DOI 10.15507/2079-6900.25.202302.62-75 ISSN 2079-6900 (Print)
Оригинальная статья ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.938

О сведении проблемы топологической классификации градиентно-подобных потоков к классификации полярных потоков

И. А. Сараев

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

Аннотация. В статье рассматривается класс $G(M^n)$ градиентно-подобных потоков на связных замкнутых многообразиях размерности $n \geq 4$, такой что для любого потока $f^t \in G(M^n)$ устойчивые и неустойчивые многообразия седловых состояний равновесия размерности $(n-1)$ не пересекаются с инвариантными многообразиями других седловых состояний равновесия. Известно, что несущее многообразие любого потока f^t из класса $G(M^n)$ раскладывается в связную сумму сферы $\mathbb{S}^n$, $g_{f^t} \geq 0$ копий прямых произведений $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ и односвязного многообразия, отличного от сферы. Число g_{f^t} определяется только числом узловых состояний равновесия и числом седловых состояний равновесия, одно из инвариантных многообразий которых имеет размерность $(n-1)$ (такие состояния равновесия будем называть тривиальными седлами), а односвязное многообразие, отличное от сферы, присутствует в связной сумме тогда и только тогда, когда множество седловых состояний равновесия содержит точки, размерность неустойчивого многобразия которых принадлежит множеству $\{2, \ldots, n-2\}$ (такие состояния равновесия будем называть нетривиальными седлами). Более того, для потоков из класса $G(M^n)$ без нетривиальных седел имеется полная топологическая классификация. В настоящей работе доказывается, что для любого потока $f^t \in G(M^n)$ разбиение несущего многообразия на связную сумму можно осуществить по попарно непересекающимся гладко вложенным сферам (разбивающим сферам), не содержащим состояний равновесия потока f^t и трансверсально пересекающим его траектории. Ограничение потока f^t на дополнения до этих сфер однозначно (с точностью до топологической эквивалентности и нумерации) определяет конечный набор потоков $f^t_1, \ldots, f^t_l$, заданных на компонентах связной суммы. Более того, для любого $j \in \{1, \ldots, l\}$, множество седловых состояний равновесия потока f^t_j либо состоит только из тривиальных седел, либо только из нетривиальных, и тогда поток f^t_j является полярным. Мы вводим понятие согласованной топологической эквивалентности для потоков $f^t_1, \ldots f^t_l$ и показываем, что потоки $f^t, f'^t \in G(M^n)$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда для каждого из этих потоков существуют наборы разбивающих сфер, определяющих согласованно топологически эквивалентные потоки на компонентах связной суммы.

Ключевые слова: градиентно-подобные потоки, многообразие, топологическая классификация, потоки Морса-Смейла, функция Морса

Для цитирования: Сараев И. А. О сведении проблемы топологической классификации градиентно-подобных потоков к классификации полярных потоков // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 2. С. 62–75. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202302.62-75

Об авторе:
Сараев Илья Александрович, студент факультета информатики, математики и компьютерных наук, стажер-исследователь лаборатории «Динамические системы и приложения», Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печёрская, д. 25/12), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7608-2634, isaraev@hse.ru

---

Original article

MSC2020 37D15

On the reduction of the topological classification of gradient-like flows problem to the classification of polar flows

I. A. Saraev

Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

Abstract. In this paper we consider a class $G(M^n)$ of gradient-like flows on connected closed manifolds of dimension $n \geq 4$ such that for any flow $f^t \in G(M^n)$ stable and unstable invariant manifolds of saddle equilibria do not intersect invariant manifolds of other saddle equilibria. It is known that the ambient manifold of any flow from the class $G(M^n)$ can be splitted into connected summ of the sphere $\mathbb{S}^n$, $g_{f^t} \geq 0$ copies of direct products $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$, and a simply connected manifold which is not homeomorphic to the sphere. The number g_{f^t} is determined only by the number of nodal equilibria and the number of saddle equilibria such that one of their invariant manifolds has the dimension $(n-1)$ (we call such equilibria trivial saddles). A simply connected manifold which is not homeomorphic to the sphere presents in the splitting if and only if the set of saddle equilibria contains points with unstable manifolds of dimension $i \in \{2, \ldots, n-2\}$ (we call such equilibria non-trivial saddles). Moreover, the complete topological classification was obtained for flows from the class $G(M^n)$ without non-trivial saddles. In this paper we prove that for any flow $f^t \in G(M^n)$ the carrier manifold can be splitted into a connected sum along pairwise disjoint smoothly embedded spheres (separating spheres) that do not contain equilibrium states of the flow f^t and transversally intersect its trajectories. The restriction of the flow f^t to the complements to these spheres uniquely (up to topological equivalence and numbering) defines a finite set of flows $f^t_1, \ldots, f^t_l$ defined on the components of a connected sum. Moreover, for any $j \in 1, \ldots, l$, the set of saddle equilibria of the flow f^t_j consists either only of trivial saddles or only of of non-trivial ones and then the flow f^t_j is polar. We introduce the notion of consistent topological equivalence for flows $f^t_1, \ldots f^t_j$ and show that flows $f^t, f'^t \in G(M^n)$ are topologically equivalent if and only if for each of these flows the set of separating spheres exists that defines consistently topologically equivalent flows on the components of the connected sum.
Keywords: gradient-like flows, manifold, topological classification, Morse-Smale flows, Morse function.
For citation: *I. A. Saraev.* On the reduction of the topological classification of gradient-like flows problem to the classification of polar flows. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 25:2(2023), 62–75. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202302.62-75

About the author:
Ilya A. Saraev, Student of the Faculty of Informatics, Mathematics and Computer Science, Trainee Researcher, Laboratory "Dynamical Systems and Applications", Higher School of Economics (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7608-2634, isaraev@hse.ru

1. Введение

Пусть M^n — замкнутое ориентируемое гладкое многообразие размерности n. Поток f^t на M^n называется *градиентно-подобным*, если его неблуждающее множество Ω_{f^t} состоит из конечного числа гиперболических состояний равновесия и инвариантные многообразия состояний равновесия пересекаются трансверсально. Обозначим $G(M^n)$ класс градиентно-подобных потоков на M^n, таких что для любого потока $f^t \in G(M^n)$ устойчивые и неустойчивые многообразия седловых состояний равновесия размерности $(n-1)$ не пересекаются с инвариантными многообразиями других седловых состояний равновесия.

