Математика

DOI 10.15507/2079-6900.25.202302.11-21
Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 515.163

Об энергетической функции для прямого произведения дискретных динамических систем

М. К. Баринова, Е. К. Шустова

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

Аннотация. Данная работа посвящена построению энергетической функции — гладкой функции Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с цепно-рекуррентным множеством динамической системы — для каскада, который является прямым произведением двух систем. Один из сомножителей представляет собой структурно устойчивый диффеоморфизм на двумерном торе, неблуждающее множество которого состоит из нульмерного нетривиального базисного множества без пар сопряженных точек и неподвижных источника и стока, а второй является тождественным отображением на вещественной прямой. Ранее было доказано, что если неблуждающее множество динамической системы содержит нульмерное базисное множество, как у рассматриваемого диффеоморфизма, то такая система не обладает энергетической функцией, а именно любая функция Ляпунова будет иметь критические точки вне цепно-рекуррентного множества. Для тождественного отображения энергетическая функция является константой на всей вещественной прямой. В данной работе показано, что отсутствие энергетической функции для одного из сомножителей не является достаточным условием отсутствия такой функции у прямого произведения динамических систем, то есть в некоторых случаях удается подобрать второй каскад таким образом, что прямое произведение будет обладать энергетической функцией.

Ключевые слова: прямое произведение, диффеоморфизм, цепно рекуррентное множество, энергетическая функция

Для цитирования: Баринова М. К., Шустова Е. К. Об энергетической функции для прямого произведения дискретных динамических систем // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 2. С. 11–21. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202302.11-21

Информация об авторах:

Баринова Марина Константиновна, старший научный сотрудник международной лаборатории динамических систем и приложений, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4406-583X, mkbarinova@yandex.ru

Шустова Евгения Константиновна, студент, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4998-2186, ekshustova@gmail.com

Original article

MSC2020 37D20

Energy Function for Direct Products of Discrete Dynamical Systems

M. K. Barinova, E. K. Shustova

HSE University (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

Abstract. This paper is devoted to the construction of an energy function, i.e. a smooth Lyapunov function, whose set of critical points coincides with the chain-recurrent set of a dynamical system — for a cascade that is a direct product of two systems. One of the multipliers is a structurally stable diffeomorphism given on a two-dimensional torus, whose non-wandering set consists of a zero-dimensional non-trivial basic set without pairs of conjugated points and without fixed source and sink, and the second one is an identical mapping on a real axis. It was previously proved that if a non-wandering set of a dynamical system contains a zero-dimensional basic set, as the diffeomorphism under consideration has, then such a system does not have an energy function, namely, any Lyapunov function will have critical points outside the chain-recurrent set. For an identical mapping, the energy function is a constant on the entire real line. In this paper, it is shown that the absence of an energy function for one of the multipliers is not a sufficient condition for the absence of such a function for the direct product of dynamical systems, that is, in some cases it is possible to select the second cascade in such a way that the direct product will have an energy function.

Keywords: Direct product, diffeomorphism, chain recurrent set, energy function

For citation: *M. K. Barinova, E. K. Shustova.* Energy Function for Direct Products of Discrete Dynamical Systems. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 25:2(2023), 11–21. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202302.11-21

About the authors:

Marina K. Barinova, Senior Research Fellow, National Research University «High School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4406-583X, mkbarinova@yandex.ru

Evgenia K. Shustova, student, National Research University «High School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4998-2186, ekshustova@gmail.com

1. Введение

Хорошо известно, что дискретные динамические системы, в отличие от непрерывных, не всегда обладают энергетической функцией – гладкой функцией Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с цепно-рекуррентным множеством динамической системы. На сегодняшний день критерий существования такой функции не известен. Еще в 1977 г. Д. Пикстон построил пример диффеоморфизма Морса-Смейла, не обладающего энергетической функцией. Позднее был найден класс каскадов с хаотической гиперболической динамикой, у которых нет энергетической функции.

