

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI 10.15507/2079-6900.24.202203.317-330

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.63

Теоретическое исследование устойчивости узловых полностью консервативных разностных схем с вязким наполнением для уравнений газовой динамики в переменных ЭйлераМ. Е. Ладонкина^{1, 2}, Ю. А. Повещенко^{1, 2}, О. Р. Рагимли², Х. Чжан²¹ *Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН (г. Москва, Российская Федерация)*² *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет) (г. Долгопрудный, Российская Федерация)*

Аннотация. Для уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных исследуется семейство двухслойных по времени полностью консервативных разностных схем (ПКРС) с профилированными по пространству временными весами. Разработаны узловые схемы и класс дивергентных адаптивных вязкостей для ПКРС с профилированными по пространству временными весами, связанными с переменными массами движущихся узловых частиц среды. Значительное внимание в работе уделено способам конструирования регуляризованных потоков массы, импульса и внутренней энергии, сохраняющих свойства полностью консервативных разностных схем данного класса, анализу их устойчивости и возможности их использования на неравномерных сетках. Эффективное сохранение баланса внутренней энергии в данном классе дивергентных разностных схем обеспечивается отсутствием постоянно действующих источников разностного происхождения, производящих “вычислительную” энтропию (в том числе на сингулярных особенностях решения). Разработанные схемы могут быть использованы для расчета высокотемпературных течений в неравновесных по температуре средах, например, при необходимости учета электрон-ионной релаксации температуры в короткоживущей плазме в условиях интенсивного энерговысвобождения.

Ключевые слова: газовая динамика, метод опорных операторов, семейство двухслойных по времени полностью консервативных разностных схем, устойчивость схемы

Для цитирования: Ладонкина М. Е., Повещенко Ю. А., Рагимли О. Р., Чжан Х. Теоретическое исследование устойчивости узловых полностью консервативных разностных схем с вязким наполнением для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 3. С. 317–330. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202203.317-330>



Об авторах:

Ладонкина Марина Евгеньевна, старший научный сотрудник, Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (125047, Россия, г. Москва, Миусская пл., д. 4), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7596-1672>, e-mail: ladonkina@imamod.ru

Повещенко Юрий Андреевич, ведущий научный сотрудник, Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (125047, Россия, г. Москва, Миусская пл., д. 4), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9211-9057>, hесon@mail.ru

Рагимли Орхан Рагимович, аспирант, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет) (141701, Россия, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7257-1660>, orxan@reximli.info

Чжан Хаочэнь, аспирант, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет) (141701, Россия, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1378-1777>, chzhan.h@phystech.edu

Original article

MSC2020 65M22

Theoretical study of stability of nodal completely conservative difference schemes with viscous filling for gas dynamics equations in Euler variables

M. E. Ladonkina^{1, 2}, Yu. A. Paveschenko^{1, 2}, O. R. Ragimli², H. Zhang²

¹ *Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS (Moscow, Russian Federation)*

² *Moscow Institute of Physics and Technology (Dolgoprudny, Russian Federation)*

Abstract. For the equations of gas dynamics in Eulerian variables, a family of two-layer time-fully conservative difference schemes (FCDS) with space-profiled time weights is investigated. Nodal schemes and a class of divergent adaptive viscosities for FCDS with space-time profiled weights connected with variable masses of moving nodal particles of the medium are developed. Considerable attention is paid to the methods of constructing regularized flows of mass, momentum and internal energy that preserve the properties of fully conservative difference schemes of this class, to the analysis of their stability and to the possibility of their use on uneven grids. The effective preservation of the internal energy balance in this class of divergent difference schemes is ensured by the absence of constantly operating sources of difference origin that produce “computational” entropy (including entropy production on the singular features of the solution). Developed schemes may be used in modelling of high-temperature flows in temperature-disequilibrium media, for example, if it is necessary to take into account the electron-ion relaxation of temperature in a short-living plasma under conditions of intense energy input.

Keywords: gas dynamics, support operator method, fully conservative difference schemes, stability of the scheme

For citation: M. E. Ladonkina, Yu. A. Paveschenko, O. R. Ragimli, H. Zhang. Theoretical study of stability of nodal completely conservative difference schemes with viscous filling for gas dynamics equations in Euler variables. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 24:3(2022), 317–330. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202203.317-330>

About the authors:

Ladonkina Marina Eugenievna, Senior Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences (4 Miusskaya Sq., Moscow 125047, Russia), PhD (Physics and Mathematics), ORCID: 0000-0001-7596-1672, e-mail: ladonkina@imamod.ru

Yuri A. Poveshenko, Leading Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences (4 Miusskaya Sq., Moscow 125047, Russia), Dr.Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9211-9057>, hecon@mail.ru

Orkhan R. Ragimli, Postgraduate Student, Moscow Institute of Physics and Technology (9 Institutskiy Pereulok St., Dolgoprudny 141701, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7257-1660>, orxan@reximli.info

Haochen Zhang, Postgraduate Student, Moscow Institute of Physics and Technology (9 Institutskiy Pereulok St., Dolgoprudny 141701, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1378-1777>, chzhan.h@phystech.edu

1. Введение

Как показано практикой, принцип полной консервативности [1] представляет собой один из весьма эффективных критериев качества разностных схем, возникающих при численном моделировании движений сплошной среды. Проблема создания двухслойных по времени разностных схем, обладающих свойством полной консервативности, была разработана в [2] для случая Лагранжевого описания движения сплошной среды. Далее конкретные сложности встретились при попытке построения таких схем для уравнений газовой динамики в Эйлеровых переменных. В [3] было исследовано широкое семейство двухслойных разностных схем и показано, что оно не содержит полностью консервативных. В работе [4] была построена трехслойная полностью консервативная схема. В случае пространственных течений среды полностью консервативная схема была построена так же в работе [5].

Настоящая статья представляет собой естественное продолжение [6–8; 13] с использованием операторного подхода [9–11] и конструированием регуляризирующих потоков массы, импульса и внутренней энергии сохраняющих свойства полной консервативности системы. В ней работа сил термодинамического сжатия вещества использует технику профилирования временных весов по пространству.

Сами же интерполяционные веса связаны с переменными массами движущихся узловых частиц среды. Такая нелинейная аппроксимация скоростей частиц в узлах разностной сетки (зависящая от массы этих частиц) обеспечивает одновременно две вещи. Во-первых, она сохраняет внутреннюю энергию в данном типе дивергентных разностных схем, что обеспечивается отсутствием постоянно действующих аппроксимационных источников разностного происхождения в уравнении внутренней энергии, производящих «вычислительную» энтропию, в т. ч. на сингулярных особенностях решения, например, на расходящихся центрированных волнах разрежения. Во-вторых, эта аппроксимация для узловых частиц переменной массы обеспечивает одновременный согласованный баланс их импульса и кинетической энергии с учетом массоперетоков в движущейся среде. Наконец, она является простой в реализации и имеет второй порядок аппроксимации.