Пусть Ω_{f^t} обозначает множество всех состояний равновесия потока $f^t \in G(M^n)$, а $\Omega^i_{f^t}$ — множество состояний равновесия, размерность неустойчивого многообразия которых (индекс Морса) равна $i \in \{0, \dots, n\}$. Положим

$$\mu_{f^t} = |\Omega^0_{f^t} \cup \Omega^n_{f^t}|, \nu_{f^t} = |\Omega^1_{f^t} \cup \Omega^{n-1}_{f^t}|, g_{f^t} = (\nu_{f^t} - \mu_{f^t} + 2)/2,$$

и обозначим через m_{f^t} число седловых состояний равновесия, индекс Морса которых больше единицы, но меньше $(n-1)$ (если $n = 3$, то $m_{f^t} = 0$). Седловые состояния равновесия, принадлежащие множеству $\Omega^1_{f^t} \cup \Omega^{n-1}_{f^t}$, будем называть *тривиальными*, седловые состояния равновесия, отличные от тривиальных, будем называть *нетривиальными*.

Будем обозначать $\mathcal{S}^n_g$ многообразие, гомеоморфное связной сумме сферы $\mathbb{S}^n$ и $g \geq 0$ копий прямых произведений $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$; и $\mathcal{N}^n$ — односвязное многообразие, не гомеоморфное сфере, допускающее поток из класса $G(M^n)$, неблуждающее множество которого не содержит тривиальных седел (из того факта, что односвязное многообразие, допускающее градиентный поток без тривиальных седел, не гомеоморфно сфере, сразу следует, что неблуждающее множество такого потока содержит по крайней мере одно нетривиальное седло).

Из работ [1–3] вытекает следующий результат.

Утверждение 1.1. *Пусть $f^t \in G(M^n)$, $n \geq 3$. Тогда*

1) *g_{f^t} является целым числом;*

2) *если $m_{f^t} = 0$, то M^n гомеоморфно $\mathcal{S}^n_{g_{f^t}}$;*

3) *если $m_{f^t} > 0$, то M^n гомеоморфно $\mathcal{S}^n_{g_{f^t}} \sharp \mathcal{N}^n$;*

4) *если $m_{f^t} = 1$, то $n \in \{4, 8, 16\}$, и при $n = 4$ многообразие $\mathcal{N}^n$ гомеоморфно комплексной проективной плоскости.*

В работе [4] показано, что если несущее многообразие M^n потока $f^t \in G(M^n)$ гомеоморфно $\mathcal{S}^n_g$, то множества $\Omega^i_{f^t}$ пусты для $i \in \{2, \dots, n-2\}$, а в работе [5] (см. также [6]) решена проблема топологической классификации таких потоков. Эти результаты вместе со следующим вспомогательным утверждением послужили мотивировкой к получению результатов настоящей работы.

Пусть f^t — произвольный гладкий поток на M^n и $S^{n-1} \subset M^n$ — гладко или локально плоско вложенная в M^n сфера, не содержащая его состояний равновесия и трансверсально пересекающая траектории потока. В случае локально плоской сферы трансверсальность пересечения означает, что пересечение любой траектории потока f^t со сферой S^{n-1} либо пусто, либо состоит из единственной точки. Будем говорить, что S^{n-1} является *сферой без контакта* для потока f^t. Если $M^n \setminus S^{n-1}$ несвязно, то будем называть сферу S^{n-1} *разбивающей сферой без контакта.* Пусть $T(S^{n-1})$ — трубчатая окрестность сферы S^{n-1}, не содержащая состояний равновесия потока f^t и такая, что ее граница $\partial T(S^{n-1})$ состоит из двух сфер S^{n-1}_-, S^{n-1}_+ без контакта для потока f^t. Обозначим через $\eta : S^{n-1}_- \to S^{n-1}_+$ диффеоморфизм, определённый по правилу $\eta(x) = \mathcal{O}_{f^t}(x) \cap S^{n-1}_+$, $x \in S^{n-1}_-$, где $\mathcal{O}_{f^t}(x)$ — траектория потока f^t, проходящая через точку x.

Пусть кроме потока f^t, на многообразии M^n задан поток f'^t. Здесь и далее будем считать, что для потока f'^t введены те же объекты, что и для потока f^t, а обозначения этих объектов отличаются штрихами от обозначений аналогичных объектов для потока f^t.

Определение 1.1. *Гомеоморфизмы $h_- : S^{n-1}_- \to S'^{n-1}_-$, $h_+ : S^{n-1}_+ \to S'^{n-1}_+$ называются согласованными, если выполняется равенство $h_+\eta = \eta' h_-$.*

Пусть S^{n-1} — разбивающая сфера без контакта для потока f^t; $T(S^{n-1})$ — ее трубчатая окрестность и P_-, P_+ — компоненты связности множества $M^n \setminus \operatorname{int} T(S^{n-1})$. Обозначим через f^t_-, f^t_+, соответственно, ограничение потока f^t на P_-, P_+. Будем называть потоки f^t_-, f^t_+ *составляющими потоками* для потока f^t.

Предложение 1.1. *Пусть для потоков f^t, f'^t существуют разбивающие сферы без контакта S^{n-1}, S'^{n-1}, такие что составляющие потоки f^t_-, f'^t_- и f^t_+, f'^t_+ топологически эквивалентны посредством гомеоморфизмов $h_- : P_- \to P'_-$, $h_+ : P_+ \to P'_+$, ограничения $h_+|_{S^{n-1}_+}$, $h_-|_{S^{n-1}_-}$ которых на сферы S^{n-1}_+, S^{n-1}_-, соответственно, согласованны. Тогда f^t, f'^t топологически эквивалентны.*

Замечание 1.1. *Отметим, что если поток f^t имеет разбивающую сферу без контакта, то любой топологически эквивалентный ему поток f'^t имеет по крайней мере локально плоскую разбивающую сферу без контакта и составляющие пары потоков для f^t, f'^t топологически эквивалентны. На Рис. 1.1 видно, что условие согласованности гомеоморфизмов h_-, h_+ в предложении 1.1 нельзя ослабить.*

В этой работе для произвольного потока $f^t \in G(M^n)$ мы находим минимальный набор разбивающих сфер, таких что множество седловых состояний равновесия каждого составляющего потока для f^t состоит либо только из тривиальных седел, либо только из нетривиальных. Предложенная конструкция вместе с предложением 1.1 позволяет свести проблему топологической классификации потоков из класса $G(M^n)$ к классификации полярных потоков на односвязных замкнутых многообразиях.

Сформулируем результаты более точно. Пусть L_{f^t} — объединение всех замыканий устойчивых и неустойчивых инвариантных многообразий седловых состояний равновесия размерности $(n-1)$. Обозначим через $m^0_{f^t}$ число компонент связности множества $M^n \setminus L_{f^t}$, таких что ограничение потока f^t на эти компоненты имеет нетривиальные седловые состояния равновесия.

