DOI 10.15507/2079-6900.25.202301.565-577 ISSN 2079-6900 (Print)
Оригинальная статья ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.9

Методы численного анализа некоторых интегральных динамических систем с запаздывающими аргументами

А. Н. Тында

ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (г. Пенза, Российская Федерация)

Аннотация. Работа посвящена построению прямых и итерационных численных методов решения функциональных уравнений с наследственными компонентами. Такие уравнения являются удобным аппаратом моделирования динамических систем. В частности, они используются в моделях популяций, структурированных по возрасту с конечной продолжительностью жизни. В работе используются модели на основе интегро-дифференциальных и интегральных уравнений с различного рода запаздывающими аргументами. Для нелинейных уравнений проводится линеаризация операторов по модифицированной схеме Ньютона-Канторовича. Для дискретизации линейных уравнений применяются методы квадратур и простой итерации. Построены итерационный метод решения нелинейного интегро-дифференциального уравнения на полуоси $(-\infty, 0]$, прямой метод решения задачи восстановления сигнала, итерационные методы решения нелинейного интегрального уравнения Вольтерра с константной задержкой. Для аппроксимации несобственных интегралов на полуоси применены специальные квадратурные формулы, построенные на основе ортогональных многочленов Лаггера. Приведены результаты численных экспериментов, иллюстрирующие сходимость предложенных методов.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения, нелинейные интегральные уравнения Вольтерра, запаздывающие аргументы, метод Ньютона-Канторовича, линеаризация, дискретизация

Для цитирования: Тында А. Н. Методы численного анализа некоторых интегральных динамических систем с запаздывающими аргументами // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 1. С. 565–577. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202301.565-577

Об авторе:
Тында Александр Николаевич, доцент кафедры высшей и прикладной математики, ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, д. 40), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6023-9847, tyndaan@mail.ru

Original article

MSC2020 65R20

Methods of numerical analysis for some integral dynamical systems with delay arguments

A. N. Tynda

Penza State University (Penza, Russian Federation)

Abstract. The aim of this work is to construct direct and iterative numerical methods for solving functional equations with hereditary components. Such equations are a convenient tool for modeling dynamical systems. In particular, they are used in population models structured by age with a finite life span. Models based on integro-differential and integral equations with various kinds of delay arguments are considered. For nonlinear equations, the operators are linearized according to the modified Newton-Kantorovich scheme. Direct quadrature and simple iteration methods are used to discretize linear equations. These methods are constructed in the paper: an iterative method for solving a nonlinear integro-differential equation on the semiaxis $(-\infty, 0]$, a direct method for solving the signal recovery problem, and iterative methods for solving a nonlinear Volterra integral equation with a constant delay. Special quadrature formulas based on orthogonal Lagger polynomials are used to approximate improper integrals on the semiaxis. The results of numerical experiments confirm the convergence of suggested methods. The proposed approaches can also be applied to other classes of nonlinear equations with delays.

Keywords: integro-differential equations, nonlinear Volterra integral equations, delay arguments, the Newton-Kantorovich method, linearization, direct discretization

For citation: *A. N. Tynda.* Methods of numerical analysis for some integral dynamical systems with delay arguments. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 25:1(2023), 565–577. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202301.565-577

About the author:
Aleksandr N. Tynda, Associate Professor, Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (40 Krasnaya St., Penza 440026, Russia), Ph. D. (Phys.-Math.), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6023-9847, tyndaan@mail.ru

1. Введение

В настоящее время существенный интерес вызывают динамические системы, при описании которых используются функциональные уравнения с наследственными компонентами (запаздывающими, отклоняющимися аргументами). В этом случае состояние динамической системы в данный момент времени зависит от всей ее предыдущей эволюции или некоторого интервала предыстории. Хорошо известна универсальность таких уравнений при моделировании процессов в различных приложениях — в физике, технике, биоматематике, экономике, медицине и др. (см., например [1–4]). Они обеспечивают наиболее реалистичное отражение свойств наблюдаемых процессов, являясь зачастую единственным математическим аппаратом для их описания.