Также в работе предложена естественная регуляризация потоков массы, импульса и внутренней энергии системы сохраняющая свойства полной консервативности разностных схем (ПКРС) данного класса. Исследованы осцилляции этих потоков на явном

и неявном слоях по времени, а также изучены допустимость и условие их адаптивного использования на сетках переменной структуры. Адаптивное включение искусственной вязкости может производиться следуя, например, [12], но не для схемы Лакса-Вендрофа, а для данного класса двухслойных по времени полностью консервативных разностных схем.

2. Постановка задачи газовой динамики в Эйлерах переменных

Рассматривается течение сжимаемого газа в переменных Эйлера в декартовой системе координат. Пусть \vec{u} – скорость течения; ρ – плотность среды. Плотность потока массы обозначим $\vec{\mu} = \rho \cdot \vec{u}$. Тогда система уравнений Эйлера для течения среды имеет следующий вид:

$$\frac{D}{Dt}(dM) = -dV \operatorname{div} \vec{\mu}, \quad (2.1)$$

$$\frac{D}{Dt}(\vec{u}dM) = -dV \operatorname{grad} P - dV \operatorname{div}(\vec{\mu}\vec{v}) + d\vec{f}, \quad (2.2)$$

$$\frac{D}{Dt}(\varepsilon dM) = -PdV \operatorname{div} \vec{u} - dV \operatorname{div}(\vec{\mu}\varepsilon) + dQ, \quad (2.3)$$

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\vec{u}^2}{2}dM\right) = -\vec{u}dV \operatorname{grad} P - dV \operatorname{div}\left(\vec{\mu}\frac{\vec{u}^2}{2}\right) + \vec{u}d\vec{f}, \quad (2.4)$$

$$\frac{D}{Dt}\left(\left(\varepsilon + \frac{\vec{u}^2}{2}\right)dM\right) = -dV \operatorname{div}(P\vec{u}) - dV \operatorname{div}\left(\vec{\mu}\left(\varepsilon + \frac{\vec{u}^2}{2}\right)\right) + \vec{u}d\vec{f} + dQ. \quad (2.5)$$

Мы воспользовались очевидным тождеством [8]:

$$\vec{u} \frac{D}{Dt}(\vec{u}dM) = \frac{D}{Dt}\left(\frac{\vec{u}^2}{2}dM\right) + \frac{\vec{u}^2}{2} \frac{D}{Dt}dM. \quad (2.6)$$

Здесь в системе уравнений газодинамики используются термодинамические переменные: ρ – плотность; P – давление; ε – удельная внутренняя энергия. Считается, что масса dM заключена в объём dV , через границы которого протекает поток массы $\vec{\mu}$, несущий импульс $\vec{\mu} \cdot \vec{u}$ и внутреннюю энергию $\vec{\mu}E$.

В связи с тем, что в работе мы исследуем пространственно-одномерный случай уравнения газодинамики, то перепишем систему (2.1)–(2.5) для плоского случая:

$$\frac{D}{Dt}(dM) = -dV \frac{\partial \mu}{\partial x}, \quad (2.7)$$

$$\frac{D}{Dt}(udM) = -dV \frac{\partial P}{\partial x} - dV \frac{\partial}{\partial x}(\mu u) + df, \quad (2.8)$$

$$\frac{D}{Dt}(\varepsilon dM) = -PdV \frac{\partial u}{\partial x} - dV \frac{\partial}{\partial x}(\mu \varepsilon) + dQ. \quad (2.9)$$

3. Полностью консервативная дифференциально разностная схема

Теперь опуская исходную систему Эйлерах уравнений для течения среды [2; 13–14], для системы уравнений (2.7)–(2.9) выпишем двухслойную по времени полностью

консервативную разностную схему (ПКРС) в переменных Эйлера. На Рис. 3.1 представлена соответственная разностная сетка. Здесь ω – узлы разностной сетки; Ω – ячейки. Термодинамические величины ρ, ε, P и также внутренняя энергия $E = \rho\varepsilon$ относятся к узлам ω . Будем также относить скорость \vec{u} , объём v и приузеловую массу $m = \rho v$ к узлам ω , а объём V – к ячейкам.

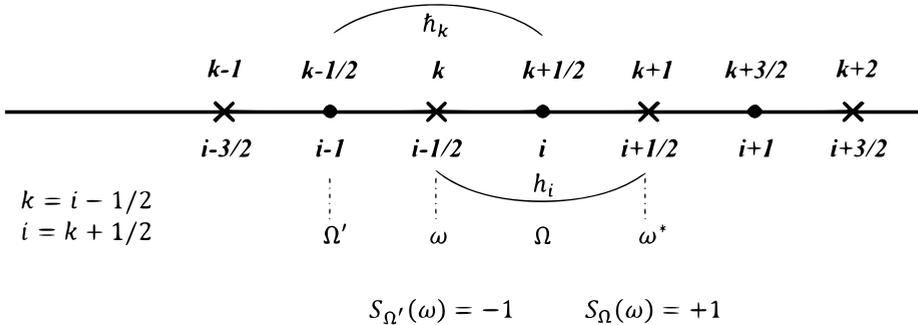


Рис. 3.1. Разностная сетка. Схема узлов (ω) и ячеек (Ω) сетки по пространству
Fig 3.1. Difference grid. Scheme of grid's nodes(ω) and grid's cells (Ω) in space

Очевидно:

$$v_\omega = \tilde{h}_k = \frac{h_{k+1/2} + h_{k-1/2}}{2} = \frac{h_i + h_{i-1}}{2}, \quad V_\Omega = h_i, \quad \rho_\omega = \frac{m_\omega}{v_\omega} = \rho_k.$$

Пусть μ_D^\sim – введенный ячейечный поток массы. Под отнесенным к узлу импульсом будем понимать величину $I_\omega = \rho_\omega u_\omega$, а под отнесенной к узлу энергией – $E_\omega = \rho_\omega \varepsilon_\omega$.