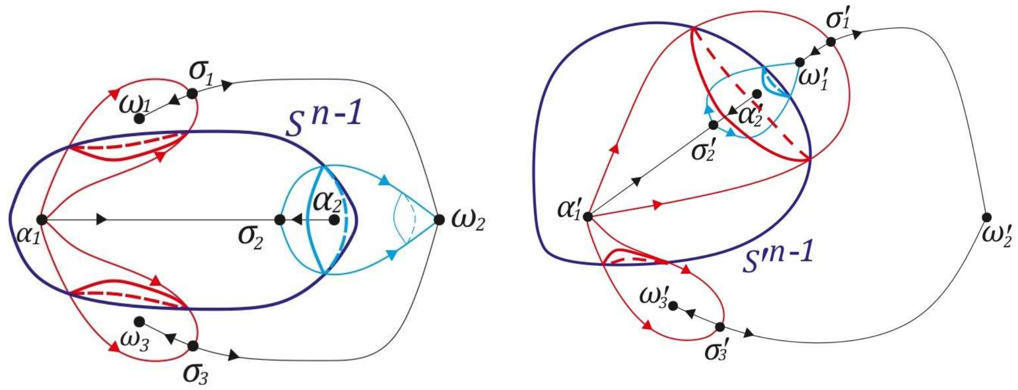

Рис. 1.1. Фазовые портреты топологически неэквивалентных потоков f^t (a) и f'^t (b), имеющих топологически эквивалентные ограничения на компонентах дополнения к секущим сферам

Fig 1.1. Phase portraits of topologically nonequivalent flows f^t (a) and f'^t (b) having topologically equivalent constraints on the components of the complement to the secant spheres

Л е м м а 1.1. *Пусть* $f^t \in G(M^n)$, $m_{f^t} > 0, \nu_{f^t} > 0$. *Тогда существует набор попарно непересекающихся гладко вложенных сфер* $S_1^{n-1}, \dots, S_{k_{f^t}}^{n-1} \subset M^n$, $m^0_{f^t} \leq k_{f^t} \leq \leq 2m^0_{f^t}$, *таких что:*

1. *сфера* S_i^{n-1} *является сферой без контакта для потока* f^t, $i \in \{1, \dots, k_{f^t}\}$;
2. *многообразие* $M^n \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k_{f^t}} \operatorname{int} T(S_i^{n-1})$ *состоит из* $l_{f^t} \leq k_{f^t} + 1$ *компонент связности* $P_1, \dots, P_{l_{f^t}}$;
3. *все состояния равновесия потока* f^t *лежат в объединении* $\bigcup\limits_{j=1}^{l_{f^t}} P_j$, *при этом все нетривиальные седловые состояния равновесия принадлежат ровно* $m^0_{f^t}$ *компонентам множества* $\{P_j\}$, *не содержащим состояний равновесия, отличных от этих седел (см. Рис. 1.2).*

Совокупность сфер $S_1^{n-1}, \dots, S_{k_{f^t}}^{n-1} \subset M^n$, удовлетворяющих заключению леммы 1.1, будем называть *минимальным набором разбивающих сфер.*

Обозначим через f_j^t ограничение потока f^t на множество P_j, введенное в лемме 1.1. Как и ранее, будем называть набор потоков $\{f_j^t\}$ *составляющими потоками* для f^t.

Пусть для компонент P_i, P_j (возможно, $i = j$) существует разбивающая сфера S_{ij}^{n-1} и ее трубчатая окрестность $T(S_{ij}^{n-1})$, ограниченная сферами без контакта $S_{ij,-}^{n-1}, S_{ij,+}^{n-1}$, такие что $S_{ij,-}^{n-1} \subset \operatorname{cl} P_i, S_{ij,+}^{n-1} \subset \operatorname{cl} P_j$. Будем называть компоненты P_i, P_j *связанными сферой* S_{ij}^{n-1}.

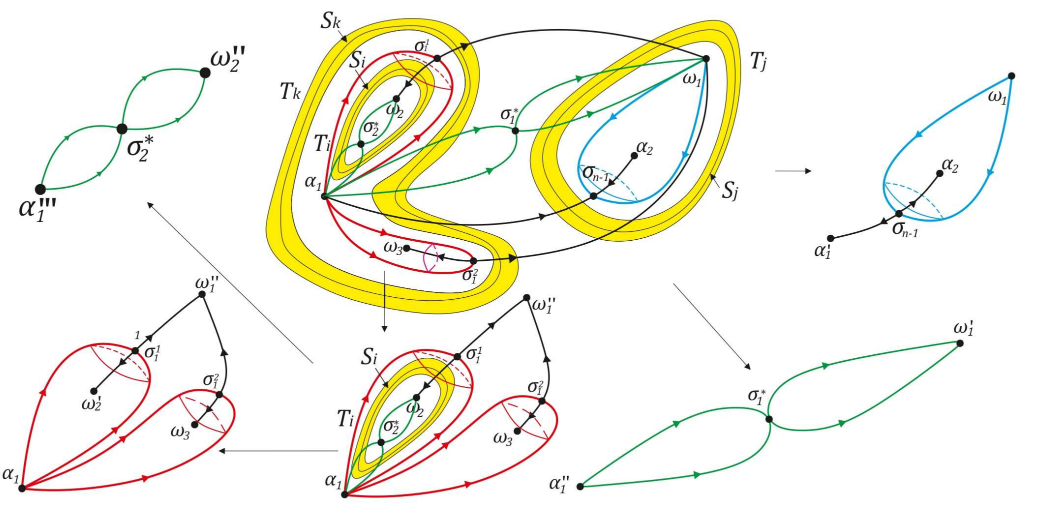

Рис. 1.2. Минимальный набор разбивающих сфер

Fig. 1.2. Minimal set of splitting spheres

Теорема 1.1. *Потоки $f^t, f'^t \in G(M^n)$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда для них существуют минимальные наборы разбивающих сфер $\{S_i^{n-1}\}_{i=1}^{k_{f^t}}$, $\{S'^{n-1}_i\}_{i=1}^{k_{f'^t}}$, соответственно, такие что $k_{f^t} = k_{f'^t} = k, l_{f^t} = l_{f'^t} = l$ и для каждого $j \in \{1, \ldots, l_{f^t}\}$ потоки f_j^t, f'^t_j топологически эквивалентны при помощи гомеоморфизма $h_j : P_j \to P'_j$, при этом для каждой пары компонент P_i, P_j, связанных разбивающей сферой S_{ij}^{n-1}, ограничения гомеоморфизмов h_i, h_j на сферы $S_{ij,-}^{n-1}, S_{ij,+}^{n-1}$ согласованы в смысле определения 1.1.*

Следующая конструкция показывает, что проверка условий теоремы 1.1 связана с проблемой топологической классификации полярных потоков.

