DOI 10.15507/2079-6900.25.202302.22-36 ISSN 2079-6900 (Print)
Оригинальная статья ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.518

О глобальных экстремумах степенных функций Такаги

О. Е. Галкин, С. Ю. Галкина, А. А. Тронов

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

Аннотация. Степенные функции Такаги S_p по конструкции аналогичны непрерывной, но нигде не дифференцируемой функции Такаги, описанной в 1903 г. Функции S_p имеют один вещественный параметр $p > 0$ и задаются на числовой прямой с помощью ряда $S_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(S_0(2^n x)/2^n)^p$, где $S_0(x)$ — расстояние между точкой $x \in \mathbb{R}$ и ближайшей к ней целой точкой. Мы показываем, что при любом $p > 0$ функции S_p на $\mathbb{R}$ являются всюду непрерывными, но нигде не дифференцируемыми. Далее для степенных функций Такаги мы выводим функциональные уравнения. С их помощью можно, в частности, вычислять значения $S_p(x)$ в рациональных точках x. Кроме того, при всех значениях параметра p из интервала $(0; 1)$ мы находим глобальные экстремумы функций S_p, а также точки, где они достигаются. При этом оказывается, что глобальный максимум функций S_p равен $2^p/(3^p(2^p - 1))$ и достигается только в точках вида $(q + 1/3)$ и $(q + 2/3)$, где q — произвольное целое число. Глобальный минимум функций S_p равен 0 и достигается только в целых точках. Используя результаты о глобальных экстремумах, мы получаем двусторонние оценки для функций S_p и находим точки, в которых эти оценки достигаются.

Ключевые слова: степенная функция Такаги, непрерывность, нигде не дифференцируемость, функциональные уравнения, глобальный экстремум

Для цитирования: Галкин О. Е., Галкина С. Ю., Тронов А. А. О глобальных экстремумах степенных функций Такаги // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 2. С. 22–36. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202302.22-36

Об авторах:

Галкин Олег Евгеньевич, доцент кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0003-2085-572X, olegegalkin@ya.ru

Галкина Светлана Юрьевна, доцент кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2476-2275, svetlana.u.galkina@mail.ru

Тронов Антон Александрович, студент магистратуры факультета информатики, математики и компьютерных наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: http://orcid.org/0009-0000-6454-1226, tronovaa@yandex.ru

Original article

MSC2020 26A15, 26A16, 26A27

On global extrema of power Takagi functions

O. E. Galkin, S. Yu. Galkina, A. A. Tronov

National Research University «Higher School of Economics» (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

Abstract. By construction, power Takagi functions S_p are similar to Takagi's continuous nowhere differentiable function described in 1903. These real-valued functions $S_p(x)$ have one real parameter $p > 0$. They are defined on the real axis $\mathbb{R}$ by the series $S_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(S_0(2^n x)/2^n)^p$, where $S_0(x)$ is the distance from real number x to the nearest integer number. We show that for every $p > 0$, the functions S_p are everywhere continuous, but nowhere differentiable on $\mathbb{R}$. Next, we derive functional equations for Takagi power functions. With these, it is possible, in particular, to calculate the values $S_p(x)$ at rational points x. In addition, for all values of the parameter p from the interval $(0;1)$, we find the global extrema of the functions S_p, as well as the points where they are reached. It turns out that the global maximum of S_p equals to $2^p/(3^p(2^p-1))$ and is reached only at points $q+1/3$ and $q+2/3$, where q is an arbitrary integer. The global minimum of the functions S_p equals to 0 and is reached only at integer points. Using the results on global extremes, we obtain two-sided estimates for the functions S_p and find the points at which these estimates are reached.

Keywords: power Takagi function, continuity, nowhere differentiability, functional equations, global extrema

For citation: *O. E. Galkin, S. Yu. Galkina, A. A. Tronov.* On global extrema of power Takagi functions. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 25:2(2023), 22–36. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202302.22-36

About the authors:

Oleg E. Galkin, Associate Professor, Department of Fundamental Mathematics, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), Ph.D. (Phys.-Math.), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2085-572X, olegegalkin@ya.ru

Svetlana Yu. Galkina, Associate Professor, Department of Fundamental Mathematics, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), Ph.D. (Phys.-Math.), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2476-2275, svetlana.u.galkina@mail.ru

Anton A. Tronov, master's student of the Faculty of Informatics, Mathematics and Computer Science, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), ORCID: http://orcid.org/0009-0000-6454-1226, tronovaa@yandex.ru

1. Введение

Данная статья посвящена изучению степенных функций Такаги $S_p(x)$. Эти функции по конструкции аналогичны непрерывной, но нигде не дифференцируемой функции Такаги $T(x)$, описанной в 1903 г. в работе [1]. Они имеют один вещественный параметр $p > 0$ и задаются следующим образом:

Определение 1.1. Степенной функцией Такаги с параметром (показателем) $p > 0$ *мы называем вещественнозначную функцию* S_p, *задаваемую на числовой оси* $\mathbb{R}$ *с помощью равенства*

$$S_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{S_0(2^n x)}{2^n} \right)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_0^p(2^n x)}{2^{np}}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

где $S_0(x) = |x - [x + 1/2]| = |\{x + 1/2\} - 1/2| = \rho(x, \mathbb{Z}) = \inf_{q \in \mathbb{Z}} |x - q|$ — *расстояние между точкой* x *и ближайшей к ней целой точкой;* $[y]$ — *целая часть числа* $y \in \mathbb{R}$*;* $\{y\}$ — *дробная часть числа* y.

При $p = 1$ функция $S_p(x)$ совпадает с функцией Такаги $T(x)$ из [1].

Частичные суммы ряда (1.1) будем обозначать через $S_{p,m}(x)$:

$$S_{p,m}(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{S_0^p(2^k x)}{2^{kp}}.$$

Иллюстрация 1. Графики степенных функций Такаги $y = S_p(x)$, изображенные линией синего цвета, можно увидеть далее на двух рисунках: во-первых, при $p = 0{,}5$ — на Рис. 1.1, вместе с графиками частичных сумм $y = S_{p,n}(x)$ при $n = 0, 1, 2, 3, 4$, изображенными линиями красного либо зеленого цвета; во-вторых, при $p = 0{,}7$ — на Рис. 4.1, вместе с графиками $y = S_{p,3}(x)$ и $y = \widetilde{S}_{p,3}(x)$ (см. предложение 4.1), изображенными линиями красного и зеленого цветов соответственно. Вертикальные пунктирные линии на этих рисунках указывают положение двух точек глобального максимума на отрезке $[0; 1]$: $x = 1/3$ и $x = 2/3$ (см. далее теорему 4.1).