Выпишем полностью консервативную [2] разностную схему в переменных Эйлера

$$m_t = -\nu D I N_D \mu_D^\sim, \tag{3.1}$$

$$(mu)_t = -\nu GRAD_\sigma \pi^\sim - \nu D I T_D (\mu_D^\sim \cdot \vec{u}_D^\sim), \tag{3.2}$$

$$(m\varepsilon)_t = -\frac{1}{2} \sum_{\Omega(\omega)} (\pi^\sim V D I V_\sigma \vec{u}^\sim)_\Omega - \nu D I N_D (\mu_{ED}^\sim + \vec{\chi}_D^\sim), \tag{3.3}$$

$$(m \frac{\vec{u}^2}{2})_t = -\nu (u^\sim, GRAD_\sigma \pi^\sim) - \nu D I N_D (\mu_D^\sim \frac{\vec{u}_D^2}{2}). \tag{3.4}$$

Здесь все величины обозначим следующим образом

$$\vec{\mu} = \rho \vec{u}, \quad \vec{\mu}_E = \varepsilon \vec{\mu} = E \vec{u}, \quad E = \rho \varepsilon, \quad \rho^\sim = \rho^{(\psi_\rho)}, \quad \psi_\rho = const;$$

$$M_D^\sim = \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} (\rho_\omega u_\omega)^{(0.5)}, \quad \mu_D^\sim = M_D^\sim - \nu^\sim GRAD_D \rho^\sim;$$

$$\pi_\Omega^\sim = P_\Omega^{(0.5)} - v_u^\sim D I V_\sigma (\rho^\sim u^{(\psi_u)}), \quad P_\Omega = \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} P_\omega, \quad \psi_u = const;$$

$$\vec{\chi}_D^\sim = \{\vec{\chi}_{\varepsilon D}^\sim | \vec{\chi}_{ED}^\sim\}, \quad \vec{\chi}_{\varepsilon D}^\sim = -k_\varepsilon GRAD_D \hat{\varepsilon}, \quad \vec{\chi}_{ED}^\sim = -k_E GRAD_D \hat{E};$$

$$M_{ED}^\sim = \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} (E_\omega u_\omega)^{(0.5)}, \quad \mu_{ED}^\sim = M_{ED}^\sim - \nu_E^\sim GRAD_D (\rho^\sim \varepsilon^{(\psi_\varepsilon)}), \quad \psi_\varepsilon = const.$$

Под $M_D^\sim = \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} (\rho_\omega u_\omega)^{(0.5)}$ и $M_{ED}^\sim = \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} (E_\omega u_\omega)^{(0.5)}$ понимаем некоторые аппроксимации потока массы и потока внутренней энергии в ячейке Ω соответственно. Поточковый член $\tilde{\chi}_D^\sim$ характеризует теплопроводность в газе и пропорционален коэффициенту теплопроводности k . Также в ячейке, образованной узлами ω и ω' , введены величины:

$$\tilde{u}_D^\sim = \frac{1}{2} (\tilde{u}_\omega^{(\delta_\omega)} + \tilde{u}_{\omega'}^{(\delta_{\omega'})}), \quad \tilde{u}_D^{2\sim} = (\tilde{u}_\omega^{(\delta_\omega)}, \tilde{u}_{\omega'}^{(\delta_{\omega'})}).$$

На слоях по времени t и $\hat{t} = t + \tau$ ($\tau > 0$ – шаг по времени) введены разностные производные по времени и пространственно-точечные временные интерполяции: $a_t = \frac{\hat{a} + a}{\tau}$, $a^{(\delta)} = \delta a + (1 - \delta)a$. Здесь интерполяционный вес δ может связываться с узлами пространственной сетки ω , например, по закону: $\delta = \sqrt{\hat{m}} / (\sqrt{\hat{m}} + \sqrt{m})$; ψ – постоянные интерполяционные веса по времени. Таким образом, отметим, что под произвольной интерполяцией по времени сеточных функций a и \hat{a} между слоями t и \hat{t} будем понимать некоторые интерполяционные величины a^\sim , например, для скорости полагаем $u^\sim = u^{(\delta)}$.

Далее для континуальных операций векторного анализа – $div \vec{u}$, $grad P$, $div(\vec{\mu} \cdot \vec{u})$ – введем их разностные аналоги.

$$DIN_D \vec{\mu}_D = \frac{1}{v} \sum_{\Omega(\omega)} S_\Omega(\omega) \mu_D(\Omega), \quad DIN_D : (\Omega) \rightarrow (\omega) \quad (3.5)$$

$$DIT_D (\vec{\mu}_D \cdot \vec{u}_D) = \frac{1}{v} \sum_{\Omega(\omega)} S_\Omega(\omega) \mu_D(\Omega) \vec{u}_D(\Omega), \quad DIT_D : (\Omega) \rightarrow (\omega) \quad (3.6)$$

$$GRAN_D P = \frac{1}{v} \Delta_\Omega P, \quad GRAN_D : (\omega) \rightarrow (\Omega) \quad (3.7)$$

$$GRAD_\sigma \pi = \frac{1}{v} \Delta_\sigma \pi, \quad GRAD_\sigma : (\Omega) \rightarrow (\omega) \quad (3.8)$$

$$DIV_\sigma \vec{u} = -\frac{1}{V} \sum_{\omega(\Omega)} S_\Omega(\omega) u_\omega, \quad DIV_\sigma : (\omega) \rightarrow (\Omega) \quad (3.9)$$

где $\Delta_\Omega P = -\sum_{\omega(\Omega)} S_\Omega(\omega) P_\omega = P_{\omega^*} - P_\omega$, $\Delta_\sigma \pi = +\sum_{\Omega(\omega)} S_\Omega(\omega) \pi_\Omega + S_{\partial\omega} \pi_{\partial\omega}$; $S_\Omega(\omega)$ – знаковая функция, отвечающая нормали к границе приузлового домена узла ω , равна $+1$, если соответствующая граничная нормаль направлена из домена, и равна -1 в противном случае (см. Рис. 3.1).

В выражении для $\Delta_\sigma \pi$, в граничном узле $\omega = \partial\omega$, добавлено слагаемое с величиной $\pi_{\partial\omega}$ на границе с знаковой функцией $S_{\partial\omega} = \pm 1$, которая зависима от направления граничной нормали.

