

DOI 10.15507/2079-6900.25.202301.531-541

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 515.163

Зацепление как полный инвариант 3-диффеоморфизмов Морса-Смейла

А. А. Ноздринов, А. И. Починка

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
(г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

Аннотация. В настоящей работе рассматриваются градиентно-подобные диффеоморфизмы Морса-Смейла, заданные на трехмерной сфере S^3 . Для таких диффеоморфизмов полный инвариант топологической сопряженности получен в работах Х. Бонатти, В. Гринеса, В. Медведева, Е. Пеку. Он представляет собой класс эквивалентности набора гомотопически нетривиально вложенных торов и бутылок Клейна, вложенных в некоторое замкнутое 3-многообразие, фундаментальная группа которого допускает эпиморфизм в группу \mathbb{Z} . Такой инвариант называется схемой градиентно-подобного диффеоморфизма $f : S^3 \rightarrow S^3$. Авторами настоящего исследования выделен класс G диффеоморфизмов, для которых полным инвариантом является более простой с топологической точки зрения объект, а именно зацепление существенных узлов в многообразии $S^2 \times S^1$. Рассматриваемые диффеоморфизмы определяются тем, что их неблуждающее множество содержит единственный источник, а замыкания устойчивых многообразий седловых точек ограничивают трехмерные шары с попарно не пересекающимися внутренностями. Доказано, что в дополнении к замыканию этих шаров диффеоморфизм класса G содержит в точности одну неблуждающую точку, которая является неподвижным стоком. Установлено, что полным инвариантом топологической сопряженности диффеоморфизмов класса G является пространство орбит неустойчивых седловых сепаратрис в бассейне этого стока. Показано, что пространство орбит представляет собой зацепление нестягиваемых узлов в многообразии $S^2 \times S^1$ и эквивалентность зацеплений равносильна эквивалентности схем. Также приведена реализация диффеоморфизмов рассмотренного класса по произвольному зацеплению, состоящему из существенных узлов в многообразии $S^2 \times S^1$.

Ключевые слова: диффеоморфизм Морса-Смейла, узел, зацепление, топологическая сопряженность, инвариант

Для цитирования: Ноздринов А. А., Починка А. И. Зацепление как полный инвариант 3-диффеоморфизмов Морса-Смейла // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 1. С. 531–541. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202301.531-541>

Об авторах:

Ноздринов Алексей Александрович, аспирант кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1223-7334>, lex87@bk.ru

Починка Арсений Ильич, студент факультета информатики, математики и компьютерных наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4408-8644>, senya.pochinka@yandex.ru

© А. А. Ноздринов, А. И. Починка



MSC2020 37D15

Link as a complete invariant of Morse-Smale 3-diffeomorphisms

A. A. Nozdrinov, A. I. Pochinka

Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

Abstract. In this paper we consider gradient-like Morse-Smale diffeomorphisms defined on the three-dimensional sphere \mathbb{S}^3 . For such diffeomorphisms, a complete invariant of topological conjugacy was obtained in the works of C. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, E. Peculiar. It is an equivalence class of a set of homotopically non-trivially embedded tori and Klein bottles embedded in some closed 3-manifold whose fundamental group admits an epimorphism to the group \mathbb{Z} . Such an invariant is called the scheme of the gradient-like diffeomorphism $f : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$. We single out a class G of diffeomorphisms whose complete invariant is a topologically simpler object, namely, the link of essential knots in the manifold $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. The diffeomorphisms under consideration are determined by the fact that their non-wandering set contains a unique source, and the closures of stable saddle point manifolds bound three-dimensional balls with pairwise disjoint interiors. We prove that, in addition to the closure of these balls, a diffeomorphism of the class G contains exactly one nonwandering point, which is a fixed sink. It is established that the total invariant of topological conjugacy of class G diffeomorphisms is the space of orbits of unstable saddle separatrices in the basin of this sink. It is shown that the space of orbits is a link of non-contractible knots in the manifold $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ and that the equivalence of links is tantamount to the equivalence of schemes. We also provide a realization of diffeomorphisms of the considered class along an arbitrary link consisting of essential nodes in the manifold $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Keywords: Morse-Smale diffeomorphism, knot, link, topological conjugacy, invariant