Пусть $\{S_i^{n-1}\}_{i=1}^{k_{f^t}}$ — минимальный набор разбивающих сфер для потока $f^t \in G(M^n)$ и $P_1, \ldots, P_{l_{f^t}}$ — компоненты связности многообразия $M^n \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k_{f^t}} \operatorname{int} T(S_i^{n-1})$. Приклеим к каждой компоненте S^{n-1} связности края многообразия P_j по копии шара B^n, на которой задан линейный поток $a_\pm^t$ с единственным состоянием равновесия — отталкивающим или притягивающим, в зависимости от направления траекторий потока f^t на граничной сфере S^{n-1}. Обозначим через M_j полученное многообразие, через $q_j : P_j \sqcup (\bigcup\limits_i B_i^n) \to M_j$ — естественную проекцию и через $\hat{f}_j^t$ – поток на многообразии M_j, совпадающий с потоком $q_j f_j^t$ на множестве $q_j(P_j)$ и с потоком $q_j a_\pm^t$ на образе каждого шара B_i^n. По построению поток $\hat{f}_j^t$ принадлежит классу $G(M^n)$.

Предложение 1.2. *Для любого множества P_j, несущего нетривиальные седловые состояния равновесия, многообразие M_j является односвязным, а поток $\hat{f}_j^t$ – полярным.*

2. Вспомогательные определения, конструкции и факты

2.1. Склейка многообразий

Пусть M, N — n-мерные замкнутые гладкие многообразия с краем, $n \geq 1$, $X \subset \subset \partial M, Y \subset \partial N$ — замкнутые гомеоморфные подмножества и $g : X \to Y$ — обращающий естественную ориентацию края диффеоморфизм (гомеоморфизм). Введем на дизъюнктном объединении $M \sqcup N$ следующее отношение эквивалентности: если $x \in M \cup N \setminus (X \cup Y)$, то $x \sim x$, если $x \in X, y \in Y$, то $x \sim g(x), y \sim g^{-1}(y)$. Фактор-пространство

$$M \cup_g N = (M \sqcup N)/_\sim$$

по этому отношению эквивалентности является гладким (топологическим) многообразием. Будем говорить, что это многообразие получено *склейкой многообразий* M, N *по отображению* $g : X \to Y$. Пусть $p : M \sqcup N \to M \bigcup_g N$ — естественная проекция. Далее по тексту образы $p(M), p(N)$ обозначаются также, как и оригиналы.

2.2. Связная сумма многообразий

Пусть M, N — два компактных n-многообразия; $B_1^n \subset M$, $B_2^n \subset N$ — подпространства, гомеоморфные $\mathbb{B}^n$, $h_1 : \mathbb{B}^n \to B_1^n$ и $h_2 : \mathbb{B}^n \to B_2^n$ — соответствующие гомеоморфизмы. Пусть $\varphi : \partial B_1^n \to \partial B_2^n$ — гомеоморфизм, такой что отображение $h_2^{-1}\varphi h_1|_{\partial \mathbb{B}^n} : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ является меняющим ориентацию. Пространство

$$M \sharp N = (M \setminus int\ B_1^n) \cup_\varphi (N \setminus int\ B_2^n)$$

называется связной суммой многообразий M, N.

Из конструкции следует, что связной суммой замкнутых многообразий является замкнутое многообразие, ориентируемое тогда и только тогда, когда ориентируемы оба слагаемые. В силу [7, Lemma 2.1] это многообразие единственно с точностью до гомеоморфизма. В силу [8, Theorem 1] справедлив следующий факт, получивший название «Теорема Милнора-Кнезера»: любое компактное ориентируемое трехмерное многообразие, отличное от сферы S^3, единственным образом (с точностью до гомеоморфизма) представляется в виде связной суммы конечного числа простых многообразий, каждое из которых либо гомеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, либо является неприводимым (т. е. таким, что любая локально плоская сфера S^{n-1} в нем ограничивает шар B^n). Теорема Милнора-Кнезера, не может быть обобщена на случай размерности $n > 3$, см., например, [9, § 3.1, Пример 3].

2.3. Перестройка многообразия вдоль сферы размерности $(n-1)$

Будем называть *n-кольцом* многообразие, гомеоморфное прямому произведению $\mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1]$ стандартной сферы на отрезок $[0, 1]$.

Пусть M^n — связное замкнутое многообразие; $e : \mathbb{S}^{n-1} \times [-1, 1] \to M^n$ — топологическое вложение, такое что $e(\mathbb{S}^{n-1} \times \{-1\}), e(\mathbb{S}^{n-1} \times \{1\})$ — локально плоские сферы. Положим $S^{n-1} = e(\mathbb{S}^{n-1} \times \{0\})$, $K^n = e(\mathbb{S}^{n-1} \times [-1, 1])$. Многообразие $M^n \setminus \operatorname{int} K^n$ является многообразием с краем, имеющим две компонентны связности, гомеоморфные сфере размерности $(n-1)$. Пусть $\mathbb{B}^n_+, \mathbb{B}^n_-$ — два шара размерности n и $\varphi : \partial(M^n \setminus \operatorname{int} K^n) \to \partial\mathbb{B}^n_+ \cup \partial\mathbb{B}^n_-$ – гомеоморфизм, обращающий естественную ориентацию края. Обозначим через M^n_* многообразие, полученное склейкой многообразия

$M^n \setminus \operatorname{int} K^n$ и объединения $\mathbb{B}^n_+ \cup \mathbb{B}^n_-$ по гомеоморфизму φ. Будем говорить, что многообразие M^n_* *получено из* M^n *перестройкой вдоль сферы* S^{n-1}.

Следующий факт доказан в [10].

Утверждение 2.1. *Если M^n_* имеет две компонентны связности M^n_+, M^n_-, то M^n гомеоморфно связной сумме многообразий M^n_+ и M^n_-. Если M^n_* связно, то M^n гомеоморфно связной сумме M^n_* и $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$.*

3. Построение минимального набора разбивающих сфер

В этом разделе доказывается теорема 1.1. Напомним, что μ_{f^t} обозначает число узловых состояний равновесия, ν_{f^t} – число седловых состояний равновесия, индекс Морса которых равен 1 или $(n-1)$, и m_{f^t} — число седловых состояний равновесия, индекс Морса которых принадлежит множеству $\{2, \ldots, (n-2)\}$. Пусть $\nu_{f^t} > 0$. Тогда одно из множеств $\Omega^{n-1}_{f^t}, \Omega^1_{f^t}$ непусто. Предположим для определености, что $\Omega^{n-1}_{f^t} \neq \emptyset$ (если это не так, то перейдем к f^{-t}).

