DOI 10.15507/2079-6900.25.202303.150-158
Оригинальная статья
ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 51-74:541.138

Математические модели совместного расчёта электрических и тепловых полей в электрохимических системах (в электролитах)

Ф. В. Лубышев, А. М. Болотнов, М. Э. Файрузов

ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» (г. Уфа, Российская Федерация)

Аннотация. Настоящая работа посвящена исследованию математических моделей совместного расчёта электрических и тепловых полей в электрохимических системах (в электролитах). Как известно, процесс прохождения в электролите электрического тока сопровождается выделением джоулева тепла. Следствием перераспределения температуры в электрохимической системе является изменение основных физико-химических параметров: вязкости и плотности проводящей среды, удельной электропроводности и теплопроводности, коэффициента теплоотдачи и т. д. Учет в математических моделях взаимовлияния тепловых и электрических полей особую значимость приобретает в технологиях электролиза цветных металлов (в первую очередь, промышленного производства алюминия), характеризующегося высокотемпературными режимами и интенсивностью электротепломассопереноса. Процессы электролитно-плазменного удаления покрытий, полирования деталей и плазменно-электролитического оксидирования привлекают особое внимание со стороны машиностроительной промышленности благодаря возможности качественного улучшения свойств поверхности. В статье исследуются вопросы корректности постановок нелинейных моделей. Исследован вопрос однозначной разрешимости системы, установлены априорные оценки обобщенного решения в Соболевских нормах. Также система нелинейных уравнений в частных производных, рассматриваемая в работе, может описывать математическую модель совместного расчёта электрических и тепловых полей в твердых проводниках электричества и тепла.

Ключевые слова: математическое моделирование, нелинейная система эллиптических уравнений, смешанная граничная задача, обобщенное решение, операторное уравнение, соболевские пространства, априорная оценка

Для цитирования: Лубышев Ф. В., Болотнов А. М., Файрузов М. Э. Математические модели совместного расчёта электрических и тепловых полей в электрохимических системах (в электролитах) // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 3. С. 150–158. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202303.150-158

Об авторах:

Лубышев Федор Владимирович, профессор кафедры информационных технологий и компьютерной математики, ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» (450076, Россия, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32), доктор физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3279-4293, maxam721@mail.ru

Болотнов Анатолий Миронович, профессор кафедры информационных технологий и компьютерной математики, ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» (450076, Россия, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32), доктор физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0009-0004-3309-2885, bolotnovam@mail.ru

Файрузов Махмут Эрнстович, доцент кафедры информационных технологий и компьютерной математики, ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» (450076, Россия, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9118-660X, fairuzovme@mail.ru

Original article

MSC2020 35J60

Mathematical Models of Joint Calculation of Electric and Thermal Fields in Electrochemical Systems (in Electrolytes)

F. V. Lubyshev, A. M. Bolotnov, M. E. Fairuzov

Ufa University of Science and Technology (Ufa, Russian Federation)

Abstract. This paper studies mathematical models for a joint calculation of electric and thermal fields in electrochemical systems (in electrolytes). As is known, passing of electric current through an electrolyte is accompanied by release of Joule heat. The consequence of temperature redistribution in an electrochemical system is a change in the main physical and chemical parameters: viscosity and density of the conductive medium, specific electrical and thermal conductivity, heat transfer coefficient, etc. Taking into account in mathematical models the mutual influence of thermal and electric fields is of particular importance in the technologies of electrolysis of non-ferrous metals (primarily in the industrial production of aluminum) that is accompanied by high-temperature conditions and intensive electrical heat and mass transfer. The processes of electrolytic-plasma removal of coatings, polishing of parts and plasma-electrolytic oxidation attract special attention from the machine-building industry due to the possibility of qualitative improvement of surface properties. In the article correctness of statements of nonlinear models are investigated. The question of unique solvability of the system is explored and a priori estimates of the generalized solution in the Sobolev norms are established. Also, the system of nonlinear partial derivative equations considered in the paper can describe a mathematical model for the joint calculation of electric and thermal fields in solid conductors of electricity and heat.