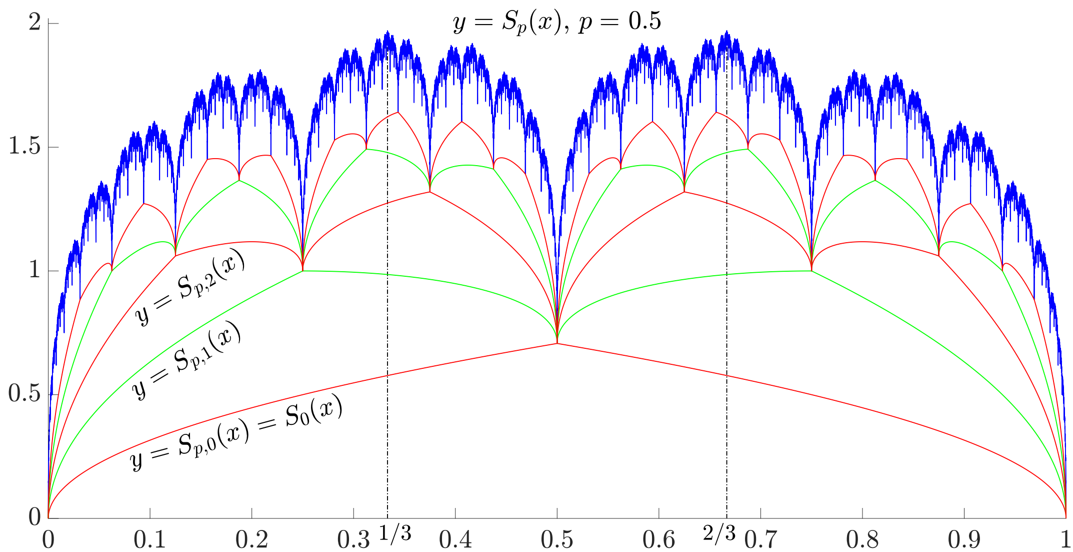

Рис. 1.1. График функции $y = S_p(x)$ при $p = 0{,}5$

Fig. 1.1. Graph of the function $y = S_p(x)$ for $p = 0{,}5$

Функции S_p при любом $p > 0$ являются непрерывными, но нигде не дифференцируемыми на $\mathbb{R}$, как показано нами далее в теоремах 2.1 и 2.3.

Примеры непрерывных нигде не дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$ одним из первых построил Вейерштрасс (не позднее 1872 г.). В дальнейшем появилось множество других примеров таких функций. В частности, свои конструкции для их построения предложили Дини в 1878 г. и Дарбу в 1879 г. Краткий очерк истории развития теории непрерывных нигде не дифференцируемых функций можно найти в работе [2, Глава V]. Обзор некоторых конструкций непрерывных нигде не дифференцируемых функций имеется в [3]. В последние годы ряд новых способов построения таких функций был предложен, в частности, в работах [4–5].

Функция Такаги $T(x)$, описанная ещё в 1903 году [1], до сих пор привлекает внимание исследователей в силу простоты своей конструкции. Прекрасный обзор большого числа работ, посвященных этой функции и её обобщениям, можно найти в работе [6]. В 1959 г. Кахан [7, Lieu 1] нашел точки локальных и глобальных экстремумов функции $T(x)$. Одним из широких обобщений функции Такаги является *класс Такаги* [8, Sec. 2], состоящий из вещественных функций вида $\sum_{n=0}^{\infty} c_n S_0(2^n x)$, где числа $c_0, c_1, c_2, \ldots$ образуют абсолютно сходящийся ряд. Несколькими авторами изучалось также подмножество этого класса, состоящее из функций, имеющих один вещественный параметр $v = 1/2^p$ и задаваемых формулой

$$T_v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v^n S_0(2^n x) = \sum_{n=0}^{\infty} S_0(2^n x)/2^{np}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Это подмножество можно назвать *показательным классом Такаги–Ландсберга* (см. [9–10]). В работе [11] фактически вычислен глобальный максимум функции $T_{1/\sqrt{2}}(x)$, и затем это использовано для получения точной оценки суммы коэффициентов Фурье–Хаара функций ограниченной вариации на отрезке. В 2009 г. Я. Табор и И. Табор в работе [12] для точной оценки непрерывных полувыпуклых функций поставили и частично решили задачу поиска глобальных максимумов функций T_v. Обзор некоторых свойств функций из показательного класса Такаги–Ландсберга можно найти в [13]. Полностью задача поиска глобальных экстремумов функций T_v при $v \in (-1; 1)$ была решена в [9] Ханом и Шидом, а также в работе [10].

Непрерывные нигде не дифференцируемые функции используются не только в различных областях математики: математическом анализе, теории вероятностей, теории чисел и др. (см., например, [6, Sect. 8]), но и в физике [14]. Например, функция $H_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S_0^p(2^n x)/2^n$ была введена Хази и Палесом [15] для оценки функций, (ε, p)-выпуклых по Йенсену. В [16–17] и других работах нигде не дифференцируемые функции были применены для оценки цифровых сумм. В работах [18–17] для поиска глобальных экстремумов произвольных (в т. ч. нигде не дифференцируемых) функций был разработан метод крайних подаргументов и надаргументов. В статье [19] функция Такаги используется для оптимизации передачи точечной нагрузки на грунт. В работе [20] авторы изучают свойства потоков Гамильтона–Якоби с нигде не дифференцируемыми начальными условиями. Таким образом, несмотря на сложность изучения нигде не дифференцируемых функций, интерес к ним постоянно растет.

В настоящей статье мы при различных значениях параметра p изучаем непрерывность, нигде не дифференцируемость, функциональные уравнения и глобальные экстремумы степенных функций Такаги S_p, заданных формулой (1.1). Эти функции интересны, в частности, тем, что на них удалось отработать различные методы исследования нигде не дифференцируемых функций аналогичной конструкции. Новизна и в то же время сложность проводимого исследования состоит ещё и в том, что при $p \neq 1$ слагаемые ряда (1.1), задающего функции S_p, не являются кусочно-линейными, в отличие, например, от ряда (1.2), задающего функции T_v.

Кратко опишем основные результаты работы и её структуру. Статья состоит из пяти пунктов. *Пункт 1.* — это введение. *В пункте 2.* мы доказываем, что при любом $p > 0$ функции S_p на $\mathbb{R}$ непрерывны, имеют период 1, симметричны и ограничены (теорема 2.1), а также что при $p \in (0;1)$ они нигде не дифференцируемы (теорема 2.3). *В пункте 3.* в случае $p > 0$ мы выводим функциональные уравнения $S_p(x) = S_{p,m-1}(x) + S_p(2^m x)/2^{mp}$ при $m \in \mathbb{N}$ (теорема 3.1) и вычисляем значение $S_p(1/3) = 2^p/\big(3^p(2^p-1)\big)$ (лемма 3.1). *В пункте 4.* для любого $p \in (0;1)$ показано, что глобальный максимум функции S_p равен $2^p/(3^p(2^p-1))$ и достигается только в точках вида $q+1/3$ и $q+2/3$, где $q \in \mathbb{Z}$, а глобальный минимум равен 0 и достигается только в целых точках (теорема 4.1). В заключение в предложении 4.1 получены двусторонние оценки $S_{p,n} \leqslant S_p \leqslant S_{p,n} + 1/(3^p(2^p-1)2^{np})$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$, и доказана их точность. *В пункте 5.* описаны возможные направления дальнейших исследований.