Предложение 3.1. *Для любой седловой точки $\sigma_{n-1} \in \Omega^{n-1}_{f^t}$ потока $f^t \in G(M^n)$ существует единственная стоковая точка ω, такая что $\operatorname{cl} W^u_{\sigma_{n-1}} = W^u_{\sigma_{n-1}} \cup \omega$. Множество $\operatorname{cl} W^u_{\sigma_{n-1}}$ является сферой размерности $(n-1)$, гладко вложенной в M^n во всех точках, кроме, возможно, точки ω.*

Доказательство. Из работы [11, Теорема 2.3] следует, что для любого седлового состояния равновесия $\sigma \in \Omega^i_{f^t}$ потока $f^t \in G(M^n)$ инвариантные многообразия W^u_σ, W^s_σ являются гладко вложенными открытыми шарами размерности i, $n-i$ соответственно. Кроме того, если $W^u_\sigma \cap W^s_p = \emptyset$ для любой седловой точки p, отличной от σ, то существует единственное стоковое состояние равновесия ω такое, что $\operatorname{cl} W^u_\sigma = W^u_\sigma \cup \omega$. По определению класса $G(M^n)$ это условие выполняется для точки $\sigma_{n-1} \in \Omega^{n-1}_{f^t}$, откуда непосредственно вытекает справедливость предложения.
Доказательство завершено.

В силу [12–13] для любого градиентно-подобного потока на замкнутом многообразии существует *энергетическая функция* — функция Морса, строго убывающая вдоль траекторий потока, отличных от состояний равновесия, а в каждом состоянии равновесия имеющая критическую точку. Этот факт позволяет усилить предложение 3.1 следующим образом.

Лемма 3.1. *Пусть ω — стоковое состояние равновесия, принадлежащее замыканию многообразия $W^u_{\sigma_{n-1}}$, $\sigma_{n-1} \in \Omega^{n-1}_{f^t}$.*

1. *Существует гладкая сфера $\Sigma^{n-1}_\omega \in W^s_\omega$, пересекающая трансверсально все траектории потока $f^t|_{W^s_\omega \setminus \omega}$ и такая, что пересечение $\Sigma^{n-1}_\omega \cap W^u_{\sigma_{n-1}}$ является гладко вложенной в Σ^{n-1}_ω сферой размерности $(n-2)$.*

2. *Сфера $\operatorname{cl} W^u_{\sigma_{n-1}}$ является локально плоской.*

3. *Для любой окрестности $U(\operatorname{cl} W^u_{\sigma_{n-1}}) \subset M^n$ сферы $\operatorname{cl} W^u_{\sigma_{n-1}}$ существует топологическое вложение $e : \mathbb{S}^{n-1} \times [-1, 1] \to U(\operatorname{cl} W^u_{\sigma_{n-1}})$ такое, что $e(\mathbb{S}^{n-1} \times \{0\}) = \operatorname{cl} W^u_{\sigma_{n-1}}$, а сферы $\mathbb{S}^{n-1} \times \{-1\}, \mathbb{S}^{n-1} \times \{1\}$ являются гладкими, при этом траектории потока f^t пересекают эти сферы трансверсально в направлении «внутрь» окрестности $e(\mathbb{S}^{n-1} \times [-1, 1])$.*

Доказательство. Пусть $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ — энергетическая функция потока f^t. Не уменьшая общности, предположим, что $\varphi(\omega) = 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ такое, что $\varphi^{-1}([0,\varepsilon]) \subset W^s_\omega \cap U(\mathrm{cl}\, W^u_{\sigma_{n-1}})$. Поскольку энергетическая функция убывает на множестве $W^s_\omega \setminus \omega$, то ω — точка минимума. Из леммы Морса следует, что множество $B_\omega = \varphi^{-1}([0,\varepsilon])$ является шаром размерности n, ограниченным гладкой сферой Σ^{n-1}_ω, трансверсальной к траекториям потока $f^t|_{W^s_\omega \setminus \omega}$. В [14, Предложение 3.1] доказано, что множество $W^u_{\sigma_{n-1}} \cap \partial B_\omega$ является гладко вложенной в ∂B_ω сферой размерности $(n-2)$, и сфера $\mathrm{cl}\, W^u_{\sigma_{n-1}}$ является локально плоской в точке ω. Так как во всех точках, кроме ω, сфера $\mathrm{cl}\, W^u_{\sigma_{n-1}}$ является гладкой, то $\mathrm{cl}\, W^u_{\sigma_{n-1}}$ – локально плоская в каждой точке. Таким образом, утверждения 1, 2 доказаны.

Докажем утверждение 3. Поскольку множество $W^u_{\sigma_{n-1}}$ диффеоморфно $\mathbb{R}^{n-1}$, а в силу обобщенной теоремы Шенфлиса любая локально плоская сфера размерности $(n-2)$ ограничивает в $\mathbb{R}^{n-1}$ замкнутый шар, то множество $W^u_\sigma \setminus B_\omega$ является шаром размерности $(n-1)$. Из λ-леммы следует, что существует компактная окрестность $V_{\sigma_{n-1}} \subset M^n$ точки σ_{n-1}, оснащенная двумя непрерывными отображениями $\pi_s : V_{\sigma_{n-1}} \to B^s_{\sigma_{n-1}}, \pi_u : V_{\sigma_{n-1}} \to B^u_{\sigma_{n-1}}$, где $B^s_{\sigma_{n-1}} = V_{\sigma_{n-1}} \cap W^s_{\sigma_{n-1}}, B^u_{\sigma_{n-1}} = V_{\sigma_{n-1}} \cap W^u_{\sigma_{n-1}}$ — шары размерности $1, (n-1)$ соответственно, содержащие точку σ_{n-1}, определяющие в окрестности $V_{\sigma_{n-1}}$ структуру прямого произведения $B^s_{\sigma_{n-1}} \times B^u_{\sigma_{n-1}}$ с гладким слоями, трансверсальными траекториям потока f^t, отличным от состояния равновесия σ_{n-1} (см., например, [15, Лемма 7.2, Лемма 7.3, § 7, Глава 2]). Более того, для любого $\delta > 0$ существует $T > 0$ такое, что для любого $t > T$ пара шаров $f^t(\partial\, B^s_{\sigma_{n-1}} \times B^u_{\sigma_{n-1}})$ является δ-C^1 близкой к шару $W^u_\sigma \setminus B_\omega$. Отсюда следует, что найдется такое $t > T$, что $f^t(V_{\sigma_{n-1}}) \subset U(\mathrm{cl}\, W^u_{\sigma_{n-1}})$ и пересечение множества $f^t(\partial\, B^s_{\sigma_{n-1}} \times B^u_{\sigma_{n-1}})$ с ∂B_ω является парой гладко вложенных непересекающихся сфер размерности $(n-2)$. Тогда множество $B_\omega \cup f^t(V_{\sigma_{n-1}})$ есть результат приклейки к шару B_ω ручки индекса $(n-1)$, следовательно, гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^{n-1} \times [-1,1]$ при помощи гомеоморфизма $e : \mathbb{S}^{n-1} \times [-1,1] \to B_\omega \cup f^t(V_{\sigma_{n-1}})$ такого, что $e(\mathbb{S}^{n-1} \times \{0\}) = \mathrm{cl}\, W^u_{\sigma_{n-1}}$ (см., например, [14, Предложение 12.4]). Применение канонической процедуры сглаживания (см.[16, Замечание 1.3.3], [17, Теорема 12.9]) позволяет считать граничные сферы гладко вложенными.
Доказательство завершено.