For citation: A. A. Nozdrinov, A. I. Pochinka. Link as a complete invariant of Morse-Smale 3-diffeomorphisms. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 25:1(2023), 531–541. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202301.531-541>

About the authors:

Alexey A. Nozdrinov, Post-graduate student, Department of Fundamental Mathematics, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1223-7334>, lex87@bk.ru

Arseniy I. Pochinka, Student of the Faculty of Informatics, Mathematics and Computer Science, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), senya.pochinka@yandex.ru

1. Введение

Специалисты по динамике используют инварианты узлов и зацеплений для описания периодических орбит потоков, что помогает им лучше понять теорию обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако специалисты по дискретным динамическим системам также активно используют теорию узлов и зацеплений для описания

инвариантов динамики. В частности, динамика некоторых диффеоморфизмов Морса-Смейла, заданных на произвольном 3-многообразии, может быть полностью (с точностью до топологической сопряженности) определена поведением сепаратрис седловых точек, которое, в свою очередь, описывается узлом или зацеплением в многообразии $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Заметим, что топологическая классификация произвольных 3-диффеоморфизмов Морса-Смейла была получена в [1] и использует в качестве полного инварианта класс эквивалентности пары двумерных ламинаций в некотором 3-многообразии. Поскольку классификация 3-многообразий является открытой проблемой, естественной задачей является выделение диффеоморфизмов, допускающих хорошо изученные объекты в качестве инвариантов. Например, для класса 3-диффеоморфизмов, чье неблуждающее множество состоит из четырех гиперболических неподвижных точек, полным инвариантом топологической сопряженности является класс эквивалентности узла Хопфа в $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ [2–3].

В настоящей работе мы выделяем класс 3-диффеоморфизмов Морса-Смейла, для которых полным инвариантом топологической сопряженности является класс эквивалентности существенного зацепления в $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Пусть $f: M^3 \rightarrow M^3$ – диффеоморфизм Морса-Смейла, заданный на замкнутом ориентируемом связном 3-многообразии. Пусть $\Omega_q, q \in \{0, 1, 2, 3\}$ – множество всех его периодических точек p с $\dim W_p^u = q$. Через $|\Omega_q|$ обозначим число точек в множестве Ω_q . Заметим, что $|\Omega_0| \geq 1, |\Omega_3| \geq 1$ (см., например, [4]). При этом если $|\Omega_0| = 1$ или $|\Omega_3| = 1$, то $M^3 \cong \mathbb{S}^3$ [5]. Везде далее мы предполагаем, что множество Ω_3 состоит из единственного источника α . В этом случае множество Ω_2 пусто [6]. Если $\Omega_1 = \emptyset$, то f – диффеоморфизм «источник-сток» и все такие диффеоморфизмы попарно топологически сопряжены [7]. Если $|\Omega_1| = 1$, то f – диффеоморфизм Пикстона и топологическая классификация таких диффеоморфизмов полностью определяется классом эквивалентности узла Хопфа [2]. Везде далее мы полагаем, что $|\Omega_1| > 1$. Перенумеруем седловые орбиты множества Ω_1 :

$$\mathcal{O}_{\sigma_1}, \dots, \mathcal{O}_{\sigma_k}$$

и обозначим через m_i период седла σ_i . Тогда для $i \in \{1, \dots, k\}$ множество $S_i = W_{\sigma_i}^s \cup \alpha$ гомеоморфно 2-сфере, топологически вложенной в \mathbb{S}^3 [7]. Обозначим через G множество диффеоморфизмов Морса-Смейла $f: \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$, таких что 2-сферы S_1, \dots, S_k ограничивают 3-шары B_1, \dots, B_k с попарно не пересекающимися внутренностями в \mathbb{S}^3 . Для $f \in G$ положим $B = \bigcup_{i=1}^k \left(\bigcup_{j=0}^{m_i-1} f^j(B_i) \right)$. Тогда множество $\mathbb{S}^3 \setminus B$ содержит в точности одну периодическую точку диффеоморфизма f , которая является неподвижным стоком, обозначим его ω [5] (см. Рис. 1.1).