Далее полагаем $\nu_u^\sim = \nu^\sim$. Тогда из уравнений (3.1)–(3.2) следует вязко-скоростное уравнение, определяющее эволюцию скорости в узлах ω :

$$\rho^{(1-\psi_u)} u_t + (\rho u \nabla u)_\Delta^\sim + GRAD_\sigma P_\Omega^{(0.5)} - GRAD_\sigma \left[\rho_\pm^\sim (\nu^\sim DIV_\sigma u^{(\psi_u)}) \right] - DIT_D [(\nu^\sim GRAN_D \rho^\sim) \cdot u_D^\sim] = 0, \quad (3.10)$$

где

$$(\rho u \nabla u)_\Delta^\sim = DIT_D (M_D^\sim \cdot u_D^\sim) - u^{(\psi_u)} DIN_D M_D^\sim.$$

Также полагаем $\nu_{\tilde{E}} = \nu^{\sim}$. Тогда из уравнений (3.1) и (3.3) следует вязко-температурное уравнение, определяющее в узлах ω внутреннюю энергетическую эволюцию

$$\rho^{(1-\psi_\varepsilon)} \varepsilon_t + (\rho u \nabla \varepsilon)_{\tilde{\Delta}} + (\pi \operatorname{div} u)_{\tilde{\Delta}} - \operatorname{DIN}_D(\rho_{\pm} \nu^{\sim} \operatorname{GRAN}_D \varepsilon^{(\psi_\varepsilon)}) + \operatorname{DIN}_D \chi_{\tilde{D}} = 0, \tag{3.11}$$

где

$$\begin{cases} (\rho u \nabla \varepsilon)_{\tilde{\Delta}} = \operatorname{DIN}_D \vec{M}_{ED} - \varepsilon^{(\psi_\varepsilon)} \operatorname{DIN}_D \vec{M}_{\tilde{D}}, \\ (\pi \operatorname{div} u)_{\tilde{\Delta}} = \frac{1}{2\nu} \sum_{\Omega(\omega)} (\pi^{\sim} \nu \operatorname{DIV}_{\sigma} u^{\sim})_{\Omega}. \end{cases}$$

индексами \pm у плотности обозначаются соседние пространственные узлы сетки по отношению к центральному ω , в котором записаны уравнения (3.10)–(3.11).

Сравнивая уравнения (3.2) и (3.10), отметим, что коэффициент вязкости ν^{\sim} в них одновременно определяет диссипацию как импульса в (3.2), так и скорости в (3.10), представленных нестационарными членами. Аналогично из уравнений (3.3) и (3.11) следует, что тот же коэффициент вязкости ν^{\sim} в них тоже одновременно определяет диссипации как объёмной внутренней энергии $E = \rho \varepsilon$, связанной с давлением газа, так и энергии единицы массы ε , связанной с его температурой. Эти диссипируемые вязкостью функции также стоят под производными по времени в соответствующих уравнениях (3.3) и (3.11).

4. Устойчивость вязко-балансовых уравнений

4.1. Устойчивость вязкого-массового уравнения

Фиксируя распределение скорости потока массы, исследуем уравнение (3.1). Перепишем уравнение (3.1) в узле в виде

$$\nu(\hat{\rho} - \rho) - \tau \nu \operatorname{DIN}_D(\nu^{\sim} \operatorname{GRAN}_D \rho^{\sim}) + \tau \nu \operatorname{DIN}_D M_{\tilde{D}}^{\sim} = 0 \tag{4.1}$$

и преобразуем полученное уравнение к форме:

$$\hat{C}_{\rho k}^{\sim} \hat{\rho}_k = \hat{A}_{\rho k}^{\sim} \hat{\rho}_{k-1} + \hat{B}_{\rho k}^{\sim} \hat{\rho}_{k+1} + C_{\rho k}^{\sim} \rho_k + A_{\rho k}^{\sim} \rho_{k-1} + B_{\rho k}^{\sim} \rho_{k+1}, \tag{4.2}$$

где

$$\begin{aligned} \hat{A}_{\rho k}^{\sim} &= \tau(\psi_{\rho} \bar{\nu}_{k-1/2}^{\sim} + \frac{\hat{u}_{k-1}}{4}), & A_{\rho k}^{\sim} &= \tau(\bar{\psi}_{\rho} \bar{\nu}_{k-1/2}^{\sim} + \frac{u_{k-1}}{4}), \\ \hat{B}_{\rho k}^{\sim} &= \tau(\psi_{\rho} \bar{\nu}_{k+1/2}^{\sim} - \frac{\hat{u}_{k+1}}{4}), & B_{\rho k}^{\sim} &= \tau(\bar{\psi}_{\rho} \bar{\nu}_{k+1/2}^{\sim} - \frac{u_{k+1}}{4}), \\ \hat{C}_{\rho k}^{\sim} &= \hat{h}_k + \tau \psi_{\rho} (\bar{\nu}_{k-1/2}^{\sim} + \bar{\nu}_{k+1/2}^{\sim}), & C_{\rho k}^{\sim} &= \hat{h}_k - \tau \bar{\psi}_{\rho} (\bar{\nu}_{k-1/2}^{\sim} + \bar{\nu}_{k+1/2}^{\sim}), \end{aligned}$$

Здесь $\bar{\nu}^{\sim} = \frac{\nu^{\sim}}{h}$, $h = V$ – объём ячейки Ω . Под $\bar{\nu}_{k\pm 1/2}^{\sim}$ понимается соответствующий коэффициент вязкости в ячейке $\Omega_{k\pm 1/2}$, $\bar{\psi}_{\rho} = 1 - \psi_{\rho}$. Индекс $k \pm 1/2$ будем также обозначать как $\pm 1/2$, опуская текущий индекс k . Положим $\psi_{\rho} = \bar{\psi}_{\rho} = \frac{1}{2}$, тогда коэффициенты $\hat{A}_{\rho k}^{\sim}, A_{\rho k}^{\sim}, \hat{B}_{\rho k}^{\sim}, B_{\rho k}^{\sim}$ будут положительно при выполнении условия:

$$\bar{\nu}_{\Omega}^{\sim} > \frac{1}{2} \max_{\omega(\Omega)} \{|\hat{u}_{\omega}|, |u_{\omega}|\}.$$

Введём число Куранта в ячейке Ω :

$$kr_{\Omega}^{\sim} = \frac{\tau}{h_{\Omega}} \left[\frac{1}{2} \max\{|\hat{u}_{\omega}|, |u_{\omega}|\} + \varepsilon \right] \quad (4.3)$$

и перепишем последнее неравенство в виде

$$\bar{v}_{\Omega}^{\sim} > kr_{\Omega}^{\sim} \cdot \frac{h_{\Omega}}{\tau}, \quad (4.4)$$

$\varepsilon > 0$ – малый параметр.

