

DOI 10.15507/2079-6900.25.202301.554-564

*Оригинальная статья*

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.9

## Решение интегральных уравнений теории линейных антенн методом конечных элементов

**Д. В. Тарасов***ФГБОУ ВО Пензенский государственный университет (г. Пенза, Российская Федерация)*

**Аннотация.** Целью работы является построение вычислительной схемы метода конечных элементов применительно к интегральным уравнениям, описывающим распределения токов в тонких проволочных антеннах. В частности, для линейных антенн малой толщины задача может быть сведена к интегральному уравнению Галлена. В качестве метода исследования предпочтение отдано методу конечных элементов, т. к. он обладает достаточно большой гибкостью в плане выбора базисных функций и подборе сетки узлов. Кроме того, данный метод является мощным и эффективным средством решения задач математической физики, который позволяет достаточно точно описать сложные криволинейные границы области определения решения и краевые условия. В работе строится численный метод решения интегрального уравнения Галлена с использованием метода конечных элементов. Согласно предложенной вычислительной схеме, была выстроена программная реализация и проведен сравнительный анализ результатов. Данный подход в целом показал невысокую точность, что, возможно, обусловлено и принадлежностью данной задачи к классу некорректных и в целом вопросом определения границ применимости уравнения Галлена.

**Ключевые слова:** уравнение Галлена, интегральное уравнение, базисная функция, метод Галеркина, метод конечных элементов

**Для цитирования:** Тарасов Д. В. Решение интегральных уравнений теории линейных антенн методом конечных элементов // Журнал Средневожского математического общества. 2023. Т. 25, № 1. С. 554–564. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202301.554-564>

*Об авторах:*

**Тарасов Дмитрий Викторович**, доцент кафедры высшей и прикладной математики ФГБОУ ВО Пензенский государственный университет (440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, д. 40), кандидат технических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9217-9228>, [tarasovdv@mail.ru](mailto:tarasovdv@mail.ru)

© Д. В. Тарасов



MSC2020 65R20

# Solution of integral equations of linear antenna theory by finite element method

D. V. Tarasov

*Penza State University (Penza, Russian Federation)*

**Abstract.** The aim of the work is to construct a computational scheme of the finite element method in relation to integral equations describing current distributions in thin wire antennas. In particular, for linear antennas of small thickness, the problem can be reduced to the integral Gallen equation. As a research method, preference is given to the finite element method, since it has quite a lot of flexibility in terms of choosing basis functions and selecting a grid of nodes. In addition, this method is a powerful and effective means of solving mathematical physics' problems, which makes it possible to accurately describe complex curved boundaries of the solution domain and boundary conditions. The paper builds a numerical method for solving the integral Gallen equation using the finite element approach. According to the proposed computational scheme, a software implementation was built and a comparative analysis of the results was carried out. This approach as a whole showed low accuracy, which is probably due to the fact that this problem belongs to the class of incorrect ones and, in general, is due to the issue of determining the limits of applicability of the Gallen equation.

**Keywords:** Gallen equation, integral equation, basis function, Galerkin method, finite element method

**For citation:** D. V. Tarasov. Solution of integral equations of linear antenna theory by finite element method. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 25:1(2023), 554–564. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202301.554-564>

*About the authors:*

**Dmitriy V. Tarasov**, Associate Professor, Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (40 Krasnaya St., Penza 440026, Russia), Cand.Sci. (Technical Science), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9217-9228>, [tarasovdv@mail.ru](mailto:tarasovdv@mail.ru)

## 1. Введение

Для оценки качества антенн и сравнения их между собой используют характеристики (определяющие функциональную зависимость) и параметры (числовые величины). Поскольку антенны обладают способностью преобразовывать энергию направляемых электромагнитных волн в энергию радиоволн (или наоборот), то существует ряд показателей, которые по своей сути для них являются энергетическими параметрами [1].