Пусть M — гладкое n-многообразие и $f : M \to M$ — диффеоморфизм с цепно-рекуррентным[1] множеством R_f. *Функцией Ляпунова* [1] для каскада $f : M \to M$ называется непрерывная функция $\varphi : M \to \mathbb{R}$, обладающая следующими свойствами:

1) если $x \notin R_f$, то $\varphi(x) > \varphi(f(x))$, т. е. функция Ляпунова убывает вдоль орбит вне цепно-рекуррентного множества;

2) если $x, y \in R_f$, то $\varphi(x) = \varphi(y)$ тогда и только тогда, когда $x \sim y$;

3) $\varphi(R_f)$ — нигде не плотное подмножество $\mathbb{R}$.

В силу результатов Ч. Конли [1] такая функция существует для любой динамической системы, а сам факт существования носит название «Фундаментальная теорема динамических систем». Гладкая функция Ляпунова, множество критических точек[2] которой совпадает с цепно рекуррентным множеством системы, называется *энергетической функцией* [2] .

Вопросом существования энергетических функций занимались К. Мейер [2], С. Смейл [3], Дж. Фрэнкс [4], М. Шуб [5], Ф. Такенс [6]. На настоящий момент известно, что энергетическая функция есть у любого потока, заданного на замкнутой поверхности ([4]). Для дискретных динамических систем выделено несколько классов каскадов, обладающих энергетической функцией, как с регулярной динамикой, так и с хаотической [7–9]. Также были найдены классы диффеоморфизмов, у которых не существует энергетических функций [10–11]. Более подробную информацию по данной тематике можно найти в обзоре [12].

Пусть $M = M_1 \times M_2$, где M_1 и M_2 — гладкие многообразия. Тогда диффеоморфизм $f : M \to M$ называется *прямым произведением* диффеоморфизмов $f_1 : M_1 \to M_1$ и $f_2 : M_2 \to M_2$ и обозначается $f = f_1 \times f_2$, если $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$, где $x_i \in M_i$. Многие свойства динамических систем переносятся на их прямые произведения, например, если диффеоморфизмы f_1 и f_2 структурно устойчивые или Ω-устойчивые[3], то и f является таковым [13]. Также, если каскады f_1 и f_2 обладают энергетическими функциями и хотя бы у одного из них конечное число цепных компонент, то и у f есть энергетическая функция.

Рассмотрим прямое произведение структурно устойчивого диффеоморфизма $f_1 : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, заданного на двумерном торе $\mathbb{T}^2$, неблуждающее множество которого содержит нульмерное нетривиальное базисное множество без пар сопряженных точек (более подробное описание диффеоморфизма f_1 будет дано в разделе 2.), и тождественного диффеоморфизма $f_2 = Id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Из работы [11] следует факт отсутствия энергетической функции у диффеоморфизма f_1, а энергетическая функция для диффеоморфизма f_2 — константа на $\mathbb{R}$. Таким образом, сформулируем следующую теорему.

Теорема 1.1. *Пусть f_1 — структурно устойчивый диффеоморфизм двумерного тора, неблуждающее множество которого состоит из источника, стока и нульмерного базисного множества без пар сопряженных точек. Тогда существует*

[1] *ε-цепью длины n*, соединяющей точку x с точкой y для каскада $f : M \to M$ называется последовательность $x = x_0, \ldots, x_n = y$ точек в M такая, что $d(f(x_{i-1}), x_i) < \varepsilon$ для $1 \leqslant i \leqslant n$. Точка $x \in M$ называется *цепно рекуррентной* для каскада f, если для любого $\varepsilon > 0$ существует n, зависящее от ε, и ε-цепь длины n, соединяющая точку x с ней самой. На множестве R_f можно ввести отношение эквивалентности $\sim$ следующим образом: $x \sim y$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует ε-цепь, соединяющая точку x с точкой y, и ε-цепь, соединяющая точку y с точкой x. Две такие точки называются *цепно эквивалентными*, класс эквивалентности называется *цепной компонентой*, множество всех цепно рекуррентных точек называется *цепно-рекуррентным множеством* и обозначается R_f.

[2] Точка $x \in M$ называется *критической* для функции $\varphi : M \to \mathbb{R}$, если $\nabla\varphi(x) = 0$.

[3] Структурная устойчивость ограничений систем на неблуждающие множества называется *Ω-устойчивостью*.

диффеоморфизм f_2 такой, что прямое произведение $f_1 \times f_2$ обладает энергетической функцией.