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ и $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – диффеоморфизм, заданный формулой $h(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{2}$. Определим отображение $p: \mathbb{R}^3 \setminus O \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ формулой

$$p(\mathbf{x}) = \left(\frac{x_1}{\|\mathbf{x}\|}, \frac{x_2}{\|\mathbf{x}\|}, \log_2(\|\mathbf{x}\|) \pmod{1} \right).$$

Пусть $V_\omega = W_\omega^s \setminus \omega$. В силу гиперболичности стока ω существует диффеоморфизм $\psi_\omega: V_\omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus O$, который сопрягает диффеоморфизмы f и h . Пусть $p_\omega = p\psi_f: V_f \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ и $\mathcal{K}_f = p_\omega(W_{\Omega_1}^u \cap V_\omega)$. Согласно [7] множество \mathcal{K}_f является гладким зацеплением в $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ (см. Рис. 1.2).

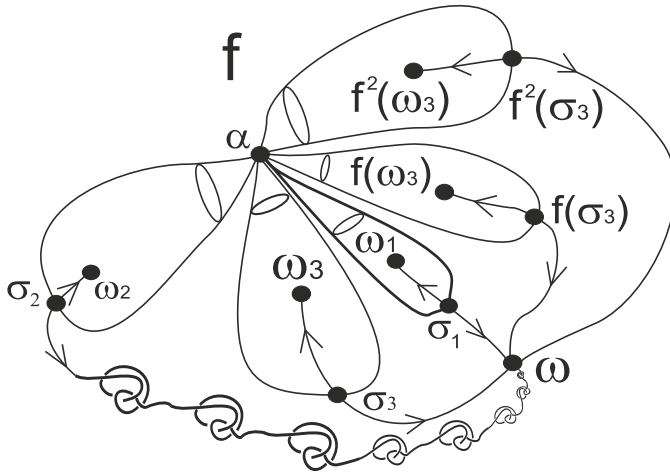


Рис. 1.1. Фазовый портрет диффеоморфизма $f \in G$
Fig. 1.1. Phase portrait of a diffeomorphism $f \in G$

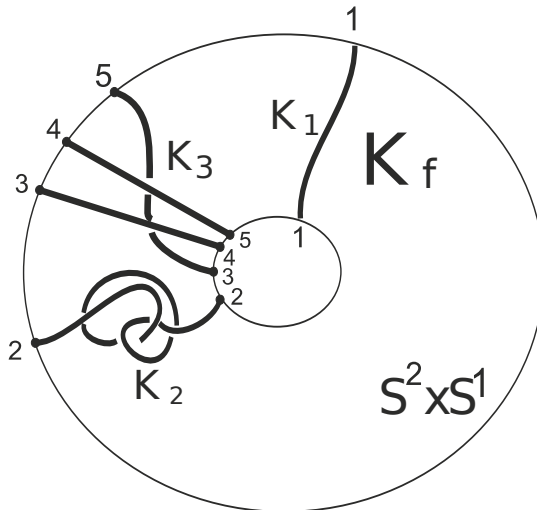


Рис. 1.2. Зацепление K_f диффеоморфизма $f \in G$, изображенного на Рис. 1.1
Fig. 1.2. The link K_f of the diffeomorphism $f \in G$ shown in the Fig. 1.1

Два зацепления $K_f, K_{f'}$ назовем эквивалентными, если существует гомеоморфизм $\varphi : S^2 \times S^1 \rightarrow S^2 \times S^1$, такой что $\varphi(K_f) = K_{f'}$.

Т е о р е м а 1.1. Два диффеоморфизма $f, f' \in G$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их зацепления $K_f, K_{f'}$ эквивалентны.

Т е о р е м а 1.2. Для любого зацепления $K \subset S^2 \times S^1$, состоящего из существенных узлов, существует диффеоморфизм $f \in G$ такой, что зацепления K и K_f эквивалентны.

2. Необходимые сведения из теории динамических систем

Развернутое изложение приведенных в данном разделе фактов можно найти в [4–5], [7].

Пусть диффеоморфизм $f : M^n \rightarrow M^n$ задан на гладком замкнутом (компактном без края) n -многообразии ($n \geq 1$) M^n с метрикой d .