Обозначим через L_{f^t} объединение всех сфер, являющихся замыканиями устойчивых и неустойчивых инвариантных многообразий седловых состояний равновесия размерности $(n-1)$ и через D_{f^t} — множество компонент связности $M^n \setminus L_{f^t}$.

Предложение 3.2. *Замыкание* $\mathrm{cl}\, D$ *каждой компоненты связности* $D \in D_{f^t}$ *содержит ровно один источник и ровно один сток, при этом хотя бы одно из этих состояний равновесия принадлежит* $\mathrm{cl}\, D \setminus D$.

Доказательство. В силу [11, Theorem 3.2] $M^n = \bigcup\limits_{p\in\Omega_{f^t}} W^s_p = \bigcup\limits_{p\in\Omega_{f^t}} W^u_p$. Следовательно, $D \subset \bigcup\limits_{p\in\Omega^i_{f^t}, i\neq 1} W^s_p$. Поскольку D связно и имеет размерность n (а добавление или удаление подмножеств размерности, меньшей $(n-1)$, не меняет числа компонент связности), то существует ровно один сток ω, такой что $D \cap W^s_\omega \neq \emptyset$. Аналогично, существует ровно один источник α, такой что $D \cap W^u_\alpha \neq \emptyset$. Поскольку граница множества D образована сферами из множества L_{f^t}, и каждая из этих сфер в силу предложения 3.1 содержит либо стоковое либо источниковое состояние равновесия, то хотя бы одно из состояний равновесия α, ω принадлежит границе множества D. Пусть $\omega \in \partial D$. Тогда возможны два случая. Случай 1) $\alpha \in D$, тогда предложение доказано.

Случай 2) $\alpha \notin \partial D$. Покажем, что в случае 2 $\alpha \in D$. Поскольку ω — единственная узловая точка, принадлежащая границе множества D, граница D состоит из ω и объединения $(n-1)$-мерных неустойчивых многообразий седловых состояний равновесия, замыкания которых содержат точку ω.

Предположим противное, $\alpha \notin \operatorname{cl} D$. Поскольку пересечение $W^u_\alpha \cap D$ непусто, W^u_α линейно связно, а по предположению $\alpha \notin D$, то найдется точка $x \in W^u_\alpha \cap \partial D$. Следовательно, найдется такое тривиальное седловое состояние равновесия $\sigma_{n-1} \in \Omega^{n-1}_{f^t}$, что $\operatorname{cl} W^u_{\sigma_{n-1}} \subset \partial D$ и $W^u_\alpha \cap W^u_{\sigma_{n-1}} \neq \emptyset$, что противоречит определению неустойчивого многообразия гиперболического состояния равновесия потока. Таким образом, $\alpha \in D \subset \operatorname{cl} D$.
Доказательство завершено.

Следствие 3.1. *Для любого $D \in D_{f^t}$ пересечение $D \cap \Omega_{f^t}$ состоит либо ровно из одного узлового состояния равновесия, либо из нескольких нетривиальных седловых состояний равновесия, либо из нескольких нетривиальных седловых состояний равновесия и в точности одного узлового состояния равновесия. Граница множества D образована либо одним, либо двумя букетами сфер из множества L_{f^t}.*

Лемма 3.2. *Пусть компонента связности $D \in D_{f^t}$ содержит нетривиальные седловые состояния равновесия потока $f^t \in G(M^n)$, сток ω принадлежит границе множества D и $\sigma^1_{n-1}, \dots \sigma^\gamma_{n-1} \in \Omega^{n-1}_{f^t}$ — седловые состояния равновесия, такие что $\omega \in \operatorname{cl} W^u_{\sigma^i_{n-1}}$ для любого $i \in \{1, \dots, \gamma\}$, $\gamma \geq 1$, и букет $\bigcup\limits_{i=1}^{\gamma} \operatorname{cl} W^u_{\sigma_i}$ образует компоненту связности границы множества D. Тогда для любой окрестности U множества $\bigcup\limits_{i=1}^{\gamma} \operatorname{cl} W^u_{\sigma_i}$ существует гладко вложенная сфера без контакта $S^{n-1} \subset U \cap D$.*

Доказательство. Пусть $B_\omega \subset U \cap W^s_\omega$ — шар размерности n, ограниченный сферой без контакта и такой, что $\omega \in \operatorname{int} B_\omega$. Поскольку сферы из объединения $\{\operatorname{cl} W^u_{\sigma^i_{n-1}}\}$ пересекаются только в точке ω, то существуют окрестности $\{U_i\}$ этих сфер, такие что для любых i, j пересечение $U_i \cap U_j$ лежит внутри B_ω. В силу леммы 3.1 для каждого $i \in \{1, \dots, \gamma\}$ существует гладкая сфера без контакта $S_i \subset U_i \cap D$. Тогда пересечение $\partial B_\omega \cap S_i$ является гладко вложенной в ∂B_ω сферой размерности $(n-2)$, ограничивающей открытый $(n-1)$-шар $D_i \subset \partial B_\omega$, имеющий непустое пересечение с $W^u_{\sigma^i_{n-1}}$. Поскольку букет $\bigcup\limits_{i=1}^{\gamma} \operatorname{cl} W^u_{\sigma_i}$ образует компоненту связности границы множества D, то для любых $i \neq j$ шары D_i, D_j не пересекаются, $i, j \in \{1, \dots, \gamma\}$. Из определения следует, что сфера $\partial B_\omega \cap S_i$ ограничивает открытый шар $\widehat{D}_i \subset S_i$, лежащий вне шара B_ω. Положим $\widehat{S} = (\partial B_\omega \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{\gamma} D_i) \cup \bigcup\limits_{i=1}^{\gamma} \widehat{D_i}$. Сгладив сферу $\widehat{S}$, получим искомую сферу без контакта.
Доказательство завершено.

