevsky, “On the efficient heat conduction of media with periodically located inclusions”, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, **247**:6 (1979), 1363–1367 (In Russ.).
3. R. Thakur, A. Sharma, R. Govindarajan, “Early evolution of optimal perturbations in a viscosity-stratified channel”, *Journal of Fluid Mechanics*, **914** (2021). DOI: <https://doi.org/10.1017/jfm.2020.1160>
4. S. Ziegler, A.-S. Smith, “Hydrodynamic particle interactions in linear and radial viscosity gradients”, *Journal of Fluid Mechanics*, **943** (2022). DOI: <https://doi.org/10.1017/jfm.2022.421>
5. F. H. Stillinger Jr., “Interfacial solutions of the Poisson – Boltzmann equation”, *Journal of Chemical Physics*, **35**:5 (1961), 1584–1589. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1732113>

6. Y. Hao, S. Haber, “Electrophoretic motion of a charged spherical particle normal to a planar dielectric wall”, *International Journal of Multiphase Flow*, **24**:5 (1998), 793–824. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0301-9322\(97\)00090-6](https://doi.org/10.1016/S0301-9322(97)00090-6)
7. V. L. Sennitskii, “Force interaction of a sphere and a viscous liquid in the presence of a wall”, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, **41**:1 (2000), 50–54. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02465236>
8. J. Happel, H. Brenner, *Low Reynolds number hydrodynamics*, Springer, Netherlands, 1983, 553 p.
9. H. Liu, H. H. Bau, “The dielectrophoresis of cylindrical and spherical particles submerged in shells and in semi-infinite media”, *Physics of Fluids*, **16**:5 (2004), 1217–1228. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1649237>
10. V. E. Baranov, S. I. Martynov, “Simulation of particle dynamics in a viscous fluid near a plane wall”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **50**:9 (2010), 1588–1604. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965542510090101>
11. V. S. Vladimirov, V. V. Zharinov, *Equations of mathematical physics*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2004 (In Russ.), 400 p.
12. A. O. Syromyasov, “Thermodynamic interaction of spherical particles in a fluid with a constant temperature gradient”, *Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod*, **4**:3 (2011), 1158–1160 (In Russ.).
13. L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Fluid mechanics*, Heinemann, Butterworth, 1987, 539 p.

*Submitted 26.05.2023; Revised 30.07.2023; Accepted 25.08.2023*

*The authors have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The authors declare no conflict of interest.