Два диффеоморфизма $f, f' : M^n \rightarrow M^n$ называются *топологически сопряженными*, если существует гомеоморфизм $h : M^n \rightarrow M^n$, такой что $fh = hf'$.

Точка $x \in M^n$ называется *блуждающей* для f , если существует открытая окрестность U_x точки x , такая что $f^n(U_x) \cap U_x = \emptyset$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В противном случае точка x называется *неблуждающей*. Множество неблуждающих точек диффеоморфизма f называется *неблуждающим множеством* и обозначается Ω_f .

Например, неблуждающими являются все периодические точки диффеоморфизма. Если множество Ω_f конечно, то каждая точка $p \in \Omega_f$ является периодической, обозначим через $m_p \in \mathbb{N}$ период периодической точки p . С любой периодической точкой p связаны *устойчивое* и *неустойчивое* многообразия, определяемые следующим образом:

$$W_p^s = \{x \in M^n : \lim_{k \rightarrow +\infty} d(f^{km_p}(x), p) = 0\},$$

$$W_p^u = \{x \in M^n : \lim_{k \rightarrow +\infty} d(f^{-km_p}(x), p) = 0\}.$$

Устойчивые и неустойчивые многообразия называются *инвариантными многообразиями*.

Периодическая точка $p \in \Omega_f$ называется *гиперболической*, если все собственные значения матрицы Якоби $\left(\frac{\partial f^{m_p}}{\partial x}\right)|_p$ по модулю не равны единице. Если все собственные значения по модулю меньше (больше) единицы, то p называют *стоковой* (*источниковой*) *точкой*. Стоковые и источниковые точки называются *узловыми*. Если гиперболическая периодическая точка не является *узловой*, то она называется *седловой точкой*.

Из гиперболической структуры периодической точки p следует, что ее устойчивое W_p^s и неустойчивое W_p^u многообразия являются образами относительно инъективных иммерсий пространств \mathbb{R}^{q_p} и \mathbb{R}^{n-q_p} , где q_p – число собственных значений матрицы Якоби, по модулю больших единицы. Компонента линейной связности множества $W_p^u \setminus p$ ($W_p^s \setminus p$) называется *неустойчивой* (*устойчивой*) *сепаратрисой* точки p .

Замкнутое f -инвариантное множество $A \subset M^n$ называется *аттрактором* дискретной динамической системы f , если оно имеет компактную окрестность U_A , такую что $f(U_A) \subset \text{int } U_A$ и $A = \bigcap_{k \geq 0} f^k(U_A)$. Окрестность U_A при этом называется *захватывающей*. *Репеллер* определяется как аттрактор для f^{-1} .

Диффеоморфизм $f : M^n \rightarrow M^n$ называется *диффеоморфизмом Морса-Смейла*, если:

- 1) неблуждающее множество Ω_f состоит из конечного числа гиперболических орбит;
- 2) многообразия W_p^s, W_r^u пересекаются трансверсально для любых неблуждающих точек p, r .

3. Схема диффеоморфизма $f \in G$

В этом разделе введем понятие схемы диффеоморфизма $f \in G$, класс эквивалентности которой есть полный инвариант топологической сопряженности диффеоморфизма

[1].

Пусть $V_\alpha = W_\alpha^u \setminus \alpha$. В силу гиперболичности источника α существует диффеоморфизм $\psi_\alpha: V_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus O$, который сопрягает диффеоморфизмы f и h^{-1} . Пусть $p_\alpha = p\psi_\alpha: V_\alpha \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ и $\mathcal{T}_f = p_\alpha(W_{\Omega_1}^s \cap V_\alpha)$. Пара

$$S_f = (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1, \mathcal{T}_f)$$

называется *схемой* диффеоморфизма $f \in G$. Согласно [7] множество \mathcal{T}_f состоит из гомотопически нетривиальных гладко вложенных в $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ двумерных торов (см. Рис. 3.1).