В теории линейных антенн для расчета основных характеристик излучения (диаграммы направленности, коэффициента направленного действия и прочих) зачастую требуется решить краевую задачу для проволочных антенн. Подобные задачи нередко описываются интегральными уравнениями, и их строгое аналитическое решение или невозможно, или вызывает значительные трудности. Инженеры-радиотехники в подобных ситуациях, как правило, ограничиваются решением в первом приближении или пользуются «упрощенными» решениями [2].

В настоящее время для подобных задач исследователями активно применяются численные методы решения интегральных уравнений [3–6], аппарат сингулярных [7–8] и гиперсингулярных интегральных уравнений [9]. В данной работе будет рассматриваться подход к численному решению интегральных уравнений Галлена и Поклингтона, описывающих распределения токов в тонких проволочных антеннах, основанный на применении метода конечных элементов. Таким образом, вопросы, касающиеся построения вычислительных методов решения внутренней задачи, носят актуальный характер.

## 2. Интегральные уравнения Поклингтона и Галлена

Приемная антенна является металлической конструкцией и, прежде всего, необходимо рассмотреть электрические процессы в проводнике, находящемся в переменном электромагнитном поле.

Рассмотрим цилиндрический проводник длины  $2l$ , питаемый в точках разрыва (его середине) генератором высокой частоты. Будем предполагать, что радиус  $a$  проводника мал по сравнению с его длиной и длиной  $\lambda$  электромагнитной волны в свободном пространстве (Рис. 2.1).

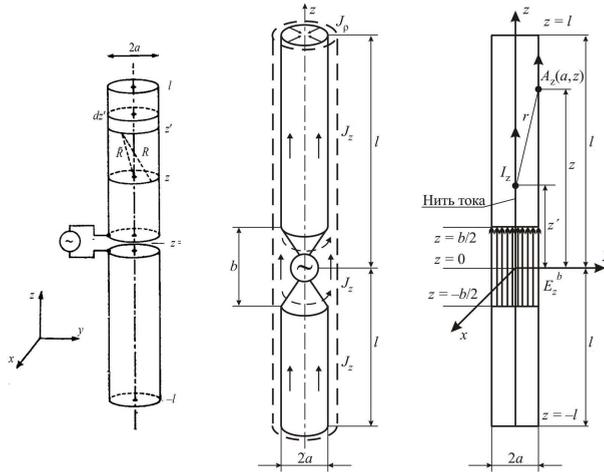


Рис. 2.1. Геометрия проволочной антенны

Fig. 2.1. Geometry of the wire antenna

Вследствие осевой симметрии возбуждения линейной антенны будем считать, что электрический ток на боковой поверхности проводника имеет только продольную составляющую  $\vec{J}_z$ , а в торцевых поверхностях — радиальные составляющие  $\vec{J}_\rho$ . Таким образом, поле излучения не зависит от  $\varphi$  (в цилиндрической системе координат  $(z, \rho, \varphi)$ ) и определяется составляющими  $\vec{E}_z, \vec{E}_\rho, \vec{H}_\varphi$ . Кроме того, краевыми эффектами можно пренебречь и, предполагая проводимость идеальной, считать, что все токи протекают по цилиндрической поверхности. Векторный потенциал  $\vec{A}$ , обусловленный током, протекающим вдоль образующей цилиндра, направлен вдоль оси  $z$  [9].

Используя решение уравнений Максвелла в виде запаздывающих потенциалов, по-

лучим хорошее приближение для  $A_z$ :

$$A_z(z) = \mu_0 \int_{-l}^l \frac{I(z')e^{-ik\bar{R}}}{4\pi\bar{R}} dz'$$

где  $k = \omega(\mu_0\varepsilon_0)^{1/2}$  — волновое число;  $\bar{R} = \sqrt{a^2 + (z - z')^2}$ .

Сформулированные предположения математической модели тонкого электрического вибратора приводят к уравнению Поклингтона, связывающему векторный потенциал  $A_z$  распределения токов  $I(z)$  и касательную составляющую вектора напряженности электрического поля  $E_z(z)$ :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) \int_{-l}^l I(z')G(z - z') dz' = \begin{cases} 0, & \text{при } |z| > b/2, \\ i\omega\varepsilon E_z(z), & \text{при } |z| \leq b/2, \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $I(z) = 2\pi a J_z(z)$ ;  $b$  — величина зазора на боковой поверхности вибратора, на котором определена возбуждающая функция, представленная касательной составляющей вектора напряженности электрического поля;  $G(z - z') = \frac{e^{-ik\bar{R}}}{4\pi\bar{R}}$  [6].