Далее в работе мы используем для множества натуральных чисел обозначение $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

2. Непрерывность и нигде не дифференцируемость степенных функций Такаги

В этом параграфе мы доказываем, что степенные функции Такаги на $\mathbb{R}$ непрерывны, периодичны, симметричны, ограничены при $p > 0$ (теорема 2.1), и что они нигде не дифференцируемы при $p \in (0;1)$ (теорема 2.3).

З а м е ч а н и е 2.1. *Функция $S_0(x) = \rho(x, \mathbb{Z})$, описанная в определении 1.1, очевидно, является непрерывной, четной, имеет период 1 и обладает следующим свойством симметрии относительно полуцелых точек числовой оси:*

$$S_0(q/2 + x) = S_0(q/2 - x) \quad \text{при любых } q \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Более того, $S_0(x)$ для любого $x \in [0;1]$ может быть задана формулой

$$S_0(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \in [0, 1/2]; \\ 1 - x & \text{при } x \in [1/2, 1]. \end{cases} \tag{2.2}$$

Т е о р е м а 2.1. *При любом $p > 0$ степенная функция Такаги S_p на множестве $\mathbb{R}$ всюду определена, непрерывна, четна, имеет период 1 и обладает следующим свойством симметрии:*

$$S_p(x) = S_p(q - x) \quad \text{при всех } q \in \mathbb{Z} \text{ и всех } x \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Кроме того, для любого $p > 0$ функция S_p ограничена, причем для всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $0 \leqslant S_p(x) \leqslant 1/(2^p - 1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольное число $p > 0$.

1. Сначала с помощью признака Вейерштрасса докажем равномерную сходимость функционального ряда (1.1), задающего функцию S_p. Очевидно, при всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $0 \leqslant S_0(x) \leqslant 1/2$. Поэтому верны соотношения $0 \leqslant S_0^p(2^n x)/2^{np} \leqslant (1/2)^p/2^{np} = 1/2^{(n+1)p}$. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} 1/2^{(n+1)p}$ сходится, и его сумма равна $1/(2^p - 1)$.

Следовательно, функциональный ряд (1.1) сходится равномерно по $x \in \mathbb{R}$, причем при всех $x \in \mathbb{R}$ верно неравенство $0 \leqslant S_p(x) \leqslant 1/(2^p - 1)$.

2. Из равномерной сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} S_0^p(2^n x)/2^{np}$ и непрерывности его слагаемых вытекает непрерывность его суммы $S_p(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

3. Периодичность функции $S_p(x)$ следует из формулы (1.1) и наличия периода 1 у функции S_0 (см. замечание 2.1).

4. Равенство (2.3) следует из формулы (1.1) и равенства (2.1).

Доказательство завершено.

Нигде не дифференцируемость функций S_p вытекает из теоремы Ф. Катера [4, Theorem 1]. Учитывая, в частности, что данный автор для понятия «вогнутость» почему-то использовал слово «convex», эту теорему можно сформулировать следующим образом:

Теорема 2.2 (Ф. Катер, 2003). *Пусть $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ — последовательность неотрицательных действительных чисел, такая что $\sum_{j=1}^{\infty} a_j < \infty$. Пусть $(b_j)_{j=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, такая что b_j делит b_{j+1} при любом $j \in \mathbb{N}$, и последовательность $(a_j b_j)_{j=1}^{\infty}$ не сходится к 0. Для каждого $j \in \mathbb{N}$ пусть задана непрерывная функция $f_j\colon \mathbb{R} \to [0;1]$, такая что $f_j(k) = 0$, $f_j(k+1/2) = 1$ и f_j вогнута на интервале $(k, k+1)$ при каждом $k \in \mathbb{Z}$. Тогда функция $\sum_{j=1}^{\infty} a_j f_j(b_j x)$ непрерывна и не имеет ни конечной левой, ни конечной правой производной ни в одной точке $x \in \mathbb{R}$.*

Теорема 2.3. *При любом $p \in (0;1)$ у степенной функции Такаги S_p нет ни конечной левой, ни конечной правой производной ни в одной точке из $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Для каждого $j \in \mathbb{N}$ положим $a_j = 1/2^{jp}$, $b_j = 2^{j-1}$ и зададим на $\mathbb{R}$ функцию $f_j(x) = 2^p S_0^p(x)$. Тогда последовательности $(a_j)_{j=1}^{\infty}$, $(b_j)_{j=1}^{\infty}$ и $(f_j)_{j=1}^{\infty}$, очевидно, удовлетворяют условиям теоремы 2.2. Значит, в силу этой теоремы, функция $S_p(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j f_j(b_j x)$ не имеет ни конечной левой, ни конечной правой производной ни в одной точке $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство завершено.

3. Функциональное уравнение для степенных функций Такаги

В этом параграфе мы выводим функциональные уравнения для функции S_p (теорема 3.1) и вычисляем значения $S_p(1/3)$, $S_p(2/3)$ (лемма 3.1).

Теорема 3.1. *При любых $p > 0$ и $m \in \mathbb{N}$ степенная функция Такаги $S_p(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению*

$$S_p(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{S_0^p(2^k x)}{2^{kp}} + \frac{S_p(2^m x)}{2^{mp}} = S_{p,m-1}(x) + \frac{S_p(2^m x)}{2^{mp}}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Доказательство. В силу равенства (1.1) для каждого $x \in \mathbb{R}$ имеем:

$$S_p(2^m x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_0^p(2^n \cdot 2^m x)}{2^{np}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_0^p(2^{n+m} x)}{2^{np}}.$$

Разделив обе части этого равенства на 2^{mp}, получим:

$$\frac{S_p(2^m x)}{2^{mp}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_0^p(2^{n+m}x)}{2^{(n+m)p}} = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{S_0^p(2^k x)}{2^{kp}} = S_p(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{S_0^p(2^k x)}{2^{kp}}.$$

Отсюда следует равенство (3.1), которое мы доказываем.
Доказательство завершено.

Применяя теорему 3.1 в случае $m = 1$, получаем такое следствие:

Следствие 3.1. *При любом $p > 0$ степенная функция Такаги S_p удовлетворяет функциональному уравнению*

$$S_p(x) = S_0^p(x) + \frac{S_p(2x)}{2^p}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.2}$$

которое равносильно уравнению

$$S_p(2x) = 2^p\big(S_p(x) - S_0^p(x)\big), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

Применим это следствие для вычисления $S_p(1/3)$ и $S_p(2/3)$.