Keywords: mathematical modeling, nonlinear system of elliptic equations, mixed boundary value problem, generalized solution, operator equation, Sobolev spaces, a priori estimate

For citation: *F. V. Lubyshev, A. M. Bolotnov, M. E. Fairuzov.* Mathematical Models of Joint Calculation of Electric and Thermal Fields in Electrochemical Systems (in Electrolytes). *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 25:3(2023), 150–158. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202303.150-158

About the authors:

Fedor V. Lubyshev, Professor, Department of Information Technology and Computer Mathematics, «Ufa University of Science and Technology» (32 Zaki Validi St., Ufa 450076, Russia), Dr.Sci. (Phys.-Math.), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3279-4293, maxam721@mail.ru

Anatoly M. Bolotnov, Professor, Department of Information Technology and Computer Mathematics, «Ufa University of Science and Technology» (32 Zaki Validi St., Ufa 450076, Russia), Dr.Sci. (Phys.-Math.), ORCID: http://orcid.org/0009-0004-3309-2885, bolotnovam@mail.ru

Mahmut E. Fairuzov, Associate Professor, Department of Information Technology and Computer Mathematics, «Ufa University of Science and Technology» (32 Zaki Validi St., Ufa 450076, Russia), Ph. D. (Phys.-Math.), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9118-660X, fairuzovme@mail.ru

1. Введение

Вопросы проектирования промышленных установок и технологий, основанных на электролизе, и проблемы оптимизации процессов в существующих электрохимических системах связаны как с экспериментальными исследованиями, так и с разработкой адекватных математических моделей и алгоритмов расчета взаимосвязанных электрических и тепловых полей. Как известно, процесс прохождения в электролите электрического тока сопровождается выделением джоулева тепла. Следствием перераспределения температуры в электрохимической системе является изменение основных физико-химических параметров: вязкости и плотности проводящей среды, удельной электропроводности и теплопроводности, коэффициента теплоотдачи и т. д. Учет в математических моделях взаимовлияния тепловых и электрических полей особую значимость приобретает в технологиях электролиза цветных металлов, в первую очередь, промышленного производства алюминия, сопровождающегося высокими температурными режимами и интенсивностью электротепломассопереноса [1–2]. Процессы электролитно-плазменного удаления покрытий, полирования деталей и плазменно-электролитического оксидирования привлекают особое внимание со стороны машиностроительной промышленности благодаря возможности качественного улучшения свойств поверхности. Плазменно-электролитические процессы отличаются наличием микроразрядов и кипения электролита вблизи поверхностного слоя детали, что приводит к интенсивному росту оксидных покрытий с высокими защитными характеристиками на легких металлах и сплавах [3–4]. Наличие нелинейных зависимостей поляризации электродов от плотности тока вносит дополнительные сложности в алгоритмы совместного расчета электрических и тепловых полей в рассматриваемых электрохимических системах. Следует отметить, что разработка эффективных численных алгоритмов расчета совместных электрических и тепловых полей имеет не только практическую значимость, но и представляет определенный теоретический интерес.

Настоящая работа посвящена исследованию математических моделей совместного расчёта электрических и тепловых полей в электрохимических системах (в электролитах). Рассмотрены вопросы корректности постановок нелинейных моделей. Исследован вопрос однозначной разрешимости системы, установлены априорные оценки обобщенного решения в Соболевских нормах. Данная статья по своей тематике примыкает и дополняет [5]. Система нелинейных уравнений в частных производных, рассматриваемая в работе, может описывать также математическую модель совместного расчёта электрических и тепловых полей в твердых проводниках электричества и тепла.

2. Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$. Рассмотрим следующую нелинейную граничную задачу для системы уравнений с частными производными [5]. Требуется найти пару функций $(T(x), u(x))$, таких что они удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$L_1(T,u) = -\mathrm{div}(\sigma(T)\nabla u) = f(x), \qquad x \in \Omega, \tag{2.1}$$

$$L_2(T,u) = -\mathrm{div}(\lambda(T)\nabla T) = \underbrace{\sigma(T)|\mathrm{grad}\, u|^2}_{\sigma(T)(\nabla u)^2}, \qquad x \in \Omega, \tag{2.2}$$

или, в другой записи,

$$L_1(T,u) = -\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\sigma(T)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) = f(x), \qquad x \in \Omega, \tag{2.3}$$

$$L_2(T,u) = -\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x_\alpha}\right) = \sigma(T)\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^2, \quad x \in \Omega, \tag{2.4}$$

и, дополнительно, пара функций $(T(x), u(x))$ удовлетворяет смешанным граничным условиям

$$\sigma(T)\frac{\partial u}{\partial n} = \varphi(x), \qquad x \in S_1, \tag{2.5}$$

$$\sigma(T)\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha(x)u = \mu(x), \qquad x \in S_2; \tag{2.6}$$

$$T(x) = 0, \quad x \in \Gamma_1, \quad \lambda(T)\frac{\partial T}{\partial n} = g(x), \quad x \in \Gamma_2, \tag{2.7}$$

где S_1, S_2 – относительно открытые подмножества Γ, такие что

$$S_1 \cap S_2 = \emptyset, \qquad \bar{S}_1 \cup \bar{S}_2 = \Gamma = \partial\Omega;$$

а Γ_1, Γ_2 – относительно открытые подмножества Γ такие, что

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset, \qquad \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 = \Gamma = \partial\Omega,$$

здесь $\dfrac{\partial T}{\partial n}$ – производная по внешней нормали к соответствующей части границы $\Gamma = \partial\Omega$.

Предполагается, что $\sigma(\xi)$, $\lambda(\xi)$, $f(x)$, $\varphi(x)$, $\mu(x)$, $g(x)$, $\alpha(x)$ – заданные функции, причём:

$$f(x) \in L_2(\Omega), \varphi(x) \in L_2(S_1), \mu(x) \in L_2(S_2), g(x) \in L_2(\Gamma_2), \alpha(x) \in L_\infty(S_2),$$

функции $\sigma(\xi)$, $\lambda(\xi)$ считаем непрерывными на $\mathbb{R}^1$, причём такими что при всех $\xi \in \mathbb{R}^1$

$$\sigma_0 \le \sigma(\xi) \le \sigma_1, \quad \sigma_0 > 0, \qquad \lambda_0 \le \lambda(\xi) \le \lambda_1, \quad \lambda_0 > 0;$$

непрерывный коэффициент $\lambda(\xi)$ непрерывен по Липшицу, т. е.

$$|\lambda(\xi) - \lambda(\eta)| \le L|\xi - \eta|, \qquad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^1, \quad L = const > 0.$$

Кроме того, полагаем

$$\alpha_0 \le \alpha(x) \le \alpha_1, \qquad \alpha_0 > 0, \text{ п.в. на } S_2.$$

Здесь σ_0, σ_1, λ_0, λ_1, L, α_0, α_1 – заданные константы.

Таким образом, система уравнений (2.1)–(2.4) состоит из эллиптического уравнения для $T(x)$ и эллиптического уравнения для $u(x)$. Эта система описывает образование тепла в проводнике под действием электрического тока. Здесь u – электрический потенциал; T – температура внутри проводника; $\lambda(T)$ – теплопроводность материала; $\sigma(T)$ – его электропроводность.