В простейшем случае для линейных антенн малой толщины задача (1) может быть сведена к интегральному уравнению Галлена [9]:

$$\int_{-l}^l I(z')G(z - z') dz' = A \cos kz + B \sin kz - \frac{i2\pi V}{W} \sin k|z|. \quad (2.2)$$

Константы  $A$  и  $B$  находятся из граничных условий обращения тока в нуль на концах вибратора;  $W = \frac{k}{\omega\varepsilon}$  — волновое сопротивление;  $V = -E_z b$ .

Строгое аналитическое решение уравнения Галлена не известно, и, как мы уже упоминали во введении, на практике для инженерных целей чаще всего используют упрощенное решение:

$$I(z) = \frac{i2\pi V}{2W \ln \frac{2l}{a}} \cdot \frac{\sin(l - |z|)}{\cos kl}, \quad (2.3)$$

### 3. Применение метода конечных элементов для решения уравнения Галлена

Для численного решения интегральных уравнений в радиотехнике, как правило, используется семейство методов, объединенных под общим названием «проеекционные методы». В частности, в работе [2] отдается предпочтение методу моментов, в котором важную роль имеет выбор собственных, или базисных, функций. Согласно работе П. Сильвестера и Р. Феррари, можно использовать и метод конечных элементов [10]. Например, численный алгоритм для решения уравнения Галлена методом конечных элементов может быть выстроен по представленной нами ниже схеме.

Рассмотрим интегральное уравнение (2.2), но пока в более общем виде:

$$\int_{-l}^l I(z')G(z - z') dz' = f(z), \quad -l \leq z \leq l, \quad (3.1)$$

где  $I(z')$  – искомая функция;  $G(z - z')$  – ядро интегрального уравнения;  $f(x)$  – известная функция.

Отрезок интегрирования длиной  $2l$  разобьем на конечные элементы узлами  $z_1, z_2, \dots, z_M$ . Для простоты вычислений ограничимся линейным порядком аппроксимации и определим одномерные симплекс-элементы. В каждом внутреннем узле  $z_s, s = 2, 3, \dots, M - 1$ , данной сетки определим соответствующую функцию формы (базисную функцию):

$$N_s(z) = \begin{cases} \frac{z - z_{s-1}}{z_s - z_{s-1}}, & z_{s-1} \leq z \leq z_s, \\ \frac{z_{s+1} - z}{z_{s+1} - z_s}, & z_s \leq z \leq z_{s+1}, \\ 0, & z \notin [z_{s-1}, z_s]. \end{cases}$$

Для узлов с номерами 1 и  $M$  функции формы определим следующим образом

$$N_1(z) = \begin{cases} \frac{z_2 - z}{z_2 - z_1}, & z_1 \leq z \leq z_2, \\ 0, & z \notin [z_1, z_2]. \end{cases} \quad N_M(z) = \begin{cases} \frac{z - z_{M-1}}{z_M - z_{M-1}}, & z_{M-1} \leq z \leq z_M, \\ 0, & z \notin [z_{M-1}, z_M]. \end{cases}$$

Согласно методу конечных элементов [10] будем считать, что функция  $I(z')$  в пределах каждого конечного элемента  $\Delta_s = [z_s, z_{s+1}] s = 1, 2, \dots, M - 1$  представлена некоторым значением  $I_1(z'), \dots, I_{M-1}(z')$ , а вне своей подобласти каждая такая функция  $I_s(z')$  обращается в ноль. Тогда уравнение (3.1) примет вид:

$$\sum_{s=1}^{M-1} \int_{\Delta_s} I_s(z') G(z - z') dz' = f(z). \tag{3.2}$$

Теперь, чтобы ошибка приближения равнялась нулю в среднем, необходимо обеспечить равенство нулю интегралов, взятых от невязки с весовыми функциями  $N_\beta$ , где  $\beta$  принимает все возможные значения индексов для функций форм элементов  $\Delta_s$ . С учетом разбиения отрезка  $[-l, l]$  на конечные элементы получим

$$\sum_{r=1}^{M-1} \sum_{s=1}^{M-1} \int_{\Delta_r} \left( \int_{\Delta_s} I_s(z') G(z - z') dz' \right) N_\beta(z) dz = \sum_{r=1}^{M-1} \int_{\Delta_r} f(z) N_\beta(z) dz. \tag{3.3}$$

Каждую функцию  $I_s(z')$  внутри своей подобласти  $\Delta_s$  представим в виде одномерного симплекс-элемента ([11, с. 31]):

$$I_s(z') = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j = [N] \{\Phi\}, \tag{3.4}$$

где  $[N] = [N_i N_j]$  – вектор-строка;  $\{\Phi\} = \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{Bmatrix}$  – вектор-строка.

Тогда, принимая во внимание соотношение (3.4) и что индекс функции  $N_\beta$  примет только пару значений для области  $\Delta_r$  (в общем виде запишем их как  $N_m$  и  $N_p$ ), соотношение (3.3) запишется в матричной форме следующий образом:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{M-1} \sum_{s=1}^{M-1} \int_{\Delta_r} \left( \int_{\Delta_s} \begin{Bmatrix} N_m(z) \\ N_p(z) \end{Bmatrix} \cdot [N_i(z') \quad N_j(z')] \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{Bmatrix} G(z - z') dz' \right) dz = \\ = \sum_{r=1}^{M-1} \int_{\Delta_r} \begin{Bmatrix} N_m(z) \\ N_p(z) \end{Bmatrix} f(z) dz. \end{aligned}$$

После выполнения действий, связанных с матричными преобразованиями, получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $\Phi_s (s = 1, 2, \dots, M)$ :

$$\sum_{r=1}^{M-1} \sum_{s=1}^{M-1} \int_{\Delta_r} \left( \int_{\Delta_s} \begin{bmatrix} N_m(z)N_i(z') & N_m(z)N_j(z') \\ N_p(z)N_i(z') & N_p(z)N_j(z') \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{Bmatrix} G(z - z')dz' \right) dz = \sum_{r=1}^{M-1} \int_{\Delta_r} \begin{Bmatrix} N_m(z) \\ N_p(z) \end{Bmatrix} y(z)dz. \tag{3.5}$$

При программной реализации численных алгоритмов, для вычисления двойных интегралов в представленной формуле (3.5), нужно учесть, что на элементе  $\Delta_s$  отличны от нуля только функции формы  $N_s$  и  $N_{s+1}$ .

Рассмотрим подробно данную ситуацию, например, для числа узлов  $M = 4$ . Полученные в этом случае значения произведений

$$\begin{Bmatrix} N_m(z) \\ N_p(z) \end{Bmatrix} \cdot [N_i(z') \quad N_j(z')] \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{Bmatrix},$$

стоящих под знаком двойного интеграла  $\int_{\Delta_r} \int_{\Delta_s}$ , представлены в таблице 3.1.