Доказательство леммы 1.1 и предложения 1.2.

Рассмотрим случаи $g = 0, g \neq 0$ по отдельности. Пусть $g = 0$. В этом случае M^n односвязно и аналогично [18, Предложение 6] доказывается, что каждая локально плоская сфера S^{n-1} делит его на две компоненты связности. Пусть компонента связности $D \in D_{f^t}$ содержит нетривиальные седловые состояния равновесия. В силу следствия 3.1 ее граница ∂D состоит либо из одного, либо из двух букетов сфер из множества L_{f^t}. В первом случае в силу леммы 3.2 найдется сфера без контакта $S_{_D} \subset D$ такая, что $M^n \setminus \operatorname{int} T(S_{_D})$ состоит из двух компонент связности D_+, D_-, таких что $D_- \subset D$

и неблуждающее множество ограничения потока f^t на D_- состоит из нетривиальных седел и единственного узла. Во втором случае в силу леммы 3.2 найдутся две сферы без контакта $S_{D,\omega}, S_{D,\alpha}, \subset D$, такие что $M^n \setminus (\operatorname{int} T(S_{D,\omega}) \cup \operatorname{int} T(S_{D,\alpha}))$ состоит из трёх компонент связности D_1, D_2, D_3, таких что $D_3 \subset D$ и неблуждающее множество ограничения потока f^t на D_3 состоит из нетривиальных седел. Найдем аналогичные сферы для каждой из компонент связности $D \in D_{f^t}$, содерждащей нетривиальные седловые состояния равновесия, совокупность этих сфер и будет искомым минимальным разбивающим набором сфер. Поскольку каждая из разбивающих сфер делит многообразие M^n на две части, то множество $M^n \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k_{f^t}} \operatorname{int} T(S_i^{n-1})$ состоит из $l_{f^t} = k_{f^t} + 1$ компоненты связности.

Пусть теперь $g > 0$ и компонента $D \in D_{f^t}$ содержит нетривиальные седловые состояния равновесия. Снова применим следствие 3.1. Если граница ∂D состоит из одного букета сфер, то аналогично случаю $g = 0$ найдем разбивающую сферу, деляющую M^n на две компоненты связности, одна из которых содержится в D. Если граница ∂D состоит из двух букетов сфер, то найдутся две две сферы без контакта $S_{D,\omega}, S_{D,\alpha}, \subset D$, отделяющие компоненту связности $D_- \subset D$, несущую нетривиальные седла. При этом возможны два случая: 1) множество $M^n \setminus D_-$ несвязно, 2) $M^n \setminus D_-$ связно. Найдем аналогичные сферы для каждой компоненты связности $D \in D_{f^t}$, в итоге получим искомый минимальный набор разбивающих сфер, которые разобьют многообразие M^n на $l_{f^t} \in [m^0_{f^t} + 1, k_{f^t} + 1]$ компонент связности.

Из построения следует, что многообразие M^n является связной суммой многообразий, полученных из M^n перестройками вдоль сфер $S_1^{n-1}, \dots, S_{k_{f^t}}^{n-1}$, $k_{f^t} \in [m^0_{f^t}, 2m^0_{f^t}]$, при этом ровно $m^0_{f^t}$ слагаемых в связной сумме несут нетривиальные седловые состояния равновесия. Теперь справедливость предложения 1.2 непосредственно вытекает из построения минимального разбивающего набора, предложения 3.2 и следствия 3.1.
Доказательство завершено.

4. Условие эквивалентности гладких потоков при наличии глобальной секущей

Докажем предложение 1.1, тогда теорема 1.1 будет непосредственным следствием из этого предложения и леммы 1.1. Пусть для потоков f^t, f'^t существуют сферы без контакта S^{n-1}, S'^{n-1}, такие что потоки f^t_-, f'^t_- и потоки f^t_+, f'^t_+ топологически эквивалентны посредством гомеоморфизмов $h_- : P_- \to P'_-$, $h_+ : P_+ \to P'_+$, таких что ограничение $h_+|_{S_+^{n-1}}$ гомеоморфизма h_- на сферу S_+^{n-1} согласовано с гомеоморфизмом $h_-|_{S_-^{n-1}}$. Покажем, что f^t, f'^t топологически эквивалентны.

Для любой точки $x \in S_-^{n-1}$ положим $y = \mathcal{O}_{f^t}(x) \cap S_+^{n-1}$, $x' = h_-(x)$, $y' = h_+(y)$. Для любой точки $z \in \mathcal{O}_{f^t}(x) \cap T(S^{n-1})$ обозначим через $\rho(z, x)$ длину отрезка траектории $\mathcal{O}_{f^t}(x)$, заключенного между точками z и x. Пусть $z' \in T(S'^{n-1})$ — точка, лежащая на траектории $\mathcal{O}_{f'^t}(x')$ потока f'^t; $\rho'(z', x')$ — длина отрезка траектории $\mathcal{O}_{f'^t}(x')$, заключенного между точками z' и x'. Определим гомеоморифизм $H : M^n \to M^n$ следующим образом:

$$H(z) = \begin{cases} h_-(z), x \in P_-; \\ h_+(z), x \in P_+; \\ z', x \in \operatorname{int} T(S^{n-1}), \dfrac{\rho(x,z)}{\rho(x,y)} = \dfrac{\rho'(x',z')}{\rho'(x',y')}. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Благодарности. Автор благодарит Е. Я. Гуревич за постановку задачи и плодотворные обсуждения. Публикация подготовлена в ходе проведения исследования (№ 23-00-028) в рамках программы «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)» в 2023–2024 гг.