2. Диффеоморфизм с нульмерным базисным множеством

В данном разделе мы опишем пример диффеоморфизма с нульмерным нетривиальным базисным множеством без пар сопряженных точек и приведем некоторые свойства таких диффеоморфизмов.

Рассмотрим диффеоморфизм Аносова $f_A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, индуцированный линейным отображением плоскости $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданным с помощью гиперболической матрицы $A \in GL(2,\mathbb{Z})$ с собственными значениями λ и $1/\lambda$, где $\lambda > 1$.

Выберем две различные неподвижные точки p и q диффеоморфизма f_A (если f_A не имеет двух неподвижных точек, достаточно рассмотреть в качестве матрицы A некоторую ее степень). Чтобы получить диффеоморфизм f_1 с нульмерным седловым базисным множеством, проведем «хирургические операции Смейла» [3] в непересекающихся окрестностях U_p и U_q неподвижных точек p и q таким образом, чтобы в результате в U_p получился гиперболический источник α, а в U_q — гиперболический сток ω. Кроме α и ω цепно-рекуррентное множество диффеоморфизма f_1 будет содержать нульмерное седловое множество Σ без пар сопряженных точек[4]. Множество Σ при этом будет иметь локальную структуру прямого произведения канторовского множества на самого себя (см. рис. 2.1).

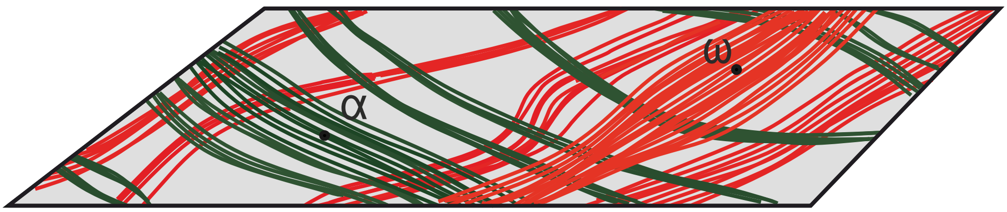

Рис. 2.1. Диффеоморфизм с нульмерным нетривиальным базисным множеством

Fig. 2.1. Diffeomorphism with a zero-dimensional nontrivial basic set

Каскады с такой динамикой изучались в работе [8]. Приведем некоторые свойства диффеоморфизма f_1. При таком построении цепно-рекуррентное множество R_f является гиперболическим. Более того, диффеоморфизм f_1 будет структурно устойчивым [12]. Для каждой точки $x \in \mathbb{T}^2$ можно определить устойчивое и неустойчивое многообразия W^s_x и W^u_x следующим образом:

$$W^s_x = \{y \in \mathbb{T}^2 \mid \lim_{n\to+\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0\},$$

$$W^u_x = \{y \in \mathbb{T}^2 \mid \lim_{n\to+\infty} d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) = 0\}.$$

Из теоремы о спектральном разложении [14] следует, что

$$\mathbb{T}^2 = W^u_\alpha \cup \overline{W}^u_\Sigma = W^s_\omega \cup \overline{W}^s_\Sigma.$$

[4]Различные точки $x, y \in \Lambda$ называются *парой сопряженных точек*, если $(x,y) \in (W^s_x \cap W^u_y)$, $(x,y)^s \cap \Lambda = \varnothing$ и $(x,y)^u \cap \cap \Lambda = \varnothing$, где Λ – базисные множества.

В силу фундаментальной теоремы динамических систем Ч. Конли данная система обладает функцией Ляпунова. Однако в работе [11] было доказано, что f_1 не обладает энергетической функцией, т. е. множество критических точек любой функции Ляпунова для данного диффеоморфизма не совпадает с цепно-рекуррентным множеством.

3. Построение энергетической функции

Рассмотрим прямое произведение диффеоморфизма $f_1 : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ на тождественный диффеоморфизм $f_2 = Id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. В данном разделе мы построим энергетическую функцию для диффеоморфизма $f = f_1 \times f_2 : M \to M$, где $M = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$. Для удобства мы будем использовать в качестве обозначения точки на многообразии M либо символ a, либо (t, z), подразумевая, что $a = (t, z)$, $a \in M$, $t \in \mathbb{T}^2$, $z \in \mathbb{R}$.