В подавляющем большинстве практически важных случаев задачи с наследственной или запаздывающей обратной связью не имеют аналитического решения, а получение численного решения затруднено требованием данных о состоянии системы в пределах всего временного диапазона эволюции (или запаздывания). При этом на практике точные аналитические решения задач с отклоняющимся аргументом могут быть найдены лишь в исключительных случаях. Поэтому возникает необходимость в разработке эффективных численных методов их анализа.

Цель данной работы заключается в численном анализе ряда динамических систем с запаздывающими аргументами различного типа.

2. Интегро-дифференциальные уравнения с запаздыванием

Рассмотрим сначала интегро-дифференциальное уравнение, используемое при описании моделей популяционной динамики [5]:

$$\frac{dx}{dt} = g(t)X(t)\left[1 - \int\limits_{-\infty}^{0} H(t,\tau)X(t+\tau)d\tau\right], \quad t \in [0,T], \tag{2.1}$$

где τ — непрерывная задержка.

Для построения численного решения уравнения (2.1) введем нелинейный интегральный оператор

$$FX(t) \equiv \frac{dx}{dt} - g(t)X(t)\left[1 - \int\limits_{-\infty}^{0} H(t,\tau)X(t+\tau)d\tau\right]. \tag{2.2}$$

Обозначив через $X_0(t)$ начальное приближение, найдем производную по Фреше оператора $FX(t)$ в точке $X_0(t)$

$$\begin{gathered} F\,'(X_0) = \lim_{\delta\to 0}\frac{F(X_0+\delta X) - F(X_0)}{\delta} = \\ = \lim \frac{1}{\delta}_{\delta\to 0}\left[\frac{d(X_0(t)+\delta X)}{dt}\right] - g(t)(X_0+\delta X)\left[1 - \int\limits_{-\infty}^{0} H(t,\tau)X_0(t+\tau) + \right. \\ \left. +\delta X(t+\tau))d\tau\right] - \frac{dX_0}{dt} + g(t)X_0(t)\left[1 - \int\limits_{-\infty}^{0} H(t,\tau)X_0(t+\tau)d\tau\right] = \frac{dX}{dt} - \\ -X(t)g(t)\left[1 - \int\limits_{-\infty}^{0} H(t,\tau)X_0(t+\tau)d\tau\right] + g(t)X(t)\int\limits_{-\infty}^{0} H(t,\tau)X(t+\tau)d\tau. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Введя обозначение $\Phi(t) = g(t)\left[1 - \int\limits_{-\infty}^{0} H(t,\tau)X_0(t+\tau)d\tau\right]$, получим

$$F\,'(X_0)(X) = \frac{dx}{dt} - X(t)\Phi(t) + g(t)X_0\left[1 - \int\limits_{-\infty}^{0} H(t,\tau)X(t+\tau)d\tau\right]. \tag{2.4}$$

Далее используем модифицированный метод Ньютона-Канторовича. Применительно к уравнению $FX(t)=0$ метод имеет следующий вид:

$$X_{m+1}=X_m-[F'(X_0)]^{-1}F(X_m), \quad m=0,1,... \tag{2.5}$$

Для итерации $m+1$ процесс (2.5) можно переписать следующим образом:

$$F\,'(X_0)\triangle X_{m+1}=-F(X_m), \quad \triangle X_{m+1}=X_{m+1}-X_m. \tag{2.6}$$

Таким образом, в развернутом виде имеем последовательность приближенных решений, определяемых из уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{d\triangle X_{m+1}(t)}{dt}-\triangle X_{m+1}(t)\Phi(t)+g(t)X_0(t)\int\limits_{-\infty}^{0}H(t,\tau)\triangle X_{m+1}(t+\tau)d\tau=\\ =-\frac{dX_m(t)}{dt}+g(t)X_m(t)\left[1-\int\limits_{-\infty}^{0}H(t,\tau)X_{m+1}(t+\tau)d\tau\right].\end{gathered} \tag{2.7}$$

Расписав уравнение (2.7), получим:

$$\begin{gathered}\frac{dX_{m+1}(t)}{dt}-X_{m+1}(t)\Phi(t)+g(t)X_0(t)\int\limits_{-\infty}^{0}H(t,\tau)X_{m+1}(t+\tau)d\tau=\\ =X_m(t)\Phi(t)+g(t)X_m(t)+[X_0(t)-X_m(t)]g(t)\int\limits_{-\infty}^{0}H(t,\tau)X_m(t+\tau)d\tau.\end{gathered} \tag{2.8}$$