Далее из условия $C_{\rho k}^{\sim} > 0$ следует $\frac{1}{2}(\bar{v}_{-1/2}^{\sim} + \bar{v}_{1/2}^{\sim}) < \frac{\hat{h}_k}{\tau}$. Это неравенство выполнено, если потребовать

$$\bar{v}_{\Omega}^{\sim} < 1 \cdot \frac{h_{\Omega}}{\tau}. \quad (4.5)$$

Объединяя условия (4.4)–(4.5), получим:

$$kr_{\Omega}^{\sim} \cdot \frac{h_{\Omega}}{\tau} < \bar{v}_{\Omega}^{\sim} < 1 \cdot \frac{h_{\Omega}}{\tau} \quad (4.6)$$

или

$$kr_{\Omega}^{\sim} < \beta_{\Omega}^{\sim} < 1$$

в представлении коэффициента вязкости \bar{v}_{Ω}^{\sim} через вязкое наполнение β_{Ω}^{\sim} , как $\bar{v}_{\Omega}^{\sim} = \beta_{\Omega}^{\sim} \frac{h_{\Omega}}{\tau}$.

Неравенство $\hat{C}_{\rho k}^{\sim} > 0$ очевидно, диагональное преобладание, требуемое для обеспечения устойчивости по плотности уравнения (3.1), выполняется лишь на постоянном скоростном фоне ($u = const, D_{\rho k}^{\sim} = 0$) и имеет акустический смысл, т. к. имеет место равенство:

$$D_{\rho k}^{\sim} = \hat{C}_{\rho k}^{\sim} - (\hat{A}_{\rho k}^{\sim} + \hat{B}_{\rho k}^{\sim} + A_{\rho k}^{\sim} + B_{\rho k}^{\sim} + C_{\rho k}^{\sim}) = \frac{\tau}{4} [\hat{u}_{k+1} - \hat{u}_{k-1} + u_{k+1} - u_{k-1}].$$

Таким образом требуемым условием на выбор вязкости для обеспечения устойчивости по плотности в уравнении (3.1) является неравенство (4.6).

4.2. Устойчивость вязко-скоростного уравнения

Теперь рассмотрим аппроксимацию по скорости на фоне заданных термодинамических параметров вещества.

Перепишем уравнение (3.2) в узле в виде:

$$\begin{aligned} & \hat{\rho} \hat{u} - \rho u - \frac{\tau}{\hat{h}_k} \left[\bar{v}_{u,1/2}^{\sim} (\rho_+^{(\psi_{\rho})} u_+^{(\psi_u)} - \rho_-^{(\psi_{\rho})} u_-^{(\psi_u)}) - \bar{v}_{u,-1/2}^{\sim} (\rho_-^{(\psi_{\rho})} u_-^{(\psi_u)} - \rho_+^{(\psi_{\rho})} u_+^{(\psi_u)}) \right] + \\ & + \frac{\tau}{2\hat{h}_k} \left[\mu_{D,1/2}^{\sim} (\delta \hat{u} + \bar{\delta} u + \delta_+ \hat{u}_+ + \bar{\delta}_+ u_+) - \mu_{D,-1/2}^{\sim} (\delta \hat{u} + \bar{\delta} u + \delta_- \hat{u}_- + \bar{\delta}_- u_-) \right] = \quad (4.7) \\ & = -\tau GRAD_{\sigma} P_{\Omega}^{(0.5)} \end{aligned}$$

Здесь $\bar{v}_u^{\sim} = \frac{v_u^{\sim}}{h}$; $h = V$ – объём ячейки Ω ; $\bar{\delta} = 1 - \delta$. Преобразуем полученное уравнение (4.7) в форме:

$$\hat{C}_{uk}^{\sim} \hat{u}_k = \hat{A}_{uk}^{\sim} \hat{u}_{k-1} + \hat{B}_{uk}^{\sim} \hat{u}_{k+1} + C_{uk}^{\sim} u_k + A_{uk}^{\sim} u_{k-1} + B_{uk}^{\sim} u_{k+1} - \tau GRAD_{\sigma} P_{\Omega}^{(0.5)} \quad (4.8)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{A}_{uk}^{\sim} &= \frac{\tau}{\hbar_k} (\psi_u \rho_-^{(\psi_\rho)} \bar{\nu}_{u,-1/2}^{\sim} + \mu_{D,-1/2}^{\sim} \frac{\delta_-}{2}), \\ \hat{B}_{uk}^{\sim} &= \frac{\tau}{\hbar_k} (\psi_u \rho_+^{(\psi_\rho)} \bar{\nu}_{u,1/2}^{\sim} - \mu_{D,1/2}^{\sim} \frac{\delta_+}{2}), \\ \hat{C}_{uk}^{\sim} &= \hat{\rho} + \frac{\tau}{\hbar_k} \psi_u \rho^{(\psi_\rho)} (\bar{\nu}_{u,-1/2}^{\sim} + \bar{\nu}_{u,1/2}^{\sim}) + \frac{\tau}{2\hbar_k} (\mu_{D,1/2}^{\sim} - \mu_{D,-1/2}^{\sim}) \delta, \\ A_{uk}^{\sim} &= \frac{\tau}{\hbar_k} (\bar{\psi}_u \rho_-^{(\psi_\rho)} \bar{\nu}_{u,-1/2}^{\sim} + \mu_{D,-1/2}^{\sim} \frac{\bar{\delta}_-}{2}), \\ B_{uk}^{\sim} &= \frac{\tau}{\hbar_k} (\bar{\psi}_u \rho_+^{(\psi_\rho)} \bar{\nu}_{u,1/2}^{\sim} - \mu_{D,1/2}^{\sim} \frac{\bar{\delta}_+}{2}), \\ C_{uk}^{\sim} &= \rho - \frac{\tau}{\hbar_k} \bar{\psi}_u \rho^{(\psi_\rho)} (\bar{\nu}_{u,-1/2}^{\sim} + \bar{\nu}_{u,1/2}^{\sim}) - \frac{\tau}{2\hbar_k} (\mu_{D,1/2}^{\sim} - \mu_{D,-1/2}^{\sim}) \bar{\delta}. \end{aligned}$$

Здесь $\bar{\psi}_u = 1 - \psi_u$. Положим $\psi_\rho = \psi_u = \frac{1}{2}$ и $\nu_u^{\sim} = \nu^{\sim}$, $\bar{\nu}^{\sim} = \frac{\nu^{\sim}}{h}$, получаем коэффициенты в виде:

$$\begin{aligned} \hat{A}_{uk}^{\sim} &= \frac{\tau}{2\hbar_k} \left[\bar{\nu}_{-1/2}^{\sim} (\rho_-^{(0.5)} - \delta_- \Delta_{D,-1/2} \rho^{(0.5)}) + \delta_- M_{D,-1/2}^{\sim} \right], \\ A_{uk}^{\sim} &= \frac{\tau}{2\hbar_k} \left[\bar{\nu}_{-1/2}^{\sim} (\rho_-^{(0.5)} - \bar{\delta}_- \Delta_{D,-1/2} \rho^{(0.5)}) + \bar{\delta}_- M_{D,-1/2}^{\sim} \right], \\ \hat{B}_{uk}^{\sim} &= \frac{\tau}{2\hbar_k} \left[\bar{\nu}_{1/2}^{\sim} (\rho_+^{(0.5)} + \delta_+ \Delta_{D,1/2} \rho^{(0.5)}) - \delta_+ M_{D,1/2}^{\sim} \right], \\ B_{uk}^{\sim} &= \frac{\tau}{2\hbar_k} \left[\bar{\nu}_{1/2}^{\sim} (\rho_+^{(0.5)} + \bar{\delta}_+ \Delta_{D,1/2} \rho^{(0.5)}) - \bar{\delta}_+ M_{D,1/2}^{\sim} \right], \end{aligned}$$