Напомним, что цепно-рекуррентное множество диффеоморфизма f_1 состоит из источника α, стока ω и нульмерного седлового множества Σ, а у диффеоморфизма f_2 всего одна цепная компонента, совпадающая с $\mathbb{R}$. Тогда цепные компоненты прямого произведения $f = f_1 \times f_2$ — это $\alpha \times \mathbb{R}$, $\omega \times \mathbb{R}$ и $\Sigma \times \mathbb{R}$, обозначим их через R_α, R_ω и R_Σ соответственно. Положим также $W^s_{R_\alpha} = W^s_\alpha \times \mathbb{R}$, $W^s_{R_\omega} = W^s_\omega \times \mathbb{R}$ и $W^s_{R_\Sigma} = W^s_\Sigma \times \mathbb{R}$.

Построение энергетической функции разобьем на 3 шага.

3.1. Шаг 1

Сначала построим гладкую функцию $\Phi : M \to [0, 1]$ со следующими свойствами:

1) $\Phi|_{W^u_{R_\alpha}}$ является энергетической функцией для ограничения диффеоморфизма f на $W^u_{R_\alpha}$;

2) $\Phi(a) = 1$ для всех $a \in R_\alpha$;

3) $\Phi(a) = 0$ для всех $a \in \overline{W}^u_{R_\Sigma}$.

4) Функция $\Phi(a)$ не зависит от z, где $a = (t, z)$, $t \in \mathbb{T}^2$, $z \in \mathbb{R}$.

Пусть $h_\alpha : W^u_\alpha \to \mathbb{R}^2$ — диффеоморфизм, сопрягающий $f_1|_{W^u_\alpha}$ с линейным растяжением плоскости $L_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$, то есть $h_\alpha \circ f = L_\alpha \circ h_\alpha$.

Функция $\varphi_{L_\alpha} : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$, определенная формулой

$$\varphi_{L_\alpha}(x, y) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2, & x^2 + y^2 \leqslant 1/4, \\ \dfrac{3}{4} e^{(1-4x^2-4y^2)/3}, & x^2 + y^2 > 1/4, \end{cases}$$

является энергетической функцией для диффеоморфизма L_α. Тогда функция $\varphi_{cont} : \mathbb{T}^2 \to [0, 1]$

$$\varphi_{cont}(t) = \begin{cases} \varphi_{L_\alpha} \circ h_\alpha, & t \in W^u_\alpha, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

будет энергетической функцией для $f_1|_{W^u_\alpha}$ и непрерывной на всём $\mathbb{T}^2$. По [8, Лемма 5] существует функция $u_\alpha : [0, 1] \to [0, 1]$ такая, что $\varphi = u_\alpha \circ \varphi_{cont}$ — энергетическая функция для $f_1|_{W^u_\alpha}$, но уже гладкая на всём $\mathbb{T}^2$ (см. рисунок 3.1).

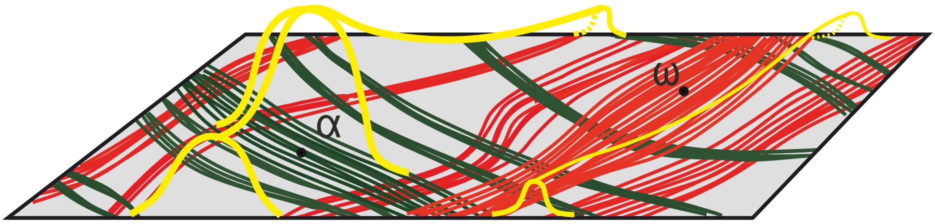

Рис. 3.1. График функции $\varphi : \mathbb{T}^2 \to [0, 1]$

Fig. 3.1. Function $\varphi : \mathbb{T}^2 \to [0, 1]$

Тогда функция $\Phi(t, z) = \varphi(t)$ для всех $t \in \mathbb{T}^2$ и $z \in \mathbb{R}$ — искомая.