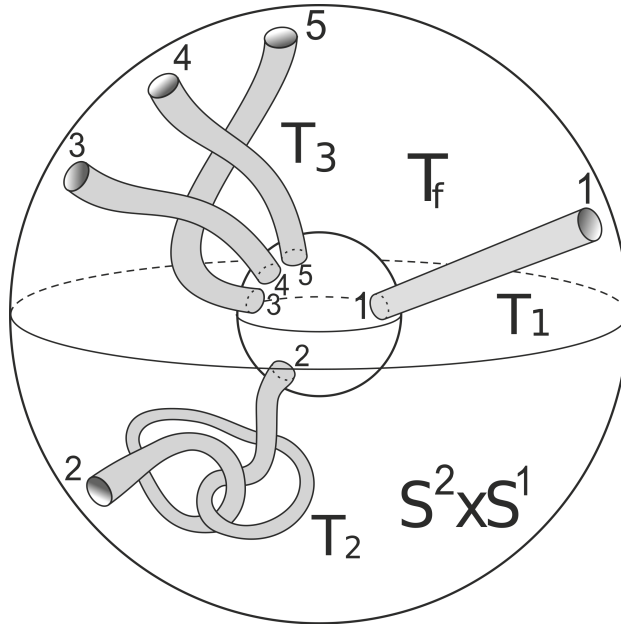


Рис. 3.1. Схема S_f диффеоморфизма $f \in G$, фазовый портрет которого изображен на Рис. 1.1

Fig. 3.1. Scheme S_f of the diffeomorphism $f \in G$ whose phase portrait is shown in the Fig. 1.1

Две схемы $S_f, S_{f'}$ называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\psi: \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ такой, что $\psi(\mathcal{T}_f) = \mathcal{T}_{f'}$.

Предложение 3.1 ([1], Theorem 1). *Диффеоморфизмы $f, f' \in G$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их схемы $S_f, S_{f'}$ эквивалентны.*

Таким образом, для доказательства теоремы 1.1 достаточно показать, что для диффеоморфизмов множества G , эквивалентность зацеплений равносильна эквивалентности схем.

4. Эквивалентность зацеплений равносильна эквивалентности схем

В этом разделе докажем результат (лемма 4.1), из которого будет непосредственно следовать теорема 1.1.

Л е м м а 4.1. *Зацепления $\mathcal{K}_f, \mathcal{K}_{f'}$ диффеоморфизмов $f, f' \in G$ эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны их схемы $S_f, S_{f'}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $i \in \{1, \dots, k\}$ положим $K_i = p(W_{\sigma_i}^u \setminus \sigma_i), T_i = p_{\alpha}(W_{\sigma_i}^s \setminus \sigma_i)$. Тогда

$$\mathcal{K}_f = \bigsqcup_{i=1}^k K_i, \mathcal{T}_f = \bigsqcup_{i=1}^k T_i.$$

Обозначим через $U(K_i)$ трубчатую окрестность узла K_i , гомеоморфную заполненному тору. Тогда $U(T_i) = q_f(p_f^{-1}(U(K_i))) \cup T_i$ – односторонняя трубчатая окрестность тора T_i . Положим

$$U(\mathcal{K}_f) = \bigsqcup_{i=1}^k U(K_i), U(\mathcal{T}_f) = \bigsqcup_{i=1}^k U(T_i),$$

$$V = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \setminus \text{int } U(\mathcal{K}_f), W = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \setminus \text{int } U(\mathcal{T}_f).$$

По построению отображение $\xi = p_{\alpha} p_{\omega}^{-1}|_V : V \rightarrow W$ является гомеоморфизмом. Покажем, что гомеоморфизм ξ продолжается до гомеоморфизма $\xi : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Для любой замкнутой кривой $c \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ будем обозначать через $\langle c \rangle$ число оборотов петли c вокруг образующей фундаментальной группы $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Тогда тор $\partial V_i = \partial V \cap U(K_i)$ имеет образующие λ_i, μ_i , такие что

$$\langle \lambda_i \rangle = m_i, \langle \mu_i \rangle = 0.$$

Из построения гомеоморфизма ξ следует, что $\xi(\lambda_i), \xi(\mu_i)$ – образующие тора $\partial W_i = \partial W \cap U(T_i)$, при этом

$$\langle \xi(\lambda_i) \rangle = m_i, \langle \xi(\mu_i) \rangle = 0.$$

Из условий, наложенных на класс G , следует, что каждый тор ∂W_i ограничивает заполненный тор W_i в W . Тогда $\xi(\mu_i)$ – меридиан заполненного тора W_i , а гомеоморфизм $\xi|_{\partial V_i} : \partial V_i \rightarrow \partial W_i$ переводит меридиан заполненного тора $U(K_i)$ в меридиан заполненного тора W_i , в силу чего он продолжается на заполненные торы [8].