Здесь $\Delta_{D,\pm 1/2} \rho$ – приращение плотности в узлах ячейки, аналогичное введенному ранее $\Delta_D P = -\sum_{\omega(\Omega)} S_\Omega(\omega) P_\omega$.

Для обеспечения устойчивости по скорости уравнения (3.2) потребуем выполнение при достаточно малых шагах по времени ($\tau \rightarrow 0$) условия:

$$R_\Omega^{\sim} = \min_{\Omega}^{\sim} \left\{ \frac{\rho_{\pm}^{(0.5)}}{2} \pm \delta_{\pm}^{\sim} \Delta_{D,\pm 1/2} \rho^{(0.5)} \right\} \geq 0. \tag{4.9}$$

Введём также удельный объём единицы массы ячейки Ω как $\eta_\Omega^{\sim} = \max_{\Omega}^{\sim} \left\{ \frac{2\delta_{\pm}^{\sim}}{\rho_{\pm}^{(0.5)}} \right\}$.

Минимумы и максимумы в ячейке Ω вычисляются с помощью значений плотности в узлах $\omega(\Omega)$ её образующих:

$$\{ \min_{\Omega}^{\sim} | \max_{\Omega}^{\sim} \} (\omega(\Omega) = \pm \omega, \delta^{\sim} = \{ \delta, \bar{\delta} \}).$$

При выполнении условий для коэффициента вязкости в ячейке Ω

$$\bar{\nu}_\Omega^{\sim} > \eta_\Omega^{\sim} \cdot |M_D^{\sim}| + \varepsilon = kr_{u\Omega}^{\sim} \cdot \frac{\hbar_\Omega}{\tau} \tag{4.10}$$

коэффициенты $\hat{A}_{uk}^{\sim}, A_{uk}^{\sim}, \hat{B}_{uk}^{\sim}, B_{uk}^{\sim}$ будут положительными. Здесь также вводится скоростное число куранта $kr_{u\Omega}^{\sim}, \varepsilon > 0$ – малый параметр. Далее коэффициент C_{uk}^{\sim} с учётом

уравнения неразрывности $m_t = -\nu DIN_D \mu_D^\sim = -(\mu_{D,1/2}^\sim - \mu_{D,-1/2}^\sim)$ может быть представлен как

$$C_{uk}^\sim = \rho^{(\delta/2)} \left\{ 1 - \frac{\tau}{\hbar_k} \left[2\bar{\psi}_u \rho^{(\psi_\rho)} / \rho^{(\delta/2)} \right] \cdot \left[\frac{1}{2} (\bar{\nu}_{u,-1/2}^\sim + \bar{\nu}_{u,1/2}^\sim) \right] \right\}.$$

Потребуем для некоторого $1 > \beta_\Omega^\sim > kr_{u\Omega}^\sim$ в ячейках Ω выполнение условий

$$\bar{\nu}_\Omega^\sim < \frac{\beta_a^\sim h_\Omega}{\tau}, \quad \beta_a^\sim < 1. \quad (4.11)$$

Тогда будем иметь $\frac{1}{2} (\bar{\nu}_{u,-1/2}^\sim + \bar{\nu}_{u,1/2}^\sim) < \frac{\beta_a^\sim h_\Omega}{\tau}$ и при $\psi_\rho = \psi_u = \frac{1}{2}$ получим:

$$\frac{\tau}{\hbar_k} \left[2\bar{\psi}_u \frac{\rho^{(\psi_\rho)}}{\rho^{(\delta/2)}} \right] \cdot \left[\frac{1}{2} (\bar{\nu}_{u,-1/2}^\sim + \bar{\nu}_{u,1/2}^\sim) \right] < \frac{\beta_a^\sim \rho^{(0.5)}}{\rho^{(\delta/2)}}. \quad (4.12)$$

Отсюда отметим $C_{uk}^\sim > 0$ при

$$\beta_a^\sim \rho^{(0.5)} \rho^{\delta/2} < 1, \quad (4.13)$$

а последнее выполнено для достаточно малых $\tau \rightarrow 0$ и $\beta_a^\sim < 1$.

Выполнив аналогичные преобразования, получим положительность коэффициента:

$$\hat{C}_{uk}^\sim = \rho^{(1-\delta/2)} + \frac{\tau}{\hbar_k} \psi_u \rho^{(\psi_\rho)} (\bar{\nu}_{u,-1/2}^\sim + \bar{\nu}_{u,1/2}^\sim) > 0.$$

Однако диагональное преобразование, нужное для обеспечения устойчивости по скорости уравнения (3.2), выполняется лишь на постоянном плотностном фоне ($\rho = \text{const}$, $D_{uk}^\sim = 0$) и понимается в акустическом смысле, поскольку имеет место равенство:

$$\begin{aligned} D_{uk}^\sim &= \hat{C}_{uk}^\sim - (\hat{A}_{uk}^\sim + \hat{B}_{uk}^\sim + A_{uk}^\sim + B_{uk}^\sim + C_{uk}^\sim) = \\ &= \frac{\tau}{\hbar_k} \left[\bar{\nu}_{u,-1/2}^\sim (\rho^{(\psi_\rho)} - \rho_-^{(\psi_\rho)}) + \bar{\nu}_{u,1/2}^\sim (\rho^{(\psi_\rho)} - \rho_+^{(\psi_\rho)}) \right]. \end{aligned}$$

Отметим, что для приращения плотности $\Delta_{D,\pm 1/2} \rho^{(0.5)}$ в ячейке Ω в выражении (4.9) для достаточно малых $\tau \rightarrow 0$ и $\beta^\sim \rightarrow 1 - 0$ выполнено $|\Delta_D \hat{\rho}| \leq |\Delta_D \rho|$ для любых сеток в представлении коэффициента вязкости как $\bar{\nu}^\sim < \beta^\sim \frac{h}{\tau}$. Сетки, для которых при этом в процессе расчета шагов по времени еще $\Delta_D \hat{\rho} \rightarrow 0$, будем называть вязко-регулярными. Таковыми являются пространственно невырожденные сетки в частности равномерная, геометрическая прогрессия и т.п.