Обозначив правую часть уравнения (2.8) как $\Psi_m(t)$, запишем:

$$\frac{dX_{m+1}(t)}{dt}-X_{m+1}(t)\Phi(t)+g(t)X_0(t)\int\limits_{-\infty}^{0}H(t,\tau)X_{m+1}(t+\tau)d\tau=\Psi_m(t). \tag{2.9}$$

Исходя из общих теорем о сходимости метода Ньютона–Канторовича [6] сформулируем теорему сходимости этого итерационного процесса в банаховом пространстве $C[0,T]$ с нормой $\|X(t)\|_{C[0,T]}=\max_{t\in[0,T]}\mid X(t)\mid$.

Теорема 2.1. *Пусть оператор F имеет непрерывную вторую производную в шаре $\Omega_0(\|X-X_0\|_{C[0,T]}\leq p)$, а также выполнены условия:*

1) При $m=0$ уравнение (2.9) имеет единственное решение на $[0,T]$, т. е. существует $\Gamma_0=[F\,'(X_0)]^{-1}$;

2) $\|\triangle X_1\|_{C[0,T]}\leq\eta$;

3) $\|\Gamma_0F\,''(X)\|_{C[0,T]}\leq S, X\in\Omega_0$.

Если также $h=S_\eta<\frac{1}{2}u\frac{1-\sqrt{1-2h}}{h}\eta\leq p\leq\frac{1+\sqrt{1-2h}}{h}\eta$, то уравнение (2.1) имеет единственное решение X^* в Ω_0. Итерационный процесс (2.9) сходится к X^*, а скорость сходимости можно оценить неравенством:

$$\|X_m-X^*\|_{C[0,T]}\leq\frac{\eta}{h}(1-\sqrt{1-2h})^{m+1}, \quad m=0,1,...$$

Для построения решения линейного интегро-дифференциального уравнения на каждой итерации метода Ньютона-Канторовича (2.9) неизвестную функцию будем аппроксимировать интерполяционным сплайном порядка s, построенным по сетке узлов $t_l^j,\ l = 0,\ldots,n,\ j = 0,\ldots,s$, распределенных по отрезку $[0,T]$:

$$X_{m+1}^k(t) = \sum_{i=0}^{s} X_{m+1}(t_l^i) \prod_{j=0,j\neq i}^{s} \frac{t - t_l^j}{t_l^i - t_l^j}, \quad t \in [t_{l-1}, t_l].$$

Значения сплайна в точках сетки определяются двумя методами: сплайн-коллокационным и с помощью следующего итерационного процесса:

$$X_{m+1}^{k+1}(t) = \frac{1}{\Phi(t)} \left[\frac{dX_{m+1}^k(t)}{dt} - \Psi_m(t) + g(t)X_0(t) \int_{-\infty}^{0} H(t,\tau)X_{m+1}^k(t+\tau)d\tau \right]. \tag{2.10}$$

Вычисление значений функций $\Phi(t)$ и $\Psi_m(t)$ в (2.10) в произвольной точке производится с помощью специальных квадратур, построенных на основе ортогональных многочленов Лаггера. Производные $\dfrac{dX_{m+1}^k(t)}{dt}$ в каждой точке аппроксимируются вычисленными аналитически производными сплайна.

3. Интегральные уравнения с запаздыванием

3.1. Задача восстановления сигнала

Рассмотрим задачу численного восстановления сигнала, подаваемого на вход линейной динамической системы с конечной памятью. Такая система описывается следующим интегральным уравнением I рода типа Вольтерра:

$$\int_{t-T}^{t} H(t,s)x(s)ds = f(t), \quad t \in [a,b], \tag{3.1}$$

в котором величина T называется временем последействия или памятью динамической системы. В теории автоматического управления и радиотехнике ядро $H(t,s)$ интегрального уравнения (3.1) называется импульсной переходной функцией. В данном случае ядро $H(t,s)$ не является разностным, что соответствует нестационарной динамической системе [7]. Такого рода модели также применяются также при описании возрастной структуры экологических популяций [8].