3.2. Шаг 2

Построим гладкую функцию $\Psi : M \to [0, 1]$ со следующими свойствами:

1) $\Psi|_{W^s_{R_\omega}}$ — энергетическая функция для $f|_{W^s_{R_\omega}}$;
2) $\Psi(a) = 0$ для всех $a \in R_\omega$;
3) $\Psi(a) = 1$ для всех $a \in \overline{W}^s_{R_\Sigma}$;
4) $\Psi'_z(t, z) \neq 0$ для всех $(t, z) \in W^s_{R_\omega} \setminus R_\omega$.

Пусть $h_{shift} : W^s_{R_\omega} \setminus R_\omega \to S^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = S^1 \times \mathbb{R}^2$ — диффеоморфизм, такой что $h_{shift} \circ (f_1 \times f_2) = (L_{shift} \times f_2) \circ h_{shift}$, где $L_{shift} : (s, x) \to (s, x - 1)$ для всех $s \in S^1$ и $x \in \mathbb{R}$. Рассмотрим расслоение $\mathbb{R}^2$ на кривые вида $l_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in (c-1, c+1),\ y = \operatorname{tg} \dfrac{\pi(x - c)}{2}\}$ и функцию $\psi : S^1 \times \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$, определенную формулой $\psi(s, x, y) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi} \operatorname{arctg} c$, $s \in S^1$, $(x, y) \in l_c$ (см. Рис. 3.2).

Непосредственно проверяется, что функция ψ — энергетическая для диффеоморфизма $L_{shift} \times f_2$. Тогда функция $\psi_{cont} : M \to [0, 1]$

$$\psi_{cont}(a) = \begin{cases} \psi \circ h_{shift}, & a \in W^s_{R_\omega} \setminus R_\omega, \\ 0, & a \in R_\omega, \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

будет энергетической функцией для $f|_{W^s_{R_\omega}}$ и непрерывной на M. Действительно, множество $W^s_{R_\omega}$ содержит единственную цепную компоненту R_ω и $\Psi(a) = 0$ для всех $a \in R_\omega$. Теперь покажем убывание вдоль траектории вне цепно рекуррентного множества, т. е. если $a \notin R_\omega$, то $\psi_{cont}(a) > \psi_{cont}(f(a))$.

- $\psi_{cont}(a) = \psi(h_{shift}(a)) = \psi(s, x, y)$, где $h_{shift}(a) = (s, x, y)$;
- $\psi_{cont}(f(a)) = \psi_{cont}(h_{shift}(f(a))) = \psi((L_{shift} \times f_2)(h_{shift}(a))) = \psi((L_{shift} \times f_2)(s, x, y)) = \psi(L_{shift}(s, x), f_2(y)) = \psi(s, x - 1, y)$;
- $\psi(s, x, y) > \psi(s, x - 1, y)$, т. к. $\psi(s, x, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} c_1$, где $c_1 = x - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} y$, и $\psi(s, x - 1, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} c_2$, где $c_2 = x - 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} y$. Отсюда $c_1 > c_2$.

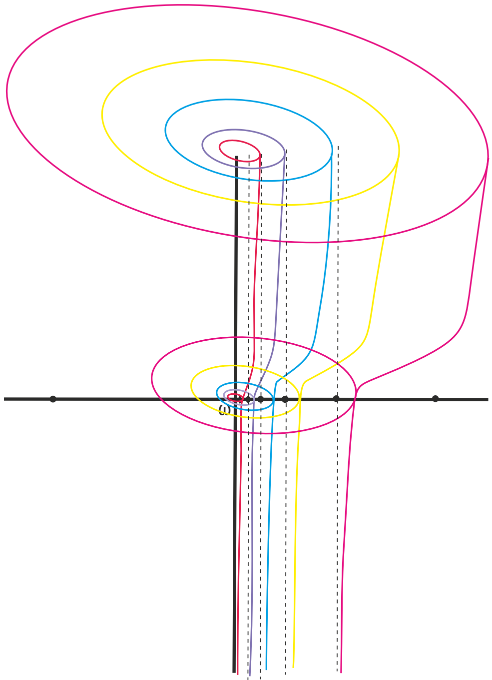

Рис. 3.2. Линии уровня функции $\psi : S^1 \times \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ в множестве $\mathbb{R}^3 \setminus Oz$, если точка $(s,x,y) \in S^1 \times \mathbb{R}^2$ соответствует точке $(\lambda^x, 2\pi s, y) \in \mathbb{R}^3 \setminus Oz$ в цилиндрических координатах