Таким образом, существует гомеоморфизм $\xi : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ такой, что $\xi(U(K_i)) = W_i, i \in \{1, \dots, k\}$.

Аналогичные обозначения со штрихом введем для диффеоморфизма $f' \in G$. Не уменьшая общности будем считать, что $U(\mathcal{K}_{f'}) = \varphi(U(\mathcal{K}_f))$. Положим $\psi = \xi' \varphi \xi^{-1} : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Тогда $\psi(W_i) = W'_i$ и, не уменьшая общности, можно считать, что $\psi(T_i) = T'_i$.

5. Реализация диффеоморфизма по зацеплению

В настоящем разделе докажем теорему 1.2, а именно реализуем любое зацепление $\mathcal{K} \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, состоящее из существенных узлов

$$\mathcal{K} = K_1 \sqcup \dots \sqcup K_k$$

диффеоморфизмом $f \in G$.

Пусть $\langle K_i \rangle = m_i$. Тогда множество $\bar{K}_i = p^{-1}(K_i)$ состоит из h -инвариантного объединения дуг

$$\bar{K}_i = \bar{K}_i^0 \sqcup \dots \sqcup h^{m_i-1}(\bar{K}_i^0).$$

Пусть $U(K_i) \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ – трубчатая окрестность узла K_i . Тогда $U(\bar{K}_i) = p^{-1}(U(K_i))$ – h -инвариантная окрестность дуг \bar{K}_i , состоящая из m_i компонент связности $U(\bar{K}_i^0) \sqcup \dots \sqcup h^{m_i-1}(U(\bar{K}_i^0))$, каждая из которых диффеоморфна $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{R}^1$.

Пусть $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2^2 + x_3^2 \leq 4\}$ и пусть поток $g^t : C \rightarrow C$ определен как

$$g^t(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + t, x_2, x_3).$$

Тогда существует диффеоморфизм $\zeta_i : U(\bar{K}_i^0) \rightarrow C$, который сопрягает диффеоморфизмы $h^{m_i}|_{U(\bar{K}_i^0)}$ и $g = g^1|_C$. Определим поток ϕ^t на C следующими формулами:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \begin{cases} 1 - \frac{1}{9}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4)^2, & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 4 \\ 1, & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 4 \end{cases} \\ \dot{x}_2 = \begin{cases} \frac{x_2}{2}(\sin(\frac{\pi}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3)) - 1), & 2 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 4 \\ -x_2, & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 2 \end{cases} \\ \dot{x}_3 = \begin{cases} \frac{x_3}{2}(\sin(\frac{\pi}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3)) - 1), & 2 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 4 \\ -x_3, & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 2 \end{cases} \\ \dot{x}_3 = \begin{cases} 0, & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 4 \end{cases} \end{cases}$$

По построению диффеоморфизм $\phi = \phi^1$ имеет две неподвижные точки: седло $P(1, 0, 0)$ и сток $Q(-1, 0, 0)$ (Рис. 5.2) – обе гиперболические. Одна неустойчивая сепаратриса седла P совпадает с открытым интервалом $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : |x_1| < 1, x_2 = x_3 = 0\}$, принадлежащим бассейну стока Q , а другая – лучом $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 > 1, x_2 = x_3 = 0\}$. Заметим, что ϕ совпадает с диффеоморфизмом $g = g^1$ вне шара $\{(x_1, x_2, x_3) \in C : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 4\}$.