**Таблица 3.1.** Пример для  $M = 4$

**Table 3.1.** Example for  $M = 4$

	$s = 1$ $i = 1, j = 2$	$s = 2$ $i = 2, j = 3$	$s = 3$ $i = 3, j = 4$
$r = 1, m = 1$ $p = 2$	$N_1N_1\Phi_1 + N_1N_2\Phi_2$ $N_2N_1\Phi_1 + N_2N_2\Phi_2$	$N_1N_2\Phi_2 + N_1N_3\Phi_3$ $N_2N_2\Phi_2 + N_2N_3\Phi_3$	$N_1N_3\Phi_3 + N_1N_4\Phi_4$ $N_2N_3\Phi_3 + N_2N_4\Phi_4$
$r = 2, m = 2$ $p = 3$	$N_2N_1\Phi_1 + N_2N_2\Phi_2$ $N_3N_1\Phi_1 + N_3N_2\Phi_2$	$N_2N_2\Phi_2 + N_2N_3\Phi_3$ $N_3N_2\Phi_2 + N_3N_3\Phi_3$	$N_2N_3\Phi_3 + N_2N_4\Phi_4$ $N_3N_3\Phi_3 + N_3N_4\Phi_4$
$r = 3, m = 3$ $p = 4$	$N_3N_1\Phi_1 + N_3N_2\Phi_2$ $N_4N_1\Phi_1 + N_4N_2\Phi_2$	$N_3N_2\Phi_2 + N_3N_3\Phi_3$ $N_4N_2\Phi_2 + N_4N_3\Phi_3$	$N_3N_3\Phi_3 + N_3N_4\Phi_4$ $N_4N_3\Phi_3 + N_4N_4\Phi_4$

Следовательно, основная матрица аппроксимирующей системы линейных алгебраических уравнений примет вид:

$$\begin{pmatrix} \int_{\Delta_1} \int_{\Delta_1} N_1N_1Gdz'dz & \int_{\Delta_1} \int_{\Delta_{1,2}} N_1N_2Gdz'dz & \int_{\Delta_1} \int_{\Delta_{2,3}} N_1N_3Gdz'dz & \int_{\Delta_1} \int_{\Delta_3} N_1N_4Gdz'dz \\ \int_{\Delta_{1,2}} \int_{\Delta_1} N_2N_1Gdz'dz & \int_{\Delta_{1,2}} \int_{\Delta_{1,2}} N_2N_2Gdz'dz & \int_{\Delta_{1,2}} \int_{\Delta_{2,3}} N_2N_3Gdz'dz & \int_{\Delta_{1,2}} \int_{\Delta_3} N_2N_4Gdz'dz \\ \int_{\Delta_{2,3}} \int_{\Delta_1} N_3N_1Gdz'dz & \int_{\Delta_{2,3}} \int_{\Delta_{1,2}} N_3N_2Gdz'dz & \int_{\Delta_{2,3}} \int_{\Delta_{2,3}} N_3N_3Gdz'dz & \int_{\Delta_{2,3}} \int_{\Delta_3} N_3N_4Gdz'dz \\ \int_{\Delta_3} \int_{\Delta_1} N_4N_1Gdz'dz & \int_{\Delta_3} \int_{\Delta_{1,2}} N_4N_2Gdz'dz & \int_{\Delta_3} \int_{\Delta_{2,3}} N_4N_3Gdz'dz & \int_{\Delta_3} \int_{\Delta_3} N_4N_4Gdz'dz \end{pmatrix}$$

Здесь для краткости записи в подынтегральном выражении каждое соотношение  $N_iN_jGdz'dz$  следует читать как  $N_i(z)N_j(z')G(z - z')dz'dz$ , где  $\Delta_{i,j} = \Delta_i \cup \Delta_j$ .

При численном вычислении интегралов, стоящих в правой части формулы (3.5), нужно действовать аналогичным образом.

#### 4. Результаты численного решения

Непосредственное применение описанной вычислительной схемы (3.1)–(3.5) требует, прежде всего подробного, внимания к правой части интегрального уравнения Галлена:

$$f(z) = A \cos kz + B \sin kz - \frac{i2\pi V}{W} \sin k|z|, \text{ где } W = \frac{k}{\omega \varepsilon}, V = -E_z b.$$

Здесь константы  $A$  и  $B$  определяются из граничных условий обращения тока в нуль на концах вибратора и предположения о его достаточно малом радиусе  $a$  [9]. Это позволяет представить  $f(x)$  в таком виде  $f(z) = \frac{i2\pi V \sin k(l-|z|)}{W \cos kl}$ . Кроме того, в ядре  $G(z - z') = \frac{e^{-ik\bar{R}}}{4\pi\bar{R}}$  (где  $\bar{R} = \sqrt{(z - z')^2 + a^2}$ ) и решении  $I(z')$  уравнения (2.2) выделим действительную и мнимую составляющие:

$$G(z - z') = G_{Re}(z - z') + iG_{Im}(z - z') = \frac{\cos k\bar{R}}{4\pi\bar{R}} - i \frac{\sin k\bar{R}}{4\pi\bar{R}},$$