Итак, требуемыми условиями на выбор вязкости для обеспечения устойчивости по скорости в уравнении (3.2) являются неравенства (4.10)–(4.11) при выполнении ограничений в плотностных распределениях (4.9) и (4.13).

4.3. Устойчивость вязко-температурного уравнения

Исследуем устойчивость относительно функции ε вязко-температурного уравнения (3.11) при фиксированных остальных параметрах вещества. Полагая $\psi_\rho = \psi_u = \psi_\varepsilon =$

$= \frac{1}{2}, \bar{\psi} = 1 - \psi, \nu_{\tilde{E}} = \nu_u = \nu^{\sim}, \bar{\nu} = \frac{\nu^{\sim}}{h}$, перепишем это уравнение в узле в виде:

$$\begin{aligned} & \left[v\rho^{(0.5)}(\hat{\varepsilon} - \varepsilon) \right]_{\omega} - \tau v \text{DIN}_D(\rho_{\pm}^{(0.5)}\nu^{\sim} \text{GRAN}_D\varepsilon^{(0.5)}) + \\ & + \tau v \left[\text{DIN}_D M_{\tilde{E}D}^{\sim} - \varepsilon^{(0.5)} \text{DIN}_D M_D^{\sim} \right] = -\tau v [(\pi \text{div} u)_{\Delta}^{\sim} + \text{DIN}_D \chi_D^{\sim}]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Далее представим уравнение (4.14) в виде разложения по ε_k в узлах ω_k :

$$\hat{C}_{\varepsilon k}^{\sim} \hat{\varepsilon}_k = \hat{A}_{\varepsilon k}^{\sim} \hat{\varepsilon}_{k-1} + \hat{B}_{\varepsilon k}^{\sim} \hat{\varepsilon}_{k+1} + C_{\varepsilon k}^{\sim} \varepsilon_k + A_{\varepsilon k}^{\sim} \varepsilon_{k-1} + B_{\varepsilon k}^{\sim} \varepsilon_{k+1} - \tau v [(\pi \text{div} u)_{\Delta}^{\sim} + \text{DIN}_D \chi_D^{\sim}] \quad (4.15)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \hat{A}_{\varepsilon k}^{\sim} &= \frac{1}{2}\tau(\rho_-^{(0.5)})\bar{\nu}_{-1/2}^{\sim} + \frac{1}{2}\hat{\rho}_- \hat{u}_-, & A_{\varepsilon k}^{\sim} &= \frac{1}{2}\tau(\rho_-^{(0.5)})\bar{\nu}_{-1/2}^{\sim} + \frac{1}{2}\rho_- u_-, \\ \hat{B}_{\varepsilon k}^{\sim} &= \frac{1}{2}\tau(\rho_+^{(0.5)})\bar{\nu}_{+1/2}^{\sim} - \frac{1}{2}\hat{\rho}_+ \hat{u}_+, & B_{\varepsilon k}^{\sim} &= \frac{1}{2}\tau(\rho_+^{(0.5)})\bar{\nu}_{+1/2}^{\sim} - \frac{1}{2}\rho_+ u_+, \\ \hat{C}_{\varepsilon k}^{\sim} &= \hat{h}_k \rho^{(0.5)} + \frac{1}{2}\tau \left[(\rho_-^{(0.5)})\bar{\nu}_{-1/2}^{\sim} + \rho_+^{(0.5)}\bar{\nu}_{+1/2}^{\sim} \right] - \hat{h}_k \text{DIN}_D M_D^{\sim}, \\ C_{\varepsilon k}^{\sim} &= \hat{h}_k \rho^{(0.5)} - \frac{1}{2}\tau \left[(\rho_-^{(0.5)})\bar{\nu}_{-1/2}^{\sim} + \rho_+^{(0.5)}\bar{\nu}_{+1/2}^{\sim} \right] - \hat{h}_k \text{DIN}_D M_D^{\sim}. \end{aligned}$$

При выполнении условия для коэффициента вязкости в ячейке Ω :

$$\bar{\nu}_{\Omega}^{\sim} > kr_{\varepsilon\Omega}^{\sim} \cdot \frac{h_{\Omega}}{\tau} = \frac{1}{2} \left[\max_{\omega(\Omega)} \left(\frac{1}{\rho_{\omega}^{(0.5)}} \cdot \max\{\hat{\rho}|\hat{u}|, \rho|u|\}_{\omega} \right) + \varepsilon \right] \quad (4.16)$$

коэффициенты $\hat{A}_{\varepsilon k}^{\sim}, A_{\varepsilon k}^{\sim}, \hat{B}_{\varepsilon k}^{\sim}, B_{\varepsilon k}^{\sim}$ будут положительными. Здесь также вводится температурное число Куранта $kr_{\varepsilon\Omega}^{\sim}, \varepsilon > 0$ – малый параметр. Далее из условия $C_{\varepsilon k}^{\sim} > 0$ следует неравенство:

$$\frac{1}{2}(\rho_-^{(0.5)})\bar{\nu}_{-1/2}^{\sim} + \rho_+^{(0.5)}\bar{\nu}_{+1/2}^{\sim} < \frac{\hat{h}_k}{\tau}(\rho^{(0.5)} + \tau \text{DIN}_D M_D^{\sim}).$$

Это неравенство выполняется при условии:

$$\bar{\beta}^{\sim} < \frac{\hat{h}}{\hat{h}_{\rho}} \left[1 + \frac{\tau}{\rho^{(0.5)}} \text{DIN}_D M_D^{\sim} \right]. \quad (4.17)$$

Здесь введено вязкое наполнение в узлах $\bar{\beta}_{\omega}^{\sim} = \max_{\Omega(\omega)} \beta_{\Omega}$ для $\bar{\nu}_{\Omega}^{\sim} = \frac{\beta_{\Omega}^{\sim} h_{\Omega}}{\tau}$. Очевидно, что при $\beta_{\Omega}^{\sim} = \beta_a$ также будет выполнено $\bar{\beta}_{\omega}^{\sim} = \beta_a$. Определён плотностный размер узлового домена как

$$\hat{h}_{\rho} = \frac{1}{2}(\rho_-^{(0.5)})h_{-1/2} + \rho_+^{(0.5)}h_{1/2} / \rho^{(0.5)}. \quad (4.18)$$

Диагональное преобладание имеет место в виде:

$$\begin{aligned} D_{\varepsilon k}^{\sim} &= \hat{C}_{\varepsilon k}^{\sim} - (\hat{A}_{\varepsilon k}^{\sim} + \hat{B}_{\varepsilon k}^{\sim} + C_{\varepsilon k}^{\sim} + A_{\varepsilon k}^{\sim} + B_{\varepsilon k}^{\sim}) = \\ &= \frac{1}{4}\tau [(\hat{\rho}_+ \hat{u}_+ - \hat{\rho}_- \hat{u}_-) + (\rho_+ u_+ - \rho_- u_-)] - \tau \hat{h} \text{DIN}_D M_D^{\sim} = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Таким образом, требуемыми условиями на выбор вязкости для обеспечения устойчивости вязко-температурного уравнения (3.11) являются неравенства (4.16)–(4.17).