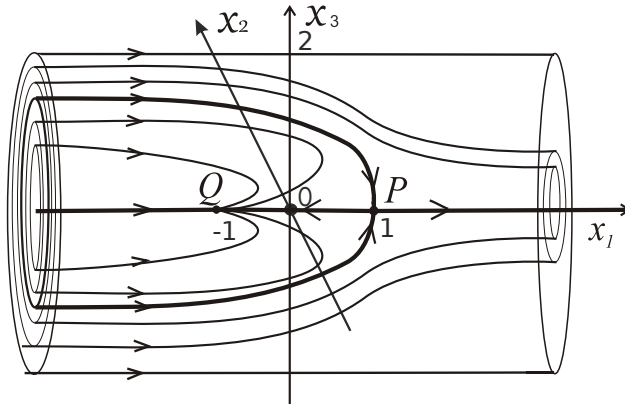


Рис. 5.2. Траектории потока ϕ^t
 Fig. 5.2. Flow trajectories ϕ^t

Определим диффеоморфизм $\bar{f}_K : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ таким образом, что \bar{f}_K совпадает с h вне $U(\bar{K}_1) \cup \dots \cup U(\bar{K}_k)$ и совпадает с диффеоморфизмом $h_i : U(\bar{K}_i) \rightarrow U(\bar{K}_i)$, заданным формулой

$$h_i(h^j(x)) = \begin{cases} h(h^j(x)), & j \in \{0, \dots, m_i - 2\}, x \in U(\bar{K}_i^0); \\ \zeta_i^{-1}(\phi(\zeta_i(x))), & j = m_i - 1, x \in U(\bar{K}_i^0). \end{cases}$$

Тогда \bar{f}_K имеет в $U(\bar{K}_i)$ две периодические орбиты периода m_i : стока $\omega_i = \zeta_i^{-1}(Q)$ и седла $\sigma_i = \zeta_i^{-1}(P)$ – обе гиперболические (Рис. 5.3).

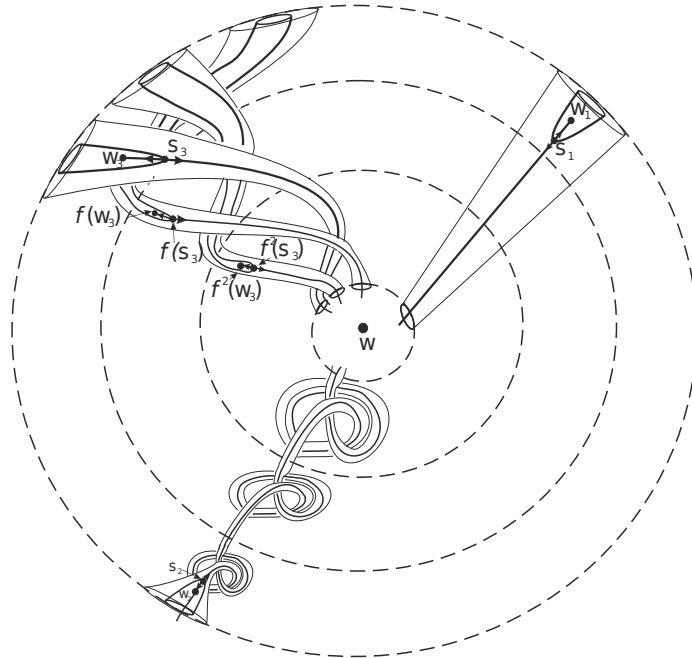


Рис. 5.3. Фазовый портрет диффеоморфизма \bar{f}_K
Fig. 5.3. Phase portrait of the diffeomorphism \bar{f}_K

Далее спроецируем динамику на 3-сферу. Обозначим через $N(0,0,0,1)$ северный полюс сферы $S^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) : \|x\| = 1\}$. Для каждой точки $x \in (S^3 \setminus \{N\})$ существует единственная прямая, проходящая через N и x в \mathbb{R}^4 , и эта прямая пересекает \mathbb{R}^3 в единственной точке $\vartheta_+(x)$. Стереографическая проекция точки x и есть точка $\vartheta_+(x)$. Несложно проверить, что

$$\vartheta_+(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{x_1}{1-x_4}, \frac{x_2}{1-x_4}, \frac{x_3}{1-x_4} \right).$$

Таким образом, стереографическая проекция $\vartheta_+ : S^3 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ – диффеоморфизм. По построению диффеоморфизм \bar{f}_K совпадает с h в некоторой окрестности точки O и бесконечной точки, следовательно, он индуцирует на S^3 диффеоморфизм Морса-Смейла

$$f_K(x) = \begin{cases} \vartheta_+^{-1}(\bar{f}_K(\vartheta_+(x))), & x \neq N; \\ N, & x = N. \end{cases}$$

Непосредственно из построения следует, что диффеоморфизм f_K принадлежит множеству G , назовем такие диффеоморфизмы *модельными* и из теоремы 1.1 вытекает следующее утверждение.