Уравнение (3.1) можно также рассматривать как уравнение с константной задержкой. В настоящее время имеется лишь ряд численных методов для уравнений с константными задержками в пределах интегрирования (см., например, работы [3–4]). Однако в них рассматриваются уравнения II рода, а значит, не встает вопрос о корректности задачи. Подробный обзор вопроса корректности в различных функциональных пространствах для классических уравнений Вольтерра I рода можно найти в [7].

Ниже предлагается устойчивый квадратурный метод первого порядка точности, основанный на применении формулы средних прямоугольников и обладающий регуляризирующими свойствами.

Прежде всего определим для уравнения (3.1) пространства функций. Пусть $H(t,s) \in$ $\in C^1[a,b] \times [a-T,b],\ f(t) \in C^1[a,b]$. В этом случае при точно заданных функциях H

и f уравнение (3.1) имеет единственное непрерывное решение $x(t)$. Пусть также при $t \in [a-T, a]$ $x(t) \equiv \varphi(t)$, т. е. $\varphi(t)$ — заданная предыстория динамической системы.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на N частей точками $t_k = kh,\ k = 0, \ldots, N,\ h = \dfrac{T}{N}$. Приближенное решение уравнения (3.1) будем искать в виде кусочно-постоянной функции

$$x_N(t) = x\left(\frac{t_{k-1}+t_k}{2}\right),\ t \in (t_{k-1}, t_k],\ k = 1, 2, \ldots, N. \tag{3.2}$$

С целью упрощения изложения введем следующие обозначения:

$$x_N(t_k) = x_k,\ f(t_k) = f_k,\ k = 1, \ldots, N.$$

Потребуем, чтобы функция (3.2) удовлетворяла уравнению (3.1) в точках сетки t_k:

$$\int\limits_{t_k-T}^{t_k} H(t_k, s) x_N(s) ds = f_k,\ \ k = 1, \ldots, N. \tag{3.3}$$

Разобьем интеграл в (3.3) на части с длиной отрезка интегрирования, не превосходящей шага сетки h. В зависимости от величины $t_k - T$ возможны два случая:

Пусть сначала $t_k - T \leqslant t_0$. Тогда уравнения (3.3) могут быть представлены в виде

$$\int\limits_{t_k-T}^{t_0} H(t_k, s)\varphi(s) ds + \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} H(t_k, s) x_N(s) ds = f_k.$$

Выбор квадратурной формулы для вычисления первого интеграла в левой части последнего равенства зависит от гладкости предыстории φ и ядра H по переменной s. В случае достаточной гладкости применяется формула Гаусса. К остальным интегралам применяется формула средних прямоугольников. Таким образом, значения приближенного решения на сетке могут быть последовательно определены по формулам

$$x_k = \frac{f_k - I_k(T) - h\sum\limits_{i=1}^{k-1} H(t_k, \frac{t_{i-1}+t_i}{2}) x_i}{hH(t_k, \frac{t_{k-1}+t_k}{2})},\ I_k(T) = \int\limits_{t_k-T}^{t_0} H(t_k, s)\varphi(s) ds,\ k = \overline{1, N}. \tag{3.4}$$

Пусть теперь $t_k - T > t_0$. В этом случае равенства (3.3) в результате применения составной формулы средних прямоугольников примут вид

$$x_k = \frac{f_k - (t_{v_k} - t_k + T) H(t_k, \frac{t_k - T + t_{v_k}}{2}) x_{v_k} - h\sum\limits_{i=v_k+1}^{k-1} H(t_k, \frac{t_{i-1}+t_i}{2}) x_i}{hH(t_k, \frac{t_{k-1}+t_k}{2})},\ k = \overline{1, N}, \tag{3.5}$$

где через v_k обозначен номер отрезка сетки, на который попадает значение $t_k - T$.

Таким образом, значения неизвестной функции на рассматриваемой сетке (а значит, и приближенное решение $x_N(t),\ t \in [a, b]$) могут быть последовательно найдены по формулам (3.4)–(3.5). Скорость сходимости предложенного метода оценивается следующим неравенством

$$\|x(t) - x_N(t)\|_{C[a,b]} \leqslant \frac{A}{N}, \tag{3.6}$$

где A — положительная константа, независящая от N.