Лемма 3.1. *Для любого $p > 0$ значения функции $S_p(x)$ в точках $x = 1/3$ и $x = 2/3$ можно вычислить по формуле $S_p(1/3) = S_p(2/3) = 2^p/\big(3^p(2^p - 1)\big)$.*

Доказательство. Подставив в формулу (3.3) значение $x = 1/3$, получим: $S_p(2/3) = 2^p\big(S_p(1/3) - S_0^p(1/3)\big)$. Следовательно, так как $S_0^p(1/3) = 1/3$ в силу (2.2) и $S_p(2/3) = S_p(1/3)$ по свойству симметрии (2.3), получаем равенство $S_p(1/3) = 2^p\big(S_p(1/3) - 1/3^p\big)$. Отсюда $S_p(1/3) = 2^p/\big(3^p(2^p - 1)\big)$.
Доказательство завершено.

4. Глобальные экстремумы и двусторонняя равномерная оценка степенных функций Такаги с параметром $p \in (0;1)$

Этот параграф посвящен поиску глобальных экстремумов функций S_p для значений параметров $p \in (0;1)$ и поиску точек, в которых достигаются эти экстремумы (теорема 4.1). Метод, применяемый для поиска максимумов, фактически можно было бы назвать методом половинного деления. В заключение мы получаем точные двусторонние равномерные оценки функций S_p (предложение 4.1).

Для доказательства теоремы 4.1 нам понадобятся следующие три леммы.

Лемма 4.1. *Для любых действительных чисел a, b, s и p, удовлетворяющих условиям $0 < s \leqslant a < b$ и $0 < p < 1$, выполняется неравенство*

$$(a+s)^p - (a-s)^p > (b+s)^p - (b-s)^p.$$

Доказательство. Нам достаточно доказать положительность функции $f(s) = \big((a+s)^p - (a-s)^p\big) - \big((b+s)^p - (b-s)^p\big)$ при всех $s \in (0, a]$. Имеем: $f'(s) = p \cdot \big((a+s)^{p-1} - (b+s)^{p-1}\big) + p \cdot \big((a-s)^{p-1} - (b-s)^{p-1}\big) > 0$ при всех $s \in (0; a)$. Значит, в силу непрерывности $f(s)$ на отрезке $[0, a]$, функция $f(s)$ строго возрастает на $[0, a]$. Поэтому $f(s) > f(0) = 0$ для любого $s \in (0, a]$.
Доказательство завершено.

Л е м м а 4.2. *Пусть* $0 < p < 1$. *Для каждого целого неотрицательного числа* n *зададим на полуинтервале* $(0;1]$ *функцию* D_n *с помощью равенства*

$$D_n(s) = \sum_{k=0}^{n} \Big(\big(2^{n-k+2} - (-1)^{n+k} + (-1)^k \cdot 3s\big)^p - \big(2^{n-k+2} - (-1)^{n+k} - (-1)^k \cdot 3s\big)^p \Big). \quad (4.1)$$

Тогда для любого $s \in (0;1]$ *выполнятся неравенство* $D_n(s) > 0$, *если* n *четно, и неравенство* $D_n(s) < 0$, *если* n *нечетно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любых $n \in \{0,1,2,\ldots\}$, $k \in \{0,1,\ldots,n\}$ положим

$$d_{n,k}(s) = \big(2^{n-k+2} - (-1)^{n+k} + (-1)^k \cdot 3s\big)^p - \big(2^{n-k+2} - (-1)^{n+k} - (-1)^k \cdot 3s\big)^p \quad (4.2)$$

при всех $s \in (0;1]$ Тогда из (4.1) следует равенство $D_n(s) = \sum_{k=0}^{n} d_{n,k}(s)$.

1. Сначала докажем, что $D_n(s) < 0$ при нечетных n. Разобьем сумму $\sum_{k=0}^{n} d_{n,k}(s)$ на пары слагаемых: $D_n(s) = \sum_{i=0}^{(n-1)/2} \big(d_{n,2i}(s) + d_{n,2i+1}(s)\big)$. Теперь достаточно показать, что сумма каждой пары отрицательна, т. е. $d_{n,2i}(s) + d_{n,2i+1}(s) < 0$ при любых $s \in (0;1]$ и $i = 0,1,\ldots,(n-1)/2$.

Положим $a_{n,i} = 2^{n-2i+1} - 1$ и $b_{n,i} = 2^{n-2i+2} + 1$. Тогда в силу (4.2) имеем:

$$\begin{aligned} d_{n,2i}(s) + d_{n,2i+1}(s) &= (2^{n-2i+2} + 1 + 3s)^p - (2^{n-2i+2} + 1 - 3s)^p + \\ &\quad + (2^{n-2i+1} - 1 - 3s)^p - (2^{n-2i+1} - 1 + 3s)^p = \\ &= \big((b_{n,i} + 3s)^p - (b_{n,i} - 3s)^p\big) - \big((a_{n,i} + 3s)^p - (a_{n,i} - 3s)^p\big). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Поскольку $0 < 3s \leqslant 3 \leqslant a_{n,i} < b_{n,i}$, то, применяя лемму 4.1 при $a = a_{n,i}$ и $b = b_{n,i}$, получим оценку $(a_{n,i} + 3s)^p - (a_{n,i} - 3s)^p > (b_{n,i} + 3s)^p - (b_{n,i} - 3s)^p$. Из нее и из формулы (4.3) следует нужное неравенство $d_{n,2i}(s) + d_{n,2i+1}(s) < 0$.

2) Теперь докажем, что $D_n(s) > 0$ при четных n. Для этого в сумме $D_n(s) = \sum_{k=0}^{n} d_{n,k}(s)$ первое слагаемое выделим отдельно, а остальные разобьем на пары: $D_n(s) = d_{n,0}(s) + \sum_{i=1}^{n/2} \big(d_{n,2i-1}(s) + d_{n,2i}(s)\big)$. Нам достаточно показать, что в этом случае все слагаемые положительны, т. е. $d_{n,0}(s) > 0$ и $d_{n,2i-1}(s) + d_{n,2i}(s) > 0$ при любых $s \in (0;1]$ и любых $i = 0,1,\ldots,n/2$.