С л е д с т в и е 5.1.

- Любой диффеоморфизм $f \in G$ топологически сопряжен некоторому модельному диффеоморфизму $f_{\mathcal{K}}$.
- Модельные диффеоморфизмы $f_{\mathcal{K}}, f_{\mathcal{K}'}$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда зацепления $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$ эквивалентны.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФ (проект № 21-11-00010), кроме построения квази-энергетической функции, которое поддержано Лабораторией ДСП, НИУ ВШЭ, грант Правительства РФ (договор 075-15-2022-1101).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bonatti C., Grines V., Pochinka O. Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds // Duke Mathematical Journal. 2019. Vol. 168, no. 13. pp. 2507–2558. DOI: <https://doi.org/10.1215/00127094-2019-0019>
2. Bonatti C., Grines V. Knots as topological invariants for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3 // Journal of Dynamical and Control Systems. 2000. Vol. 6, no. 4. pp. 579–602. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1009508728879>
3. Pochinka O., Talanova E., Shubin D. Knot as a complete invariant of a Morse-Smale 3-diffeomorphism with four fixed points : arXiv preprint. 2022. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2209.04815>
4. Smale S. Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 73, no 6. pp. 747–817.
5. Гринес В. З., Гуревич Е. Я., Жужома Е. В., Починка О. В. Классификация систем Морса-Смейла и топологическая структура несущих многообразий // Успехи математических наук. 2019. Т. 74, № 1. С. 41–116. DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9855>
6. Grines V. Z., Zhuzhoma E. V., Medvedev V. S., Pochinka O. V. Global attractor and repeller of Morse-Smale diffeomorphisms // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2010. Vol. 271, no 1. pp. 103–124. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0081543810040097>
7. Grines V., Medvedev T., Pochinka O. Dynamical systems on 2- and 3-manifolds. Switzerland: Springer, 2016. 295 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-44847-3>
8. Rolfsen D. Knots and links. Vancouver: AMS Chelsea Pub., 2003. 439 p.

*Поступила 05.12.2022; доработана после рецензирования 10.01.2023;
принята к публикации 15.02.2023*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. C. Bonatti, V. Grines, O. Pochinka, “Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds”, *Duke Mathematical Journal*, **168**:13 (2019), 2507–2558. DOI: <https://doi.org/10.1215/00127094-2019-0019>
2. C. Bonatti, V. Grines, “Knots as topological invariants for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3 ”, *Journal of Dynamical and Control Systems*, **6**:4 (2000), 579–602. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1009508728879>
3. O. Pochinka, E. Talanova, D. Shubin, “Knot as a complete invariant of a Morse-Smale 3-diffeomorphism with four fixed points : arXiv preprint”, 2022. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2209.04815>
4. S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.
5. V. Grines, E. Gurevich, E. Zhuzhoma, O. Pochinka, “Classification of Morse-Smale systems and topological structure of the underlying manifolds”, *Russian Mathematical Surveys*, **74**:1 (2019), 37–110. DOI: <https://doi.org/10.1070/RM9855>
6. V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, O. V. Pochinka, “Global attractor and repeller of Morse-Smale diffeomorphisms”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **271**:1 (2010), 103–124. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0081543810040097>
7. V. Grines, T. Medvedev, O. Pochinka, *Dynamical systems on 2- and 3-manifolds*, Springer, Switzerland, 2016 DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-44847-3>, 295 p.
8. D. Rolfsen, *Knots and links*, AMS Chelsea Pub., Vancouver, 2003, 439 p.

Submitted 05.12.2022; Revised 10.01.2023; Accepted 15.02.2023

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.