Fig. 3.2. Curve lines of the fuction $\psi : S^1 \times \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ in the set $\mathbb{R}^3 \setminus Oz$ if the point $(s,x,y) \in S^1 \times \mathbb{R}^2$ corresponds to the point $(\lambda^x, 2\pi s, y) \in \mathbb{R}^3 \setminus Oz$ in cylindrical coordinates

Таким образом, функция $\psi_{cont}|_{W^s_{R_\omega}}$ убывает вдоль траекторий вне цепно рекуррентного множества диффеоморфизма $f|_{W^s_{R_\omega}}$.

Из [8] следует, что существует функция $u_\omega : [0,1] \to [0,1]$, такая что $\Psi = u_\omega \circ \psi_{cont}$ будет энергетической функцией для $f|_{W^s_{R_\omega}}$ и гладкой на M. Заметим, что $u_\omega{}'(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in \{0,1\}$. Для того, чтобы Ψ оказалась искомой, необходимо проверить выполнение пункта 4, т. е. то, что $\Psi'_z(t,z) \neq 0$ для всех $(t,z) \in W^s_{R_\omega} \setminus R_\omega$.

$\Psi'_z(t,z) = (u_\omega \circ \psi_{cont}(t,z))'_z = u_\omega{}'\psi_{cont}{}'_z(t,z) = u_\omega{}'\psi'_y(s,x,y) = u_\omega{}'(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}arctg(x - \dfrac{2}{\pi}arctg(y)))'_y = u_\omega{}'\dfrac{1}{\pi} \cdot \dfrac{1}{1+(x-\dfrac{2}{\pi}arctg(y))^2} \cdot (-\dfrac{2}{\pi}) \cdot \dfrac{1}{1+y^2} \neq 0$ для всех $(t,z) \in W^s_{R_\omega} \setminus R_\omega$.

3.3. Шаг 3

Докажем, что функция $\Theta = \Phi + \Psi$ — энергетическая для диффеоморфизма f. Для этого проверим выполнение следующих условий:

1) Θ — функция Ляпунова для f;

2) Θ — гладкая;

3) Множество критических точек $Cr(\Theta)$ совпадает с цепно-рекуррентным множеством диффеоморфизма $f \times g$.

Напомним, что цепно рекуррентное множество R_f диффеоморфизма f состоит из из трех цепных компонент R_ω, R_α и R_Σ. Для удобства будем использовать следующие обозначения: $B_{R_\omega} = W^s_{R_\omega} \setminus R_\omega$, $B_{R_\alpha} = W^u_{R_\alpha} \setminus R_\alpha$. Тогда $M = R_\alpha \sqcup R_\omega \sqcup R_\Sigma \sqcup (B_{R_\alpha} \cup B_{R_\omega})$. Заметим, что $B_{R_\alpha} \cap B_{R_\omega} \neq \emptyset$.

1. Докажем сначала убывание вдоль траекторий вне цепно рекуррентного множества. Если $a \notin R_f$, то либо $a \in B_{R_\omega}$, либо $a \in B_{R_\alpha}$. В первом случае $\Phi(a) \geqslant \Phi(f(a))$, а $\Psi(a) > \Psi(f(a))$. Во втором случае $\Phi(a) > \Phi(f(a))$, а $\Psi(a) \geqslant \Psi(f(a))$. Таким образом, если $a \notin R_f$, то $\Theta(a) > \Theta(f(a))$.

Заметим, что по построению $\Theta(R_\omega) = 0$, $\Theta(R_\alpha) = 2$ и $\Theta(R_\Sigma) = 1$.

2. Функция Θ – гладкая как линейная комбинация гладких функций.

3. Покажем, что градиент функции Θ обращается в ноль только в цепно-рекуррентных точках.