3.2. Задержки константного типа

Данный параграф посвящен численному решению нелинейного интегрального уравнения Вольтерра, рассмотренного в [2] и имеющего следующий вид:

$$x(t) = \int_0^t k(t,s)x(s)ds + \int_0^{t-\tau} h(t,s,x(s))ds + f(t), \tag{3.7}$$

где $\tau \in \mathbb{R},\ \tau > 0$ — постоянная задержка; $t \in [0,T]$, $x(t) = \varphi(t)$, при $t \in [-\tau, 0)$ — заданная предыстория.

В работе [2] предложен прямой коллокационный метод решения (3.7), линейные уравнения с задержками изучаются также авторами трудов [3–4]. Хорошо известно, что для интегральных уравнений с переменными пределами интегрирования весьма эффективными являются итерационные методы (см., например, [7]).

Построим два итерационных численных метода решения уравнения (3.7).

Метод последовательных приближений. Для решения уравнения (3.7) сначала адаптируем метод простой итерации.

Пусть функции $f(t), \varphi(t), k(t,s)$ и $h(t,s,x(s))$ являются непрерывными функциями своих аргументов и, кроме того, для любой пары величин x_1 и x_2 справедливо неравенство.

$$|h(t,s,x_1) - h(t,s,x_2)| \leq g(t,s)|x_1 - x_2|,$$

где $g(t,s)$ — непрерывная функция своих аргументов.

В качестве начального приближения итерационного метода выберем функцию

$$x^0(t) = f(t) - \int\limits_{t-\tau}^{0} h(t,s,\varphi(s))ds,\ t \in [0,T]. \tag{3.8}$$

Последовательные приближения $x^m,\ m = 1, 2, \ldots$, определяются затем из соотношений

$$x^m(t) = \int\limits_0^t k(t,s)x^{m-1}(s)ds + \int\limits_0^{t-\tau} h(t,s,x^{m-1}(s))ds + f(t),\ t \in [0,T]. \tag{3.9}$$

Решение уравнения (3.7) определяем как предел последовательных приближений $x(t) = \lim\limits_{m\to\infty} x^m(t)$. При этом для каждого номера m при $t \in [-\tau, 0)$ полагаем $x^m(t) = \varphi(t)$.

Для дискретизации соотношений (3.8)–(3.9) на отрезке $[0,T]$ введем сетку узлов (необязательно равномерную)

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = T,\ \ h_{max} = \max_{i=\overline{1,N}}(t_i - t_{i-1}) = \mathcal{O}(N^{-1}). \tag{3.10}$$

Последовательные приближения решения уравнения (3.7) на каждом шаге итерационного процесса (3.9) будем искать в виде кусочно-постоянных функций

$$x_N^m(t) = \sum_{i=1}^{N} x_i^m \delta_i(t),\ t \in (0,T], \quad \delta_i(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Delta_i = (t_{i-1}, t_i]; \\ 0, & t \notin \Delta_i \end{cases} \tag{3.11}$$

с неопределенными пока коэффициентами $x_i^m,\ i = \overline{1,N}$.

С целью упрощения изложения введем следующие обозначения

$$x_N^m(t_i) = x_i^m,\ f(t_i) = f_i,$$
$$k\left(t_i, \frac{t_{j-1}+t_j}{2}\right) = k_{ij},\ h\left(t_i, \frac{t_{j-1}+t_j}{2}, x_l^m\right) = h_{ijl}^m.$$

Обозначим через $v_i,\ i = \overline{0,N}$, номер отрезка разбиения (3.10), на который попадает значение $t_i - \tau$, а точнее

$$v_i = \begin{cases} 0, & \text{при } t_i - \tau \in [-\tau, 0); \\ j, & \text{при } t_{j-1} \leq t_i - \tau < t_j. \end{cases}$$

При $t_i - \tau < 0$ имеем

$$x_i^m = \sum_{j=1}^{i} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} k(t_i, s) x_N^{m-1}(s) ds - \int\limits_{t_i-\tau}^{0} h(t_i, s, \varphi(s)) ds + f_i,\ i = \overline{0,N}. \tag{3.12}$$

При $t_i - \tau \geq 0$ имеем

$$x_i^m = \sum_{j=1}^{i} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} k(t_i, s) x_N^{m-1}(s) ds + \sum_{j=1}^{v_i-1} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} h(t_i, s, x_N^{m-1}(s)) ds +$$
$$+ \int\limits_{t_{v_i-1}}^{t_i-\tau} h(t_i, s, x_N^{m-1}(s)) ds + f_i,\ i = \overline{0,N}. \tag{3.13}$$