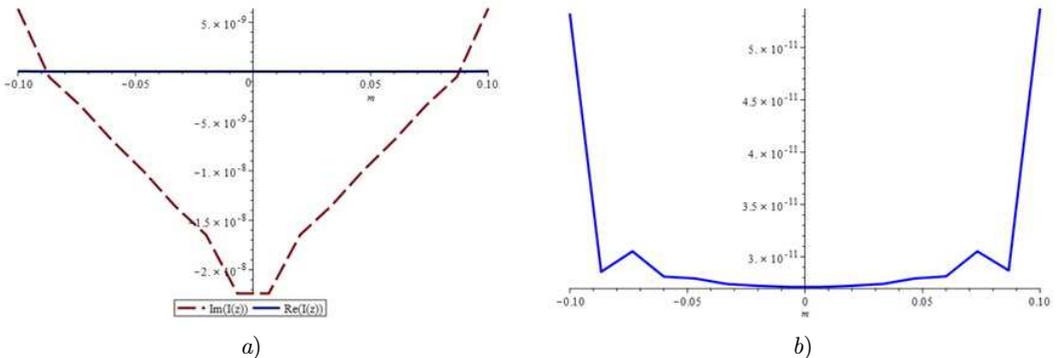
$$I_s(z') = I_{sRe}(z') + iI_{sIm}(z'),$$

получим

$$\begin{cases} \int_{-l}^l I_{Re}(z') G_{Re}(z - z') dz' - \int_{-l}^l I_{Im}(z') G_{Im}(z - z') dz' = 0, \\ \int_{-l}^l I_{Re}(z') G_{Im}(z - z') dz' + \int_{-l}^l I_{Im}(z') G_{Re}(z - z') dz' = f_{Im}(z), \end{cases} \quad (4.1)$$

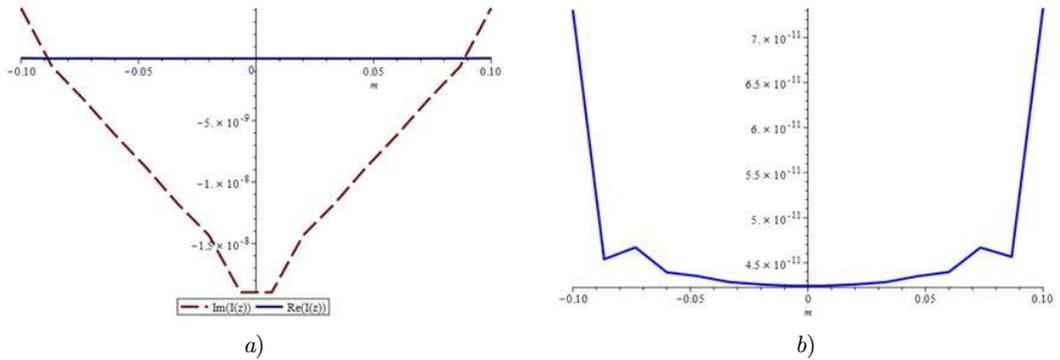
(где  $f_{Re}(z) \equiv 0$ ).

Представленная вычислительная схема (3.1)–(3.5) была применена к каждому интегралу системы (4.1) и реализована в среде разработки Visual Studio на языке программирования C/C++. Результаты моделирования представлены на рисунках 4.1 и 4.2.