Определение 2.1. *Пару функций $T(x)$, $u(x)$ назовём обобщенным решением задачи* (2.1)–(2.7), *если*

$$T(x) \in W_{2,0}^1(\Omega, \Gamma_1), \qquad u(x) \in W_2^1(\Omega, \tag{2.8}$$

$$f_0(x) = \sigma(T)|\mathrm{grad}\, u|^2 = \sigma(T) \sum_{\alpha=1}^{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^2 \subset L_2(\Omega), \tag{2.9}$$

и для них справедливы тождества:

$$\begin{gathered}\int\limits_\Omega \sum_{\alpha=1}^{3} \sigma(T) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v}{\partial x_\alpha} d\Omega + \int\limits_{S_2} \alpha(x) uv \, dS_2 = \\ = \int\limits_\Omega f(x) v \, d\Omega + \int\limits_{S_1} \varphi(x) v \, dS_1 + \int\limits_{\S_2} \mu(x) v \, dS_2, \quad \forall v \in W_2^1(\Omega);\end{gathered} \tag{2.10}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_\Omega \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \eta}{\partial x_\alpha} d\Omega = \int\limits_\Omega \sigma(T) |\mathrm{grad}\, u|^2 \eta(x) \, d\Omega + \\ + \int\limits_{\Gamma_2} g(x) \eta(x) \, d\Gamma_2, \qquad \forall \eta(x) \in W_{2,0}^1(\Omega, \Gamma_1).\end{gathered} \tag{2.11}$$

3. Исследование задачи относительно функции $u(x)$, исключение неизвестной функции $u(x)$ из системы уравнений

Теорема 3.1. *Для каждого заданного $T(x) \in W_{2,0}^1(\Omega, \Gamma_1)$ существует единственное решение $u(x) \in W_2^1(\Omega)$, удовлетворяющее тождеству* (2.10). *Задача о нахождении этого решения*

$$u(x) = u_T(x) \in W_2^1(\Omega) \tag{3.1}$$

из (2.10) *эквивалентна решению операторного уравнения*

$$A_T u = h, \tag{3.2}$$

где оператор $A_T : W_2^1(\Omega) \to \left(W_2^1(\Omega)\right)^*$ определяется соотношением

$$< A_T u, v > = \int\limits_\Omega \sigma(T) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v}{\partial x_\alpha} d\Omega + \int\limits_{S_2} \alpha(x) uv \, dS_2, \quad \forall u, v \in W_2^1(\Omega), \tag{3.3}$$

а правая часть $h \in (W_2^1(\Omega))^*$ *определена соотношением*

$$< h, v >= \int\limits_{\Omega} f(x) v \, d\Omega + \int\limits_{S_1} \varphi(x) v \, dS_1 + \int\limits_{S_2} \mu(x) v \, dS_2. \tag{3.4}$$

Справедлива априорная оценка решения $u(x) = u_T(x) \in W_2^1(\Omega)$

$$\|u(x)\|_{W_2^1(\Omega)} = \|u_T(x)\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C_0 \big(\|f(x)\|_{L_2(\Omega)} + \|\varphi(x)\|_{L_2(S_1)} + \|\mu(x)\|_{L_2(S_2)} \big), \tag{3.5}$$

где $C_0 = const > 0$.

Доказательство теоремы 3.1 опирается на лемму Лакса-Мильграма [6] и теоремы вложения [7].

Л е м м а 3.1. *Пусть* $u(x) = u_T(x) \in W_2^1(\Omega)$ *– решение уравнения* (3.2)

$$A_T u = h, \tag{3.6}$$

отвечающее заданному элементу $T(x) \in W_{2,0}^1(\Omega, \Gamma_1)$. *Пусть обобщенное решение* $u(x) \in W_2^1(\Omega)$ *задачи* (2.10) *такое, что оно ограничено в норме* $W_4^1(\Omega)$, *т. е.*

$$\|u(x)\|_{W_4^1(\Omega)} \leq M, \tag{3.7}$$

где

$$\|u(x)\|_{W_4^1(\Omega)} = \sum_{\alpha=1}^{3} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right\|_{L_4(\Omega)} + \|u(x)\|_{L_4(\Omega)}. \tag{3.8}$$