По построению, функция $\Phi(t,z) = \varphi(t)$, где $t \in \mathbb{T}^2$, т. е. она не зависит от координаты z и $\Phi(t,z)'_z = 0$ для любого $z \in \mathbb{R}$, а значит, ее градиент имеет вид: $grad\ \Phi(t,z) = (grad\ \varphi(t), 0)$, где $grad\ \varphi(t) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $t \in W^u_\alpha \setminus \alpha$, а значит, $grad\ \Phi(t,z) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $(t,z) \in B_{R_\alpha}$. Конструкция функции $\Psi(t,z)$ такова, что $grad\ \Psi(t,z) \neq 0$ и $\Psi'_z(t,z) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $(t,z) \in B_{R_\omega}$.

Очевидно, что если $(t,z) \in R_f$, то $grad\ \Theta(t,z) = grad\ \Phi(t,z) + grad\ \Psi(t,z) = 0$. Пусть теперь $(t,z) \notin R_f$. Тогда может быть один из трех вариантов:

- $(t,z) \in B_{R_\alpha} \setminus B_{R_\omega}$, тогда $grad\ \Phi(t,z) \neq 0$, $grad\ \Psi(t,z) = 0$, а значит, $grad\ \Theta(t,z) \neq 0$;
- $(t,z) \in B_{R_\omega} \setminus B_{R_\alpha}$, тогда $grad\ \Phi(t,z) = 0$, $grad\ \Psi(t,z) \neq 0$, а значит, $grad\ \Theta(t,z) \neq 0$;
- $(t,z) \in B_{R_\omega} \cap B_{R_\alpha}$, тогда $\Phi'_z(t,z) = 0$, $\Psi'_z \neq 0$, а значит, $grad\ \Theta(t,z) \neq 0$.

Таким образом, Θ — энергетическая функция для диффеоморфизма f.

4. Заключительные замечания

Энергетическую функцию в данном примере удается построить за счет того, что цепно-рекуррентное множество для тождественного диффеоморфизма — это вся действительная прямая. В действительности вместо f_2 можно использовать любой диффеоморфизм с таким свойством, например, $f_2(x) = -x$. Возникает вопрос, какими свойствами должен обладать диффеоморфизм f_2, чтобы для прямого произведения $f_1 \times f_2$ не существовало энергетической функции, при условии, что диффеоморфизм f_1 ее не имеет. Имеет место следующая гипотеза: диффеоморфизм f_2 должен иметь хотя бы одну компактную цепную компоненту.

Благодарности. Исследование динамики диффеоморфизмов рассматриваемого класса поддержано грантом РНФ (проект 21-11-00010).

Список литературы

1. Conley C. Isolated invariant sets and Morse index. Colorado: Am. Math. Soc., 1978. 89 p.

2. Meyer K. R. Energy functions for Morse–Smale systems // Amer. J. Math. 1968. Vol. 90, No. 4. pp. 1031–1040. DOI: https://doi.org/10.2307/2373287

3. Smale S. On gradient dynamical systems // Annals Math. 1961. Vol. 74, No. 1. pp. 199–206. DOI: https://doi.org/10.2307/1970311

4. Franks J. Nonsingular Smale flow on S3 // Topology. 1985. Vol. 24, No. 3. pp. 265–282. DOI: https://doi.org/10.1016/0040-9383(85)90002-3

5. Shub M. Morse-Smale diffeomorphism are unipotent on homology // Dynamical Systems. 1973. pp. 489–491. DOI: https://doi.org/10.1016/B978-0-12-550350-1.50040-0

6. Takens F. Tolerance stability // Dynamical systems -Warwick 1974 (Proc. Sympos. Appl. Topology and Dynamical Systems, Univ. Warwick, Coventry, 1973/1974; presented to E. C. Zeeman on his fiftieth birthday), Lecture Notes in Math., vol. 468, Springer, 1975, p. 293-304.

7. Grines V. Z., Laudenbach F., Pochinka O. V. Dynamically ordered energy function for Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2012. Vol. 278. pp. 34–48. DOI: https://doi.org/10.1134/S0081543812060041

8. Barinova M., Grines V., Pochinka O., Yu B. Existence of an energy function for three-dimensional chaotic “sink-source” cascades // Chaos. 2021. Vol. 31, No. 6. DOI: https://doi.org/10.1063/5.0026293

9. Гринес В. З., Носкова М. К., Починка О. В. Построение энергетической функции для А-диффеоморфизмов с двумерным неблуждающим множеством на 3-многообразиях // Журнал Средневолжского математического общества. 2015. Vol. 17, No. 3. pp. 12–17.