Аппроксимируя в соотношениях (3.12) и (3.13) интегралы по формуле средних прямоугольников, получим окончательные выражения для определения приближений x_i^m, $i = \overline{0,N}$, $m = 1, 2, \ldots$:

$$x_i^m = \sum_{j=1}^{i} (t_j - t_{j-1}) k_{ij} x_j^{m-1} - \int\limits_{t_i-\tau}^{0} h(t_i, s, \varphi(s)) ds + f_i,\ \text{при } t_i - \tau < 0; \tag{3.14}$$

$$x_i^m = \sum_{j=1}^{i} (t_j - t_{j-1}) k_{ij} x_j^{m-1} + \sum_{j=1}^{v_i-1} (t_j - t_{j-1}) h_{ijj}^{m-1} +$$
$$+ (t_i - \tau - t_{v_i-1}) h\left(t_i, \frac{t_i - \tau + t_{v_i-1}}{2}, x_{v_i}^{m-1}\right) + f_i,\ \text{при } t_i - \tau \geq 0. \tag{3.15}$$

(Для вычисления полученного интеграла по предыстории в (3.14) также применяется квадратурная формула средних прямоугольников по вспомогательной сетке узлов с шагом, зависящим от величины $\tau - t_i$ и не превосходящим h_{max}.)

Метод Ньютона-Канторовича. В численных методах для решения нелинейного интегрального уравнения с константной задержкой значимая роль принадлежит методу Ньютона-Канторовича. Проведем линеаризацию уравнения (3.7) по схеме Ньютона-Канторовича. Для этого введем нелинейный интегральный оператор

$$Fx(t) \equiv x(t) - \int_0^t k(t,s) x(s) ds - \int_0^{t-\tau} h(t, s, x(s)) ds - f(t). \tag{3.16}$$

Найдем производную (по Фреше) нелинейного оператора Fx в точке $x_0(t)$, где $x_0(t)$ – начальное приближение,

$$F'[x_0](x(t)) = \lim_{\omega\to 0} \frac{F(x_0(t)+\omega x(t)) - F(x_0(t))}{\omega} =$$

$$= \lim_{\omega\to 0} \frac{1}{\omega}\left(x_0(t) + \omega x(t) - \int_0^t k(t,s)(x_0(s)+\omega x(s))ds - \int_0^{t-\tau} h(t,s,x_0(s)+\right.$$

$$\left. +\omega x(s))ds - f(t) - x_0(t) + \int_0^t k(t,s)x_0(s)ds + \int_0^{t-\tau} h(t,s,x_0(s))ds + f(t)\right) =$$

$$= x(t) - \int_0^t k(t,s)x(s)ds - \lim_{\omega\to 0}\int_0^{t-\tau} \frac{h(t,s,x_0(s)+\omega x(s)) - h(t,s,x_0(s))}{\omega}ds =$$

$$= x(t) - \int_0^t k(t,s)x(s)ds - \int_0^{t-\tau} \frac{\partial h(t,s,x_0(s))}{\partial x}x(s)ds.$$

Таким образом, получим

$$F'[x_0](x(t)) = x(t) - \int_0^t k(t,s)x(s)ds - \int_0^{t-\tau} \frac{\partial h(t,s,x_0(s))}{\partial x}x(s)ds. \qquad (3.17)$$

Уравнение (3.7) в операторной форме имеет вид $Fx = 0$, применим к нему метод Ньютона-Канторовича:

$$F'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = -F(x_{n-1}),\ n = 0,1,..., \qquad (3.18)$$

$$x_n = x_{n-1} - [F'(x_{n-1})]^{-1}\cdot F(x_{n-1}), \qquad (3.19)$$

где $[F'(x_{n-1})]^{-1}$ — обратный оператор для линейного оператора $F'[x_{n-1}](x(t))$, вычисленного в точке x_{n-1}.