Список литературы

1. Bonatti C., Grines V. Z., Medvedev V. S., Pecou E. Three-manifolds admitting Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves // Topology and Its Applications. 2002. Vol. 117, No. 2. pp. 335–344. DOI: https://doi.org/10.1016/S0166-8641(01)00028-1

2. Grines V. Z., Gurevich E. Y., Pochinka O. V. Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersections // Journal of Mathematical Sciences. 2015. Vol. 208, No. 1. pp. 81–90. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-015-2425-2

3. Гринес В. З., Жужома Е. В., Медведев В. С. О структуре несущего многообразия для систем Морса-Смейла без гетероклинических пересечений // Труды МИАН. 2017. Т. 297, № 1. С. 201–210. DOI: https://doi.org/10.1134/S0371968517020108

4. Гринес В. З., Гуревич Е. Я. Индекс Морса седловых состояний равновесия градиентно-подобных потоков на связной сумме $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ // Математические заметки. 2022. Т. 111, № 4. С. 616–619. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm13351

5. Гринес В. З., Гуревич Е. Я. Комбинаторный инвариант градиентно-подобных потоков на связной сумме $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ // Математический сборник. 2023. *в печати*

6. Гринес В. З., Гуревич Е. Я. Топологическая классификация потоков без гетероклинических траекторий на связной сумме многообразий $\mathbb{S}^{n-1} \times$ $\times \mathbb{S}^1$// Успехи математических наук. 2022. Т. 77, № 4. С. 201–202. DOI: https://doi.org/10.4213/rm10047e

7. Kervaire M. A., Milnor J. W. Groups of homotopy spheres: I // Ann. of Math. 1963. Vol. 77, No 3. pp. 504–537. DOI: https://doi.org/10.2307/1970128

8. Milnor J. W. A unique decomposition theorem for 3-manifolds // Amer. J. Math. 1962. Vol. 84, No. 1. pp. 1–7. DOI: https://doi.org/10.2307/2372800

9. Мандельбаум Р. Четырехмерная топология / пер. с англ. О. Я. Виро. М.: Мир, 1981. 278 с.

10. Медведев В. С., Уманский Я. Л. О разложении n-многообразий на простые многообразия // Известия вузов. 1979. Т. 1. С. 46–50.

11. Смейл С. Дифференцируемые динамические системы // УМН. 1970. Т. 25, № 1. С. 113–185.

12. Smale S. On gradient dynamical systems // Annals of Mathematics. 1961. Vol. 74, No. 1. pp. 199–206. DOI: https://doi.org/10.2307/1970311

13. Meyer K. R. Energy functions for Morse-Smale systems // Amer. J. Math. 1968. Vol. 90, No. 4. pp. 1031–1040. DOI: https://doi.org/10.2307/2373287

14. Гринес В. З., Гуревич Е. Я. Проблемы топологической классификации многомерных систем Морса–Смейла. М.–Ижевск: Изд-во ИКИ. 2022. 292 с.

15. Палис Ж., Ди Мелу В. Геометрическая теория динамических систем. Введение. М.: Мир, 1986. 304 с.

16. Гомпф Р., Штипшиц А. Четырехмерные многообразия и исчисление Кирби. М.: Изд-во МЦНМО, 2013. 622 с.

17. Новиков С. П., Тайманов И. А. Современные геометрические структуры и поля – 2-е изд., испр. М.: Изд-во МЦНМО, 2014. 584 с.

18. Гринес В. З., Гуревич Е. Я. О классификации потоков Морса–Смейла на проективно-подобных многообразиях // Известия РАН. Серия математическая. 2022. Т. 86, № 5. С. 43–72. DOI: https://doi.org/10.4213/im9197

Поступила 12.02.2023; доработана после рецензирования 10.04.2023; принята к публикации 25.05.2023

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: автор заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. C. Bonatti, V. Z. Grines, V. S. Medvedev, E. Pecou, “Three-manifolds admitting Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves”, *Topology and Its Applications*, **117**:2 (2002), 335–344. DOI: https://doi.org/10.1016/S0166-8641(01)00028-1

2. V. Z. Grines, E. Y. Gurevich, O. V. Pochinka, “Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersections”, *Journal of Mathematical Sciences*, **208**:1 (2015), 81–90. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-015-2425-2

3. V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, “On the structure of the ambient manifold for Morse-Smale systems without heteroclinic intersections”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **297**:1 (2017), 201–210. DOI: https://doi.org/10.1134/S0371968517020108

4. V. Z. Grines, E. Y. Gurevich, “Morse index of saddle states of equilibrium of gradient-like flows on the connected sum of $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$”, *Mathematical Notes*, **111**:4 (2022), 624–627. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434622030312

5. V. Z. Grines, E. Y. Gurevich, “Combinatorial invariant of gradient-like flows on the connected sum of $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ [In Print]”, *Matematicheskiy sbornik*, 2023 (In Russ.).

6. V. Z. Grines, E. Y. Gurevich, “Topological classification of flows without heteroclinic intersections on a connected sum of manifolds $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$”, *Russian Mathematical Surveys*, **77**:4 (2022), 759–761. DOI: https://doi.org/10.4213/rm10047e

7. M. A. Kervaire, J. W. Milnor, “Groups of homotopy spheres: I”, *Ann. of Math.*, **77**:3 (1963.), 504–537. DOI: https://doi.org/10.2307/1970128

8. Milnor J.W., “A unique decomposition theorem for 3-manifolds”, *Amer. J. Math*, **84**:1 (1962), 1–7. DOI: https://doi.org/10.2307/2372800

9. R. Mandelbaum, “Four-dimensional topology”, 1978, 278 p.

10. V. S. Medvedev, Y. L. Umanskiy, “On the splitting of n-manifolds into simple manifolds”, *Izvestiya vuzov*, **1** (1979), 46–50 (In Russ.).

11. S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.

12. S. Smale, “On gradient dynamical systems”, *Annals of Mathematics*, **74**:1 (1961), 199–206. DOI: https://doi.org/10.2307/1970311

13. K. R. Meyer, “Energy functions for Morse-Smale systems”, *Amer. J. Math.*, **90**:4 (1968), 1031–1040. DOI: https://doi.org/10.2307/2373287

14. V. Z. Grines, E. Y. Gurevich, “Problems of topological classification of multidimensional Morse-Smale systems”, 2022 (In Russ.), 292 p.

15. J. Palis, W. de Melo, *Geometric theory of dynamical systems. An introduction*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982, 198 p.

16. R. E. Gompf, A. I. Stipsicz, *4-Manifolds and Kirby calculus*, **20**, American Mathematical Society, Providence, 1999, 558 p.

17. S. Novikov, I. Taimanov, *Modern geometric structures and fields*, MTSNMO Publ., Moscow, 2014 (In Russ.), 584 p.

18. V. Z. Grines, E. Y. Gurevich, “On classification of Morse-Smale flows on projective-like manifolds”, *Izvestiya: Mathematics*, **86**:5 (2022), 876–902. DOI: https://doi.org/10.4213/im9197e

Submitted 12.02.2023; Revised 10.04.2023; Accepted 25.05.2023

The author have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The author declare no conflict of interest.