В силу формулы (4.2) имеем $d_{n,0}(s) = (2^{n+2} - 1 + 3s)^p - (2^{n+2} - 1 - 3s)^p > 0$. Далее положим $a_{n,i} = 2^{n-2i+2} - 1$ и $b_{n,i} = 2^{n-2i+3} + 1$. Тогда верно равенство

$$\begin{aligned} d_{n,2i-1}(s) + d_{n,2i}(s) &= (2^{n-2i+3} + 1 - 3s)^p - (2^{n-2i+3} + 1 + 3s)^p + \\ &\quad + (2^{n-2i+2} - 1 + 3s)^p - (2^{n-2i+2} - 1 - 3s)^p = \\ &= \big((a_{n,i} + 3s)^p - (a_{n,i} - 3s)^p\big) - \big((b_{n,i} + 3s)^p - (b_{n,i} - 3s)^p\big). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Поскольку $0 < 3s \leqslant 3 \leqslant a_{n,i} < b_{n,i}$, то по лемме 4.1 при $a = a_{n,i}$ и $b = b_{n,i}$ верна оценка $(a_{n,i} + 3s)^p - (a_{n,i} - 3s)^p > (b_{n,i} + 3s)^p - (b_{n,i} - 3s)^p$. Отсюда и из формулы (4.4) получаем нужное неравенство $d_{n,2i}(s) + d_{n,2i+1}(s) < 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Л е м м а 4.3. *Пусть при всех* $n = 0,1,2,\ldots$ *заданы отрезки* $[a_n, b_n]$ *с концами*

$$a_n = \frac{1}{3} - \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^{n+2}} - \frac{1}{2^{n+2}} \quad \text{и} \quad b_n = \frac{1}{3} - \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+2}}. \quad (4.5)$$

Тогда верны следующие три утверждения:

1. при каждом $n = 0, 1, 2, \dots$ длина отрезка $[a_n, b_n]$ равна $1/2^{n+1}$, а его середина $c_n = 1/3 - (-1)^n/(3\cdot 2^{n+2})$ может быть записана также в виде $c_n = q_n/2^{n+2}$, где q_n — некоторое целое число;

2. Если n — четно, то $a_{n+1} = c_n$ и $b_{n+1} = b_n$, т. е. отрезок $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ является правой половиной отрезка $[a_n, b_n]$. Если n — нечетно, то $a_{n+1} = a_n$ и $b_{n+1} = c_n$, то есть отрезок $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ является левой половиной отрезка $[a_n, b_n]$;

3. отрезки $[a_n, b_n]$ вложены: $[0, 1/2] = [a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$, и выполнено равенство $\bigcap_{n=0}^{\infty}[a_n, b_n] = \{1/3\}$.

Доказательство. 1. Имеем: $c_n = (a_n + b_n)/2 = 1/3 - (-1)^n/(3\cdot 2^{n+2})$. Поэтому $c_n = q_n/2^{n+2}$, где $q_n = (2^{n+2} - (-1)^n)/3$. Изучая остатки от деления 2^{n+2} на 3 видим, что q_n является целым числом как при четном, так и при нечетном n.

2. Если n — четное, то из (4.5) вытекают равенства $c_n = 1/3 - 1/(3\cdot 2^{n+2})$, $b_n = 1/3 + 1/(3\cdot 2^{n+1})$, $a_{n+1} = 1/3 - 1/(3\cdot 2^{n+2})$ и $b_{n+1} = 1/3 + 1/(3\cdot 2^{n+1})$. Таким образом, при четном n имеем: $a_{n+1} = c_n$ и $b_{n+1} = b_n$. При нечетном n аналогично делается проверка равенств $a_{n+1} = a_n$ и $b_{n+1} = c_n$.

3. Вложенность отрезков $[a_n, b_n]$ следует из доказанного пункта 2. Равенство $\bigcap_{n=0}^{\infty}[a_n, b_n] = \{1/3\}$ следует из теоремы Кантора о вложенных отрезках и соотношения $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1/3$, вытекающего из формул (4.5).

Доказательство завершено.

Теорема 4.1. *Пусть $p \in (0; 1)$. Тогда:*

1) глобальный максимум функции $S_p(x)$ по $x \in \mathbb{R}$ равен $2^p/(3^p(2^p - 1))$ и достигается только в точках вида $x = q + 1/3$ и $x = q + 2/3$, где q — произвольное целое число;

2) глобальный минимум функции $S_p(x)$ по $x \in \mathbb{R}$ равен 0 и достигается только в целых точках x.

Доказательство. 1. Поскольку функция $S_p(x)$ имеет период 1 и обладает свойством симметрии (2.3), то достаточно изучить ее глобальные экстремумы лишь на отрезке $[0; 1/2]$. Обозначим множество точек глобального максимума функции $S_p(x)$ на отрезке $[0; 1/2]$ через $\mathrm{Argmax}_{[0,1/2]}\, S_p$. Нам достаточно доказать, что $\mathrm{Argmax}_{[0,1/2]}\, S_p = \{1/3\}$. Для этого покажем, что для каждого $n = 0, 1, 2, \dots$ множество $\mathrm{Argmax}_{[0,1/2]}\, S_p$ содержится в отрезке $[a_n, b_n]$, заданном в лемме 4.3. Отсюда в силу пункта 3 леммы 4.3, справедливо соотношение $\mathrm{Argmax}_{[0,1/2]}\, S_p \subset \bigcap_{n=0}^{\infty}[a_n, b_n] = \{1/3\}$, ведущее к нужному равенству $\mathrm{Argmax}_{[0,1/2]}\, S_p = \{1/3\}$.

Воспользуемся методом математической индукции.

База индукции: $n = 0$. Включение $\mathrm{Argmax}_{[0,1/2]}\, S_p \subset [a_0, b_0] = [0, 1/2]$ верно по определению множества $\mathrm{Argmax}_{[0,1/2]}\, S_p$.

Шаг индукции: из включения $\mathrm{Argmax}_{[0,1/2]}\, S_p \subset [a_n, b_n]$ нужно вывести включение $\mathrm{Argmax}_{[0,1/2]}\, S_p \subset [a_{n+1}, b_{n+1}]$. Для этого зададим на полуинтервале $(0; 1]$ функцию f_n с помощью равенства

$$f_n(s) = S_p(c_n + s/2^{n+2}) - S_p(c_n - s/2^{n+2}), \quad s \in (0; 1], \tag{4.6}$$

где c_n — середина отрезка $[a_n, b_n]$ (см. лемму 4.3). Заметим, что если s пробегает полуинтервал $(0; 1]$, то $(c_n + s/2^{n+2})$ пробегает полуинтервал $(c_n, b_n]$, а точка $(c_n - s/2^{n+2})$ пробегает полуинтервал $[a_n, c_n)$. Поэтому если $f_n(s) > 0$ при всех $s \in (0; 1]$, то множество $\mathrm{Argmax}_{[0,1/2]}\, S_p$ лежит в правой половине отрезка $[a_n, b_n]$, а если $f_n(s) < 0$ при всех