10. Pixton D. Wild unstable manifolds// Topology. 1977. Vol. 16, No. 2. pp. 167–172. DOI: https://doi.org/10.1016/0040-9383(77)90014-3

11. Barinova M. On existence of an energy function for ω-stable surface diffeomorphisms // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42, No. 14. pp. 3317–3323. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080222020020

12. Гринес В. З., Починка О. В. Построение энергетических функций для омега-устойчивых диффеоморфизмов на 2- и 3-многообразиях // Современная математика. Фундаментальные направления. 2017. Т. 63, № 2. С. 191–222. DOI: https://doi.org/10.22363/2413-3639-2017-63-2-191-222

13. Баринова М. К., Шустова Е. К. Динамичекие свойства прямых произведений дискретных динамических систем // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 1. С. 21–30. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202201.21-30

14. Смейл С. Дифференцируемые динамические системы // Успехи мат. наук. 1970. Т. 25, № 1. pp. 113–185.

Поступила 27.01.2023; доработана после рецензирования 04.03.2023; принята к публикации 25.05.2023

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. C. Conley, "Isolated invariant sets and Morse index", 1978, 89 p.

2. K. Meyer, "Energy functions for Morse–Smale systems", *Amer. J. Math*, **90**:4 (1968), 1031—1040. DOI: https://doi.org/10.2307/2373287

3. S. Smale, "On gradient dynamical systems", *Annals Math*, **74**:1 (1961), 199—206. DOI: https://doi.org/10.2307/1970311

4. J. Franks, "Nonsingular Smale flow on S3", *Topology*, **24**:3 (1985), 265—282. DOI: https://doi.org/10.1016/0040-9383(85)90002-3

5. M. Shub, "Morse-Smale diffeomorphism are unipotent on homology", *Dynamical Systems*, 1973, 489-491. DOI: https://doi.org/10.1016/B978-0-12-550350-1.50040-0

6. F. Takens, "Tolerance stability", *Dynamical systems - Warwick 1974* (Proc. Sympos. Appl. Topology and Dynamical Systems, Univ. Warwick, Coventry, 1973/1974; presented to E. C. Zeeman on his fiftieth birthday, Lecture Notes in Math., vol. 468, Springer, 1975), 1974, 293-304.

7. V. Z. Grines, F. Laudenbach, O. V. Pochinka, "Dynamically ordered energy function for Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **278** (2012), 27–40. DOI: https://doi.org/10.1134/S0081543812060041

8. M. Barinova, V. Grines, O. Pochinka, B. Yu, "Existence of an energy function for three-dimensional chaotic "sink-source" cascades jour Chaos", **31**:6 (2021). DOI: https://doi.org/10.1063/5.0026293

9. V. Z. Grines, M. K. Noskova, O. V. Pochinka, "Construction of an energy function for A-diffeomorphisms of two-dimensional non-wandering sets on 3-manifolds", *Zhurnal SVMO*, **17**:3 (2015), 12–17.

10. D. Pixton, "Wild unstable manifolds", *Topology*, **16**:2 (1977), 167—172. DOI: https://doi.org/10.1016/0040-9383(77)90014-3

11. M. Barinova, "On existence of an energy function for ω-stable surface Diffeomorphisms", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **42**:14 (. 2021), 3317–3323. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080222020020

12. V. Grines, O. Pochinka, "Constructing energy function for certain classes of omega-stable and diffeomorphisms on manifolds od dimention 2 and 3", *Journal of Mathematical Sciences*, **63**:2 (2017), 191–222 (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.22363/2413-3639-2017-63-2-191-222

13. M. K. Barinova, E. K. Shustova, “Dynamical properties of direct products of discrete dynamical systems”, *Zhurnal SVMO*, **24**:1 (2022), 21-30 (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202201.21-30

14. S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Russian Mathematical Surveys*, **25**:1 (1970), 113–185 (In Russ.).

Submitted 27.01.2023; Revised 04.03.2023; Accepted 25.05.2023

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.