**Рис. 4.1.** Поверхностная плотность тока для уравнения (2.2) при нормировке  $b/l = 1/100$ ,  $a/\lambda = 1/400$ ,  $l/\lambda = 1/4$ : а) действительная  $Re(I(z))$  и мнимая  $Im(I(z))$  части, б) действительная часть  $Re(I(z))$  в увеличенном масштабе

**Fig. 4.1.** The surface current density for equation (2.2) under normalization  $b/l = 1/100$ ,  $a/\lambda = 1/400$ ,  $l/\lambda = 1/4$ : a) the real  $Re(I(z))$  and imaginary  $Im(I(z))$  parts, b) the real part  $Re(I(z))$  on an enlarged scale



**Рис. 4.2.** Поверхностная плотность тока для уравнения (2.2) при нормировке  $b/l = 1/100$ ,  $a/\lambda = 1/400$ ,  $l/\lambda = 1/2$ : *a*) действительная  $Re(I(z))$  и мнимая  $Im(I(z))$  части, *b*) действительная часть  $Re(I(z))$  в увеличенном масштабе

**Fig. 4.2.** The surface current density for equation (2.2) under normalization  $b/l = 1/100$ ,  $a/\lambda = 1/400$ ,  $l/\lambda = 1/2$ : *a*) the real  $Re(I(z))$  and imaginary  $Im(I(z))$  parts of the surface current density *b*) the real part  $Re(I(z))$  on an enlarged scale

Заметим, что основная матрица аппроксимирующей СЛАУ системы (4.1) имеет достаточно большое число обусловленности и нахождение обратной для нее матрицы лучше проводить с высокой точностью, поэтому решалась она с использованием математического пакета Maple.

## 5. Обсуждение и анализ полученных результатов

Даже визуальный анализ численных результатов для уравнения Галлена показывает, что на концах симметричного вибратора ток не обращается в ноль. Прежде всего, это может быть вызвано не столько аналитически неточным нахождением констант  $A$  и  $B$  в уравнении [9], а тем, что уравнение Галлена относится к классу некорректных задач. И здесь следует предельно внимательно относиться к полученным решениям и их регуляризации, а также к вопросам исследования границ применимости уравнения Галлена [9].

Представленная вычислительная схема была программно реализована для уравнения Галлена при следующих параметрах  $b/l = 1/100$ ,  $a/\lambda = 1/4$ ,  $l/\lambda = 1/4$  и  $l/\lambda = 1/2$ . Численные расчеты проводились при условии постоянства  $E_z(z)$  в зазоре  $b$  и нормировке  $f(z) = i\gamma\varepsilon E_z(z) = ia/\lambda$ . Из сравнения результатов моделирования с решением в первом приближении, а также с результатами работы [6], в которой выполнялось двухэтапное применение метода конечных элементов к интегро-дифференциальному уравнению Поклингтона (сначала решалось дифференциальное, а затем и интегральное уравнение), можно сделать вывод, что распределения действительных частей  $ReI(z)$  имеют схожую геометрию, а в случае сравнения мнимых частей  $ImI(z)$  существенная разница в характере распределения наблюдается при использовании разных сеток метода конечных элементов.

## 6. Заключение

Решение задачи синтеза в антенной технике, задающее распределение тока по симметричному вибратору, является важным объектом изучения и позволяет найти основные характеристики и параметры антенны.

В результате проделанной работы была построена и исследована вычислительная схема метода конечных элементов применительно к интегральным уравнениям. Кроме того, предложено применение данной вычислительной схемы к численному решению интегрального уравнения Галлена, моделирующего поведение элементов линейных антенн. Заметим, что применение подобной схемы к численному решению интегрального уравнения Галлена показало невысокую эффективность, что обусловлено и принадлежностью данной задачи к классу некорректных и в целом вопросом определения границ применимости уравнения Галлена.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зырянов Ю. Т., Федюнин П. А., Белоусов О. А. [и др.] Антенны : учеб. пособие / Ю. Т. Зырянов [и др.]. Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2014. 128 с.
2. Вычислительные методы в электродинамике / под ред. Р. Митры. М.: Мир, 1977. 487 с.
3. Манжиров А. В., Полянин А. Д. Справочник по интегральным уравнениям: методы решения. М. : Факториал Пресс, 2000. 384 с.
4. Бойков И. В., Айкашев П. В. Применение непрерывного операторного метода к решению уравнений Поклингтона и Галлена для тонких проводочных антенн // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2020. Т. 55, № 3. С. 127–146. DOI: <https://doi.org/10.21685/2072-3040-2020-3-10>.
5. Рогова, Н. В. Методы вейвлет-анализа численного решения одномерных задач электродинамики: автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Воронеж, 2008. 16 с.
6. Тарасов Д. В., Коннов Г. А. Применение метода конечных элементов для решения интегральных уравнений теории линейных антенн // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : мат. XV Междунар. науч.-техн. конф. / под ред. д.ф.-м.н., проф. И. В. Бойкова. Пенза: Изд-во ПГУ, 2020. С. 66–74.
7. Бойков И. В. Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений. Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2004. 316 с.
8. Неганов В. А., Матвеев И. В., Медведев С. В. Метод сведения уравнения поклингтона для электрического вибратора к сингулярному интегральному уравнению // Письма в ЖЭТФ. 2000. Т. 26, № 12. С. 86–94.
9. Бойков И. В., Тарасов Д. В. Применение гиперсингулярных интегральных уравнений к численному моделированию электрического вибратора // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2008, № 4. С. 94–106.