Тогда имеет место включение

$$f_0(x) = \sigma(T) |\mathrm{grad}\, u|^2 = \sigma(T) \sum_{\alpha=1}^{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right)^2 \subset L_2(\Omega),$$

причём

$$\begin{gathered} \left(\int\limits_{\Omega} f_0^2(x) \, d\Omega \right)^{1/2} = \|f_0(x)\|_{L_2(\Omega)} \leq \sqrt{3} \sigma_1 \left(\sum_{\alpha=1}^{3} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right\|_{L_4(\Omega)} \right)^2 \leq \\ \leq M_0 \|u(x)\|^2_{W_4^1(\Omega)} \leq M_0 M^2; \quad M_0 = \sqrt{3} \sigma_1. \end{gathered} \tag{3.9}$$

Здесь $\sigma(\xi)$ *– непрерывная на* $\mathbb{R}^1$ *функция, причём*

$$0 < \sigma_0 \leq \sigma(\xi) \leq \sigma_1, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^1.$$

Доказательство оценки (3.9) имеет цепочку неравенств:

$$\begin{gathered} \int\limits_{\Omega} f_0^2(x) \, d\Omega = \int\limits_{\Omega} \sigma^2(T) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} \right)^2 \right]^2 d\Omega \leq \\ \leq 3\sigma_1^2 \int\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^4 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^4 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} \right)^4 \right] d\Omega = \\ = 3\sigma_1^2 \left[\left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|^4_{L_4(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\|^4_{L_4(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_3} \right\|^4_{L_4(\Omega)} \right] \leq \\ \leq 3\sigma_1^2 \left[\left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L_4(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\|_{L_4(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_3} \right\|_{L_4(\Omega)} \right]^4 = 3\sigma_1^2 \left(\sum_{\alpha=1}^{3} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right\|_{L_4(\Omega)} \right)^4. \end{gathered}$$

Следовательно,

$$\left(\int\limits_{\Omega} f_0^2(x)\,d\Omega\right)^{1/2} \le \sqrt{3}\sigma_1\left(\sum_{\alpha=1}^{3}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right\|_{L_4(\Omega)}\right)^2 \le$$
$$\le \sqrt{3}\sigma_1\left(\sum_{\alpha=1}^{3}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right\|_{L_4(\Omega)} + \|u(x)\|_{L_4(\Omega)}\right)^2 = \sqrt{3}\sigma_1\|u(x)\|^2_{W_4^1(\Omega)}.$$

Если $\|u(x)\|_{W_4^1(\Omega)} \le M$, то $\|f_0(x)\|_{L_2(\Omega)} \le \sqrt{3}\sigma_1 M^2 < \infty$.

Таким образом, мы исключили неизвестную функцию $u(x)$ из системы уравнений (2.10), (2.11).

Перейдем теперь к исследованию полученной задачи относительно функции $T(x)$. Причём в последней формулировке задачи только функция $T(x)$ выступает как неизвестная.

4. Исследование нелинейной задачи относительно функции $T(x)$

Поставим следующую задачу: требуется найти функцию $T(x) \in W^1_{2,0}(\Omega,\Gamma_1)$ из интегрального тождества

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha=1}^{3}\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \eta}{\partial x_\alpha}d\Omega = \int\limits_{\Omega}\sigma(T)|\mathrm{grad}\,u_T|^2\cdot\eta\,d\Omega + \int\limits_{\Gamma_2} g(x)\eta\,d\Gamma_2, \quad \forall\eta\in W^1_{2,0}(\Omega,\Gamma_1). \quad (4.1)$$