$s \in (0;1]$, то $\operatorname{Argmax}_{[0,1/2]} S_p$ лежит в левой половине отрезка $[a_n, b_n]$ (далее мы увидим, что возможны только эти два варианта). Следовательно, необходимо исследовать знак функции $f_n(s)$ при $s \in (0;1]$. В силу формул (4.6) и (1.1) имеем:

$$\begin{aligned} f_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{S_0\bigl(2^k(c_n + s/2^{n+2})\bigr)}{2^k} \right)^p - \left(\frac{S_0\bigl(2^k(c_n - s/2^{n+2})\bigr)}{2^k} \right)^p = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{kp}} \Bigl(S_0^p(2^k c_n + 2^{k-n-2}s) - S_0^p(2^k c_n - 2^{k-n-2}s) \Bigr). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Преобразуем последнюю сумму, используя свойство симметрии (2.1) функции S_0. В силу пункта 1 леммы 4.3 верно равенство $c_n = q_n/2^{n+2}$, где q_n — целое число. Поэтому при любом $k \geqslant n+1$ число $2^{k+1}c_n$ тоже будет целым. Следовательно, в силу формулы (2.1) при любом $k \geqslant n+1$ будет выполняться равенство $S_0(2^k c_n + 2^{k-n-2}s) = S_0(2^k c_n - 2^{k-n-2}s)$. Поэтому в последней сумме формулы (4.7) все слагаемые с номерами $k \geqslant n+1$ равны нулю. Таким образом, в силу равенства $c_n = 1/3 - (-1)^n/(3{\cdot}2^{n+2})$ (см. пункт 1 леммы 4.3), формулу (4.7) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} f_n(s) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{kp}} \Bigl(S_0^p(2^k c_n + 2^{k-n-2}s) - S_0^p(2^k c_n - 2^{k-n-2}s) \Bigr) = \\ = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{kp}} \left(S_0^p\Bigl(\frac{2^k}{3} - \frac{(-1)^n - 3s}{3 \cdot 2^{n-k+2}} \Bigr) - S_0^p\Bigl(\frac{2^k}{3} - \frac{(-1)^n + 3s}{3 \cdot 2^{n-k+2}} \Bigr) \right). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Ввиду наличия у функции S_0 периода 1, в этом равенстве числа $2^k/3$ можно заменить на их дробные части $\{2^k/3\}$. Если $k \geqslant 0$ и четно, то $\{2^k/3\} = 1/3$, поэтому $\{2^k/3\} - \bigl((-1)^n \pm 3s\bigr)/(3 \cdot 2^{n-k+2}) \in [0, 1/2]$. Поэтому, в силу формулы (2.2) для функции S_0, имеем:

$$S_0\Bigl(\frac{2^k}{3} - \frac{(-1)^n \pm 3s}{3 \cdot 2^{n-k+2}} \Bigr) = \frac{1}{3} - \frac{(-1)^n \pm 3s}{3 \cdot 2^{n-k+2}} \quad \text{при четных } k \geqslant 0. \tag{4.9}$$

Аналогично, если $k \geqslant 0$ и нечетно, то тогда $\{2^k/3\} = 2/3$, поэтому $\{2^k/3\} - ((-1)^n \pm 3s)/(3 \cdot 2^{n-k+2}) \in [1/2, 1]$. Значит, в силу формулы (2.2), верны равенства

$$\begin{aligned} S_0\Bigl(\frac{2^k}{3} - \frac{(-1)^n \pm 3s}{3 \cdot 2^{n-k+2}} \Bigr) = S_0\Bigl(\Bigl\{ \frac{2^k}{3} \Bigr\} - \frac{(-1)^n \pm 3s}{3 \cdot 2^{n-k+2}} \Bigr) = \\ = 1 - \Bigl(\frac{2}{3} - \frac{(-1)^n \pm 3s}{3 \cdot 2^{n-k+2}} \Bigr) = \frac{1}{3} + \frac{(-1)^n \pm 3s}{3 \cdot 2^{n-k+2}} \quad \text{при нечетных } k \geqslant 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Из формул (4.9)–(4.10), видим, что при всех целых $k \geqslant 0$ верно равенство

$$S_0\Bigl(\frac{2^k}{3} - \frac{(-1)^n \pm 3s}{3 \cdot 2^{n-k+2}} \Bigr) = \frac{1}{3} - (-1)^k \frac{(-1)^n \pm 3s}{3 \cdot 2^{n-k+2}}.$$

Отсюда и из формулы (4.8) вытекает следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} f_n(s) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{kp}} \left(\Bigl(\frac{1}{3} - (-1)^k \frac{(-1)^n - 3s}{3 \cdot 2^{n-k+2}} \Bigr)^p - \Bigl(\frac{1}{3} - (-1)^k \frac{(-1)^n + 3s}{3 \cdot 2^{n-k+2}} \Bigr)^p \right) = \\ = \frac{1}{3^p \cdot 2^{(n+2)p}} \sum_{k=0}^{n} \Bigl(\bigl(2^{n-k+2} - (-1)^{n+k} + (-1)^k \cdot 3s \bigr)^p - \\ - \bigl(2^{n-k+2} - (-1)^{n+k} - (-1)^k \cdot 3s \bigr)^p \Bigr) = \frac{D_n(s)}{3^p \cdot 2^{(n+2)p}}, \end{aligned}$$

где $D_n(s)$ — функция, задаваемая равенством (4.1) и изученная в лемме 4.2.

В силу леммы 4.2 при четном n функция $D_n(s)$, а значит, и функция $f_n(s)$, положительны при любых $s \in (0;1]$, поэтому множество $\operatorname{Argmax}_{[0,1/2]} S_p$ лежит в правой половине отрезка $[a_n, b_n]$, т. е. на отрезке $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ (по пункту 4 леммы 4.3). Аналогично, при нечетном n функция $D_n(s)$, а значит и функция $f_n(s)$, отрицательны при любых $s \in (0;1]$, поэтому множество $\operatorname{Argmax}_{[0,1/2]} S_p$ лежит в левой половине отрезка $[a_n, b_n]$, т. е. тоже на отрезке $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ (по пункту 4 леммы 4.3). Таким образом, включение $\operatorname{Argmax}_{[0,1/2]} S_p \subset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ доказано и при четных, и при нечетных n.

Итак, шаг индукции выполнен, и первое утверждение теоремы доказано.

Глобальный максимум функции $S_p(x)$ на $\mathbb{R}$ в силу доказанного равен значению $S_p(1/3)$, которое в силу леммы 3.1 равно $2^p/\big(3^p(2^p-1)\big)$.

2. Утверждение теоремы о глобальном минимуме функции $S_p(x)$ вытекает из определения 1.1, задающего эту функцию.

Доказательство завершено.

Иллюстрация 2. Иллюстрациями к этой теореме могут служить Рис. 1.1 и 4.1, где для случаев $p = 0{,}5$ и $p = 0{,}7$ соответственно пунктиром отмечено положение глобальных максимумов в точках $x = 1/3$ и $x = 2/3$.

Замечание 4.1. *При $p = 1$ утверждение теоремы 4.1 о точках максимума уже неверно, поскольку, согласно Кахану* [7]*, эти точки образуют континуальное множество канторовского типа.*

Теперь с помощью доказанной теоремы 4.1 получим точные двусторонние оценки функций $S_p(x)$, равномерные по $x \in \mathbb{R}$.