10. Сильвестер П., Феррари Р. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков: пер.с англ. М.: Мир, 1986. 229 с.
11. Сегерлинд, Л. Применение метода конечных элементов: пер. с англ. М. : Мир, 1979. 392 с.

Поступила 01.12.2022; доработана после рецензирования 10.02.2023;  
принята к публикации 24.02.2023

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

## REFERENCES

1. Yu. T. Zyryanov, P. A. Fedyunin, O. A. Belousov [et al.], *Antenny: ucheb. posobie [Antennas: study. manual]*, FGBOU VPO «TGTU», Tambov, 2014 (In Russ.), 128 p.
2. R. Mitra, [*Computational methods in electrodynamics*], Mir., Moscow, 1977 (In Russ.), 487 p.
3. A. V. Manzhairov, A. D. Polyinin, [*Handbook of Integral Equations: Solution methods*], Izd-vo «Faktorial Press», Moscow, 2000 (In Russ.), 384 p.
4. I. V. Boykov, P. V. Aykashev, “[Application of the continuous operator method to the solution of the Pocklington and Gallen equations for thin wire antennas]”, *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki*, **55**:3 (2020), 127–146 (In Russ.).
5. N. V. Rogova, [*Methods of wavelet analysis of numerical solution of one-dimensional problems of electro-dynamics / abstract. diss. ... candidate of physical and mathematical sciences.*], Voronezh, 2008 (In Russ.), 16 p.
6. D. V. Tarasov, G. A. Konnov, “Application of the finite element method for solving integral equations of the theory of linear antennas”, *Analytical and numerical methods of modeling natural-scientific and social problems : materials of the XV International Scientific-Technical. conf. / ed by I. V. Boykov.*, Izd-vo PGU, Penza, 2020, 66–74 (In Russ.).
7. I. V. Boykov, *Priblizhennyye metody resheniya singulyarnykh integral'nykh uravneniy [Approximate methods for solving singular integral equations]*, Izd-vo Penz. gos. un-ta, Penza, 2004. (In Russ.), 316 p.
8. V. A. Neganov, I. V. Matveev, S. V. Medvedev, “[Method of reducing the Pocklington equation for an electric vibrator to a singular integral equation]”, *Pis'ma v ZhETF*, **26**:12 (2000), 86–94. (In Russ.).
9. I. V. Boykov, D. V. Tarasov, “[Application of hypersingular integral equations to numerical modeling of an electric vibrator]”, *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Tekhnicheskie nauki*, **4** (2008), 94–106 (In Russ.).
10. P. Sil'vester, R. Ferrari, [*Finite element method for radio engineers and electrical engineers : trans. from English*], Mir, Moscow, 1986 (In Russ.), 229 p.

11. L. Segerlind, *Primenenie metoda konechnykh elementov: per. s angl. [Application of the finite element method: trans. from English]*, Mir, Moscow, 1979 (In Russ.), 392 p.

*Submitted 01.12.2022; Revised 10.02.2023; Accepted 24.02.2023*

*The author has read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The author declare no conflict of interest.