Задача (4.1) есть обобщенная постановка смешанной нелинейной краевой задачи

$$\begin{aligned}
&-\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x_\alpha}\right) = \sigma(T)|\mathrm{grad}\,u_T|^2 = \sigma(T)\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\lambda(T)\frac{\partial u_T}{\partial x_\alpha}\right)^2, \quad x\in\Omega,\\
&T(x) = 0, \quad x\in\Gamma_1, \qquad \lambda(T)\frac{\partial T}{\partial n} = g(x), \quad x\in\Gamma_2,\\
&\bar{\Gamma_1}\cup\bar{\Gamma_2} = \Gamma = \partial\Omega, \qquad \Gamma_1\cap\Gamma_2 = \emptyset.
\end{aligned} \quad (4.2)$$

Т е о р е м а 4.1. *Пусть выполняются условия из леммы 3.1. Тогда существует единственное обобщенное решение $T(x) \in W^1_{2,0}(\Omega,\Gamma_1)$, удовлетворяющее интегральному тождеству* (4.1). *Причём справедлива априорная оценка*

$$\|T(x)\|_{W^1_{2,0}(\Omega,\Gamma_1)} \le \frac{1}{\lambda_0}\big(M_0 M^2 C_1 + C_2\|g(x)\|_{L_2(\Gamma_2)}\big). \quad (4.3)$$

Доказательство теоремы опирается на лемму 3.1 и [8–9]. Приведём доказательство оценки (4.3).

Из интегрального тождества (4.1) имеем:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha=1}^{3}\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x_\alpha}\frac{\partial T}{\partial x_\alpha}d\Omega = \int\limits_{\Omega} f_0(x)T(x)\,d\Omega + \int\limits_{\Gamma_2} g(x)T(x)\,d\Gamma_2,\\
&\lambda_0\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{\partial T}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega \le \|f_0(x)\|_{L_2(\Omega)}\|T(x)\|_{L_2(\Omega)} + \|g(x)\|_{L_2(\Gamma_2)}\|T(x)\|_{L_2(\Gamma_2)}.
\end{aligned} \quad (4.4)$$

Справедливы следующие неравенства [7]

$$\|T(x)\|_{L_2(\Omega)} \leq C_1 \|T(x)\|_{W^1_{2,0}(\Omega,\Gamma_1)}, \tag{4.5}$$

$$\|T(x)\|_{L_2(\Gamma_2)} \leq C_2 \|T(x)\|_{W^1_{2,0}(\Omega,\Gamma_1)}, \tag{4.6}$$

где $C_1, C_2 = const > 0$.

Из (3.9), (4.4)–(4.6) имеем

$$\begin{gathered}\lambda_0 \|T(x)\|_{W^1_{2,0}(\Omega,\Gamma_1)} \leq C_1 \|T(x)\|_{W^1_{2,0}(\Omega,\Gamma_1)} \|f_0\|_{L_2(\Omega)} + \\ + C_2 \|g(x)\|_{L_2(\Gamma_2)} \|T(x)\|_{W^1_{2,0}(\Omega,\Gamma_1)} \leq \\ \leq \big(C_1 \|f_0(x)\|_{L_2(\Omega)} + C_2 \|g(x)\|_{L_2(\Gamma_2)}\big) \|T(x)\|_{W^1_{2,0}(\Omega,\Gamma_1)} \leq \\ \leq \big(M_0 M^2 C_1 + C_2 \|g(x)\|_{L_2(\Gamma_2)}\big) \|T(x)\|_{W^1_{2,0}(\Omega,\Gamma_1)}.\end{gathered} \tag{4.7}$$

Следовательно, получаем оценку (4.3)

$$\|T(x)\|_{W^1_{2,0}(\Omega,\Gamma_1)} \leq \frac{1}{\lambda_0} \big(M_0 M^2 C_1 + C_2 \|g(x)\|_{L_2(\Gamma_2)}\big).$$

З а м е ч а н и е 4.1. *Система нелинейных уравнений в частных производных* (2.1)–(2.2) *может описывать также математическую модель совместного расчёта электрических и тепловых полей в твёрдых проводниках электричества и тепла.*

Список литературы

1. Двухфазная трехмерная модель алюминиевого электролизера / Н. П. Савенкова [и др.] // Прикладная физика. 2012. № 3. С. 111–115.