Предложение 4.1. *Для любого $p \in (0;1)$, любого $n \in \{0,1,2,\ldots\}$ и любого $x \in \mathbb{R}$ положим*

$$\widetilde{S}_{p,n}(x) = S_{p,n}(x) + \frac{S_p(1/3)}{2^{(n+1)p}} = S_{p,n}(x) + \frac{1}{3^p(2^p-1)2^{np}}.$$

Тогда верна двусторонняя оценка

$$S_{p,n}(x) \leqslant S_p(x) \leqslant \widetilde{S}_{p,n}(x). \tag{4.11}$$

При каждом фиксированном n равенство здесь достигается: в левом неравенстве — при $x = q/2^{n+1}$, где $q \in \mathbb{Z}$; в правом неравенстве — при $x = (3q \pm 1)/(3{\cdot}2^{n+1})$, где $q \in \mathbb{Z}$, т. е. при $x = m/(3{\cdot}2^{n+1})$, где m — целое число, не делящееся на 3.

Доказательство. В силу функционального уравнения (3.1) при $m = n+1$ имеем $S_p(x) = S_{p,n}(x) + S_p(2^{n+1}x)/2^{(n+1)p}$. Поэтому доказываемое неравенство (4.11) равносильно неравенству

$$0 \leqslant S_p(2^{n+1}x) \leqslant S_p(1/3). \tag{4.12}$$

Из теоремы 4.1 следует, что левое неравенство здесь верно, причем оно становится равенством лишь когда число $q = 2^{n+1}x$ является целым, т. е. при $x = q/2^{n+1}$. Из той же теоремы 4.1 следует, что правое неравенство в (4.12) также верно, и оно становится равенством лишь когда число $2^{n+1}x$ имеет вид $q+1/3$ или $q-1/3$, где q — целое. Отсюда $x = (3q \pm 1)/(3{\cdot}2^{n+1})$.

Доказательство завершено.

Иллюстрация 3. Иллюстрацию к этому предложению можно увидеть на Рис. 4.1, где для случая $p = 0{,}7$ и $m = 3$ приведены графики $y = S_p(x)$ (синей линией), а также $y = S_{p,m}(x)$ (красной линией) и $y = \widetilde{S}_{p,m}(x)$ (зеленой линией).

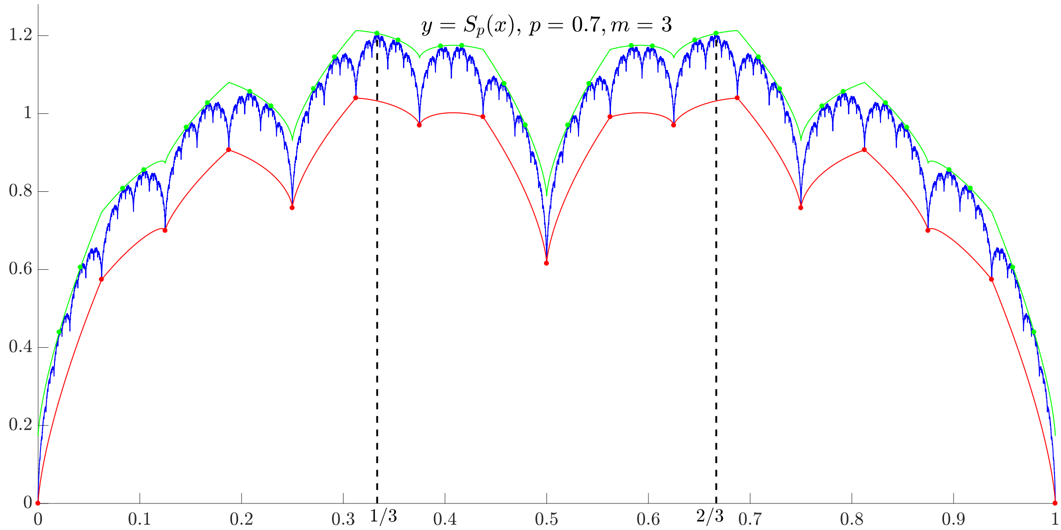

Рис. 4.1. Графики $y = S_p(x)$, $y = S_{p,m}(x)$ и $y = \widetilde{S}_{p,m}(x)$ при $p = 0{,}7$ и $m = 3$

Fig. 4.1. Graphs $y = S_p(x)$, $y = S_{p,m}(x)$ and $y = \widetilde{S}_{p,m}(x)$ for $p = 0{,}7$ and $m = 3$

5. Направления дальнейших исследований

1. Было бы интересно изучить как в случае $p \in (0; 1)$, так и в случае $p > 1$ следующие свойства функций $S_p(x)$: не только глобальные, но и локальные экстремумы; гёльдеровость и др.

2. В дальнейшем авторы предполагают, кроме того, провести исследование свойств функций из более широкого класса, например функций вида $\sum_{n=0}^{\infty} S_0^p(2^n x)/2^{nq}$, где $p > 0$ и $q > 0$.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-15-2022-1101.

Авторы благодарят Ивана Ремизова за внимание к работе.

Список литературы

1. Takagi T. A simple example of a continuous function without derivative // Tokyo Sugaku-Butsurigakkwai Hokoku. 1901. Vol. 1. pp. 176–177. DOI: https://doi.org/10.11429/subutsuhokoku1901.1.F176

2. Медведев Ф. А. Очерки истории теории функций действительного переменного. М.: Наука, 1975. 248 с.

3. Thim J. Continuous nowhere differentiable functions : Master thesis. Luleå: Luleå University of Technology, 2003. 98 p.

4. Cater F. S. Constructing nowhere differentiable functions from convex functions // Real Anal. Exchange. 2002/2003. Vol. 28, No. 2. pp. 617–623.

5. Fujita Y., Hamamuki N., Siconolfi A., Yamaguchi N. A class of nowhere differentiable functions satisfying some concavity-type estimate // Acta Mathematica Hungarica. 2020. Vol. 160. pp. 343–359. DOI: https://doi.org/10.1007/s10474-019-01007-3

6. Allaart P. C., Kawamura K. The Takagi function: a survey // Real Anal. Exchange. 2011/12. Vol. 37, No. 1. pp. 1–54. DOI: https://doi.org/10.14321/realanalexch.37.1.0001

7. Kahane J.-P. Sur l'exemple, donné par M. de Rham, d'une fonction continue sans dérivée // Enseignement Math. 1959. Vol. 5. pp. 53–57. DOI: https://doi.org/10.5169/seals-35474

8. Hata M., Yamaguti M. Takagi function and its generalization // Japan J. Appl. Math. 1984. Vol. 1. pp. 183–199. DOI: https://doi.org/10.1007/BF03167867

9. Han X., Schied A. Step roots of Littlewood polynomials and the extrema of functions in the Takagi class // Math. Proc. of the Cambridge Phil. Soc. 2022. Vol. 173. pp. 591–618. DOI: https://doi.org/10.1017/S0305004122000020

10. Galkin O. E., Galkina S. Yu. Functions consistent with real numbers, and global extrema of functions in exponential Takagi class. 2020. 60 p. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2003.08540