Таким образом, в развернутом виде имеем последовательность приближенных решений x_n, определяемых из уравнений:

$$\begin{gathered}(x_n(t) - x_{n-1}(t)) - \int_0^t k(t,s)(x_n(s) - x_{n-1}(s))ds- \\ -\int_0^{t-\tau} \frac{\partial h(t,s,x_{n-1}(s))}{\partial x}(x_n(s) - x_{n-1}(s))ds = -x_{n-1}(t)+ \\ +\int_0^t k(t,s)x_{n-1}(s)ds + \int_0^{t-\tau} h(t,s,x_{n-1}(s))ds + f(t).\end{gathered} \qquad (3.20)$$

Обозначим для краткости $H_x(t,s,x) = \dfrac{\partial h(t,s,x)}{\partial x}$.

Тогда уравнения (3.20) можно преобразовать к виду, удобному для нахождения очередного приближения в итерационном процессе:

$$\begin{gathered} x_n(t) - \int_0^t k(t,s)x_n(s)ds - \int_0^{t-\tau} H_x(t,s,x_{n-1}(s))x_n(s)ds = \\ = f(t) + \int_0^{t-\tau}\left[h(t,s,x_{n-1}(s)) - H_x(t,s,x_{n-1}(s))x_{n-1}(s)\right]ds.\end{gathered} \qquad (3.21)$$

Обозначив через $\Psi_n(t)$ правую часть уравнения (3.21)

$$\Psi_n(t) = f(t) + \int_0^{t-\tau} [h(t,s,x_{n-1}(s)) - H_x(t,s,x_{n-1}(s))x_{n-1}(s)]\, ds, \tag{3.22}$$

получим окончательно

$$\begin{gathered} x_n(t) - \int_0^t k(t,s)x_n(s)ds- \\ - \int_0^{t-\tau} H_x(t,s,x_{n-1}(s))x_n(s)ds = \Psi_n(t), n = 1,2,\ldots \end{gathered} \tag{3.23}$$

Для решения уравнений вида (3.23) применим метод последовательных приближений в следующей форме:

$$\begin{gathered} x_n^m(t) = \Psi_n(t) + \int_0^t k(t,s)x_n^{m-1}(s)ds+ \\ + \int_0^{t-\tau} H_x(t,s,x_{n-1}(s))x_n^{m-1}(s)ds, n = 1,2,... \end{gathered} \tag{3.24}$$

где $x_n^0(t) = \Psi_n(t)$ — начальное приближение для метода последовательных приближений, а $x_{n-1}(t)$ — приближенное решение, полученное на $(n-1)$ итерации Ньютона-Канторовича.

При дискретизации (3.24) используется адаптивная сетка, построенная для каждого фиксированного числа разбиений отрезка $[0,T]$ в зависимости от величины задержки τ.

4. Численные результаты

4.1. Модель 1

Проиллюстрируем работу метода последовательных приближений на примере следующего модельного уравнения

$$x(t) = \int\limits_0^t (t-\sqrt{s})^3 x(s)ds + \int\limits_0^{t-0.2} \sin(t+2s)e^{x^3(s)}ds + f(t),\ t\in[0,1], \tag{4.1}$$

где свободный член $f(t)$ подобран таким образом, чтобы точным решением была функция $x^*(t) = t(1-t),\ \varphi(t) = t$.

Результаты решения модельной задачи (4.1) приведены в таблице 4.1, в которой приняты следующие обозначения: m — число итераций, N — число отрезков разбиения, норма погрешности

$$\varepsilon = \|x_N^m(t) - x^*(t)\|_{C[0,1]}.$$

Таблица 4.1. Зависимость погрешности ε вычислений от m и N

Table 4.1. The dependence of the computation error ε on the parameters m and N

m	0	1	2	3	3	5	5	5
N	100	100	100	200	200	800	1600	6400
ε	0,138	0,0029	0,00044	0,00027	0,00019	4,9e-5	2,4e-5	5,3e-6

4.2. Модель 2

Проиллюстрируем работу метода Ньютона-Канторовича на примере следующего модельного уравнения

$$x(t) - \int\limits_0^t x(s)ds - \int\limits_0^{t-\tau} x^3(s)ds = t(1-t) + \frac{t^3}{3} - \\ -\frac{t^2}{2} + \frac{(t-\tau)^7}{7} - \frac{(t-\tau)^6}{2} + \frac{3(t-\tau)^5}{5} - \frac{(t-\tau)^4}{4},\ t \in [0,1], \tag{4.2}$$

точным решением которого является функция $x^*(t) = t(1-t)$, предыстория $\varphi(t) = t$, задержка $\tau = 0.5$.