2. Математическое моделирование МГД-стабильности алюминиевого электролизера / Н. П. Савенкова [и др.] // Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Техника и технологии. 2020. Т. 13, № 2. С. 243–253. DOI: https://doi.org/10.17516/1999-494X-0211

3. Мукаева В. Р., Парфенов Е. В. Математическое моделирование процесса электролитно-плазменного полирования // Вестник УГАТУ. 2012. Т. 16, № 6. С. 67–73.

4. Модельные представления о механизме микродугового оксидирования металлических материалов и управление этим процессом / А. Г. Ракоч [и др.] // Защита металлов. 2006. Т. 42, № 2. С. 173–184.

5. Методы совместных расчетов электрических и тепловых полей в электрохимических системах / В. Т. Иванов [и др.]. М.: Наука, 1978. 104 с.

6. Самарский А. А., Лазаров Л. Д., Макаров В. Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. М.: Высшая школа, 1987. 296 с.

7. Ладыженская О. А., Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.

8. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Вычислительная теплопередача. М.: УРСС, 2003. 784 с.

9. Francu J., Monotone operators. A survey directed to applications to differential equations // Aplikace Matematiky. 1990. Vol. 35, no. 4. P. 257–301.

Поступила 03.06.2023; доработана после рецензирования 11.07.2023; принята к публикации 25.08.2023

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. N. P. Savenkova, S. V. Anpilov, R. N. Kuz'min, O. G. Provorova, T. V. Piskazhova, "Dvuhfaznaya trekhmernaya model' alyuminievogo elektrolizera", *Prikladnaya fizika*, 2012, no. 3, 111–115 (In Russ.).

2. N. P. Savenkova, A. YU. Mokin, N. S. Udovichenko, A. A. P'yanyh, "Matematicheskoe modelirovanie MGD-stabil'nosti alyuminievogo elektrolizera", *Zhurnal Sibirskogo federalnogo universiteta. Seriya: Tekhnika i tekhnologii*, **13**:2 (2020), 243–253 (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.17516/1999-494X-0211

3. V. R. Mukaeva, E. V. Parfenov, "Matematicheskoe modelirovanie processa elektrolitno-plazmennogo polirovaniya", *Vestnik UGATU*, **16**:5 (2012), 67–73 (In Russ.).

4. A. G. Rakoch, V. V. Hohlov, V. A. Bautin, N. A. Lebedeva, Yu. V. Magurova, I. V. Bardin, "Model'nye predstavleniya o mekhanizme mikrodugovogo oksidirovaniya metallicheskih materialov i upravlenie etim processom", *Zashchita metallov*, **42**:2 (2006), 173–184 (In Russ.).

5. V. T. Ivanov, F. V Lubyshev, A. S. Derkach, V. S. Merkur'ev, *Metody sovmestnyh raschetov elektricheskih i teplovyh polej v elektrohimicheskih sistemah*, Nauka Publ., Moscow, 1978 (In Russ.), 104 p.

6. A. A. Samarskij, R. D. Lazarov, V. L. Makarov, *[Difference schemes for differential equations with generalized solutions]*, Vysshaya shkola Publ., Moscow, 1987 (In Russ.), 296 p.

7. O. A. Ladyzhenskaya, *[Boundary value problems of mathematical physics]*, Nauka Publ., Moscow, 1973 (In Russ.), 408 p.

8. A. A. Samarskij, P. N. Vabishchevich, *[Computational heat transfer]*, Librokom Publ., M., 2009 (In Russ.), 784 p.

9. J. Francu, "Monotone operators. A survey directed to applications to differential equations", *Aplikace Matematiky*, **35**:4 (1990), 257–301.

Submitted 03.06.2023; Revised 11.07.2023; Accepted 25.08.2023

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.