11. Галкина С. Ю. О коэффициентах Фурье–Хаара от функций с ограниченной вариацией // Матем. заметки. 1992. Vol. 51, No 1. pp. 42–54. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01229431

12. Tabor J., Tabor J. Takagi functions and approximate midconvexity // J. Math. Anal. Appl. 2009. Vol. 356, No 2. pp. 729–737. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.03.053

13. Галкин О. Е., Галкина С. Ю. О свойствах функций показательного класса Такаги // Уфимск. матем. журн. 2015. Т. 7, № 3. С. 29–37. DOI: https://doi.org/10.13108/2015-7-3-28

14. Tasaki S., Antoniou I., Suchanecki Z. Deterministic diffusion, de Rham equation and fractal eigenvectors // Physics Letter A. 1993. Vol. 179, No. 2. pp. 97–102. DOI: https://doi.org/10.1016/0375-9601(93)90656-K

15. Házy A., Páles Zs. On approximately t-convex functions // Publ. Math. Debrecen. 2005. Vol. 66, No 3. pp. 489–501. DOI: https://doi.org/10.5486/PMD.2005.3123

16. Галкин О. Е., Галкина С. Ю. Глобальные экстремумы функции Кобаяши–Грея–Такаги и двоичные цифровые суммы // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27, № 1. С. 17–25. DOI: https://doi.org/10.20537/vm170102

17. Галкин О. Е., Галкина С. Ю. Глобальные экстремумы функции Деланжа, оценки цифровых сумм и вогнутые функции // Матем. сб. 2020. Т. 211, № 3. С. 32–70. DOI: https://doi.org/10.4213/sm9143

18. Галкин О. Е., Галкина С. Ю. Применение крайних под- и надаргументов, выпуклых и вогнутых оболочек для поиска глобальных экстремумов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29, № 4. С. 483–500. DOI: https://doi.org/10.20537/vm190402

19. Rodríguez-Cuadrado J., San Martín J. Sierpinski-Takagi combination for a uniform and optimal point-surface load transmission // Appl. Math. Modelling. 2022. Vol. 105. pp. 307–320. DOI: https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.12.040

20. Fujita Y., Siconolfi A., Yamaguchi N. Hamilton-Jacobi flows with nowhere differentiable initial data // Mathematische Annalen. 2023. Vol. 385. pp. 1061–1084. DOI: https://doi.org/10.1007/s00208-021-02353-w

Поступила 05.02.2023; доработана после рецензирования 10.04.2023; принята к публикации 25.05.2023

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. T. Takagi, “A simple example of a continuous function without derivative”, *Tokyo Sugaku-Butsurigakkwai Hokoku*, **1** (1901), 176–177. DOI: https://doi.org/10.11429/subutsuhokoku1901.1.F176

2. F. A. Medvedev, *Essays on the history of the theory of functions of a real variable*, Nauka Publ., Moscow, 1975 (In Russ.), 248 p.

3. J. Thim, “Continuous nowhere differentiable functions: Master thesis”, 2003, 98 p.

4. F. S. Cater, “Constructing nowhere differentiable functions from convex functions”, *Real Anal. Exchange.*, **28**:2 (2002/2003), 617–623.

5. Y. Fujita, N. Hamamuki, A. Siconolfi, N. Yamaguchi, “A class of nowhere differentiable functions satisfying some concavity-type estimate”, *Acta Mathematica Hungarica*, **160** (2020), 343–359. DOI: https://doi.org/10.1007/s10474-019-01007-3

6. P. C. Allaart, K. Kawamura, “The Takagi function: a survey”, *Real Anal. Exchange.*, **37**:1 (2011/12), 1–54. DOI: https://doi.org/10.14321/realanalexch.37.1.0001

7. J.-P. Kahane, “Sur l’exemple, donné par M. de Rham, d’une fonction continue sans dérivée”, *Enseignement Math.*, **5** (1959), 53–57. DOI: https://doi.org/10.5169/seals-35474

8. M. Hata, M. Yamaguti, “Takagi function and its generalization”, *Japan J. Appl. Math.*, **1** (1984), 183–199. DOI: https://doi.org/10.1007/BF03167867

9. X. Han, A. Schied, “Step roots of Littlewood polynomials and the extrema of functions in the Takagi class”, *Math. Proc. of the Cambridge Phil. Soc.*, **173** (2022), 591–618. DOI: https://doi.org/10.1017/S0305004122000020

10. O. E. Galkin, S. Yu. Galkina, "Functions consistent with real numbers, and global extrema of functions in exponential Takagi class", 2020, 60 p. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2003.08540

11. S. Yu. Galkina, "On the Fourier-Haar coefficients of functions of bounded variation", *Math. Notes*, **51**:1 (1992), 27–36. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01229431

12. J. Tabor, J. Tabor, "Takagi functions and approximate midconvexity", *J. Math. Anal. Appl.*, **356**:2 (2009), 729–737. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.03.053

13. O. E. Galkin, S. Yu. Galkina, "On properties of functions in exponential Takagi class", *Ufa Mathematical Journal*, **7**:3 (2015), 28–37. DOI: https://doi.org/10.13108/2015-7-3-28

14. S. Tasaki, I. Antoniou, Z. Suchanecki, "Deterministic diffusion, de Rham equation and fractal eigenvectors", *Physics Letter A.*, **179**:2 (1993), 97–102. DOI: https://doi.org/10.1016/0375-9601(93)90656-K

15. A. Házy, Zs. Páles, "On approximately t-convex functions", *Publ. Math. Debrecen.*, **66**:3 (2005), 489–501. DOI: https://doi.org/10.1017/S0305004122000020

16. O. E. Galkin, S. Yu. Galkina, "Global extrema of the Gray Takagi function of Kobayashi and binary digital sums", *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, **27**:1 (2017), 17–25 (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.20537/vm170102

17. O. E. Galkin, S. Yu. Galkina, "Global extrema of the Delange function, bounds for digital sums and concave functions", *Sbornik: Mathematics*, **211**:3 (2020), 336–372. DOI: https://doi.org/10.4213/sm9143

18. O. E. Galkin, S. Yu. Galkina, "Application of extreme sub- and epiarguments, convex and concave envelopes to search for global extrema", *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, **29**:4 (2019), 483–500 (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.20537/vm190402

19. J. Rodríguez-Cuadrado, J. San Martín, "Sierpinski-Takagi combination for a uniform and optimal point-surface load transmission", *Appl. Math. Modelling.*, **105** (2022), 307–320. DOI: https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.12.040

20. Y. Fujita, A. Siconolfi, N. Yamaguchi, "Hamilton–Jacobi flows with nowhere differentiable initial data", *Mathematische Annalen.*, **385** (2023), 1061–1084. DOI: https://doi.org/10.1007/s00208-021-02353-w

Submitted 05.02.2023; Revised 10.04.2023; Accepted 25.05.2023

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.