Результаты решения модельной задачи (4.2) приведены в Таблице 4.2, в которой приняты следующие обозначения: n — число итераций Ньютона-Канторовича, m — число внутренних итераций метода последовательных приближений, N — число узлов сетки, $\varepsilon = \|x_N^m(t) - x^*(t)\|_{C[0,1]}$ — норма погрешности.

Таблица 4.2. Зависимость погрешности ε вычислений от n, m и N

Table 4.2. The dependence of the error ε on the parameters n, m and N

n	1	1	2	3	3	2	2	2
m	5	5	5	5	10	15	5	5
N	10	50	200	500	1000	2000	4000	8000
ε	0,0236	0,0055	0,0013	0,00051	0,00019	0,00013	8,9e-5	4,7e-5

5. Заключение

Результаты проведенного численного анализа позволяют судить об устойчивой сходимости предложенных методов. При этом основным регулятором сходимости в каждом случае является число N при достаточно небольшом количестве последовательных приближений и итераций процесса Ньютона-Канторовича. Это обусловлено тем, что от N зависит как аппроксимация самой неизвестной функции, так и интегралов с первым и вторым порядком точности, соответственно. В то время как используемые итерационные процессы имеют сходимость, не хуже экспоненциальной.

Список литературы

1. Brunner H. Collocation methods for Volterra integral and related functional differential equations. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. 612 p. DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511543234

2. Caliò F., Marchetti E., Pavani R. About the deficient spline collocation method for particular differential and integral equations with delay // Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino. 2003. Vol. 61. pp. 287–300.

3. Cardone A., Prete I. D., Nitsch C. Gaussian direct quadrature methods for double delay Volterra integral equations // Electronic Transactions on Numerical Analysis. 2009. Vol. 35. pp. 201–216.

4. Messina E., Russo E., Vecchio A. A convolution test equation for double delay integral equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2009. Vol. 228, no. 2. pp. 589–599.

5. Gushing J. M. Volterra integrodifferential equations in population dynamics. In: Mathematics of Biology / ed. by M. Iannelli. Berlin: Springer, 2010. Vol 80. pp. 81–148.

6. Kantorovich L. V., Akilov G. P. Functional Analysis. – 2nd ed. Pergamon, 1982. 589 p.

7. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы // Киев : Наукова Думка, 1986. 544 с.

8. Popović Z. Basic mathematical models in economic-ecological control // Facta Universitatis. Economics and Organization. — 2008. Vol. 5, no. 3. pp. 251-262.

Поступила 01.12.2022; доработана после рецензирования 10.02.2023; принята к публикации 24.02.2023

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

References

1. H. Brunner, *Collocation methods for Volterra integral and related functional differential equations*, Cambridge: Cambridge University Press, 2004, 612 p.

2. F. Caliò, E. Marchetti, R. Pavani, “About the deficient spline collocation method for particular differential and integral equations with delay”, *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino*, **61** (2003), 287–300.

3. A. Cardone, I. D. Prete, C. Nitsch, “Gaussian direct quadrature methods for double delay Volterra integral equations”, *Electronic Transactions on Numerical Analysis.*, **35** (2009), 201–216.

4. E. Messina, E. Russo, A. Vecchio, “A convolution test equation for double delay integral equations”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **228**:2 (2009), 589–599.

5. J. M. Gushing, *Volterra Integrodifferential Equations in Population Dynamics. In: Mathematics of Biology.*, **80**, Berlin: Springer, 2010.

6. L.V. Kantorovich, G.P. Akilov, *Functional Analysis*, Pergamon, 2nd ed., 1982, 589 p.

7. A. F. Verlan, V. S. Sizikov, *Integral equations: methods, algorithms, programms*, Kiev: Naukova Dumka Publ., 1986 (in Russ).

8. Z. Popović, "Basic mathematical models in economic-ecological control", *Facta Universitatis. Economics and Organization*, **5**:3 (2008), 251–262.

Submitted 01.12.2022; Revised 10.02.2023; Accepted 24.02.2023

The author has read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The author declare no conflict of interest.