5. Заключение

В данной работе для построенной полностью консервативной разностной схемы второго порядка аппроксимации с регуляризирующими добавками в виде адаптивной искусственной вязкости для системы одномерных уравнений газовой динамики в переменных Эйлера, теоретически получены условия устойчивости разностного решения определяющие выбор коэффициентов искусственной вязкости. Для построенных разностных схем разработан и реализован итерационный алгоритм [15] и осуществлены тестовые расчеты ударных волн и задачи Эйнфельда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1980. 352 с.
2. Попов Ю. П., Самарский А. А. Полностью консервативные разностные схемы // ЖВМиМФ. 1969. Т. 9, № 4. С. 953–958.
3. Кузьмин А. В., Макаров В. Л. Об одном алгоритме построения полностью консервативных разностных схем // ЖВМиМФ. 1982. Т. 22, № 1. С. 123–132.
4. Кузьмин А. В., Макаров В. Л., Меладзе Г. В. Об одной полностью консервативной разностной схеме для уравнения газовой динамики в переменных Эйлера. // ЖВМиМФ. 1980. Т. 20, № 1. С. 171–181.
5. Двумерные полностью консервативные разностные схемы газовой динамики с разнесенными скоростями / В. М. Головизнин [и др.] // Препринты ИПМ им М. В. Келдыша. 1983. № 105.
6. Колдоба А. В., Повещенко Ю. А., Попов Ю. П. Двухслойные полностью консервативные разностные схемы для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера // ЖВМиМФ. 1987. Т. 27, № 5. С. 779–784.
7. Об одном подходе к расчету задач газовой динамики с переменной массой квазичастицы / А. В. Колдоба [и др.] // Препринты ИПМ им М. В. Келдыша. 1985. № 57.
8. Колдоба А. В., Повещенко Ю. А. Полностью консервативные разностные схемы для уравнений газовой динамики при наличии источников массы // Препринты ИПМ им М. В. Келдыша. 1982. № 160.
9. Разностные схемы на нерегулярных сетках / А. А. Самарский [и др.]. Минск: ЗАО «Критерий», 1996. 275 с.
10. Разностные схемы метода опорных операторов для уравнений теорий упругости / А. В. Колдоба [и др.] // Математическое моделирование. 2012. Т. 24, № 12. С. 86–96.
11. Повещенко Ю. А., Подрыга В. О., Шарова Ю. С. Интегрально-согласованные методы расчета самогравитирующих и магнитогидродинамических явлений // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2018. № 160.

12. Попов Ю. В., Фрязинов И. В. Метод адаптивной искусственной вязкости численного решения уравнений газовой динамики. М.: Красанд, 2014. 288 с.
13. Об одной двухслойной полностью консервативной разностной схеме газовой динамики в эйлеровых переменных с адаптивной регуляризацией / Ю. А. Повещенко [и др.] // Препринты ИПМ им М. В. Келдыша. 2019. № 14. 23 с.
14. Rahimly O., Podryga V., Poveshchenko Y., Rahimly P., Sharova Y. Two-layer completely conservative difference scheme of gas dynamics in Eulerian variables with adaptive regularization of solution // *Lecture Notes in Computer Science*. 2020. Vol. 11958 LNCS. pp. 618–625. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-41032-2_71
15. Теоретический анализ полностью консервативных разностных схем с адаптивной вязкостью / М. Е. Ладонкина [и др.] // Журнал СВМО. 2021. Т. 23, № 4. С. 412–423. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202104.412-423>

*Поступила 08.07.2022; доработана после рецензирования 12.08.2022;
принята к публикации 24.08.2022*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. A. A. Samarsky, Yu. P. Popov, *Difference methods for solving problems of gas dynamics*, Nauka Publ., Moscow, 1980 (In Russ.), 352 p.
2. Yu. P. Popov, A. A. Samarsky, “Completely conservative difference schemes”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **9**:4 (1969), 953–958 (In Russ.).
3. A. V. Kuzmin, V. L. Makarov, “About one construction algorithm in full of conservative difference schemes”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*., **22**:1 (1982), 123–132 (In Russ.).
4. A. V. Kuzmin, V. L. Makarov, G. V. Meladze, “On one completely conservative difference scheme for the equation of gas dynamics in Euler variables”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **20**:1 (1980), 171–181 (In Russ.).
5. V. M. Goloviznin, I. V. Krayushkin, M. A. Ryazanov, A. A. Samarsky, “Two-dimensional completely conservative difference schemes of gas dynamics with spaced velocities”, *Preprints of the KIAM*, **105** (1983) (In Russ.).
6. A. V. Koldoba, Yu. A. Poveshchenko, Yu. P. Popov, “Fully double layered conservative difference schemes for gas dynamics equations in Euler variables”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **27**:5 (1987), 779–784 (In Russ.).
7. A. V. Koldoba, O. A. Kuznetsov, Yu. A. Poveshchenko, Yu. P. Popov, “On one approach to the calculation of problems of gas dynamics with a variable mass of a quasiparticle”, *Preprints of the KIAM*, **57** (1985) (In Russ.).

8. A. V. Koldoba, Yu. A. Poveshchenko, “Completely conservative difference schemes for gas dynamics equations in the presence of mass sources”, *Preprints of the KIAM*, **160** (1982) (In Russ.).
9. A. A. Samarskii, A. V. Koldobav, Yu. A. Poveshchenko, V. F. Tishkin, A. P. Favorskii, *Difference schemes on irregular grids*, Criteria Publ., Minsk, 1996 (In Russ.), 275 p.
10. A. V. Koldoba, Yu. A. Poveshchenko, I. V. Gasilova, E. Yu. Dorofeeva, “Difference schemes of the method of support operators for equations of theories of elasticity”, *Math. Modeling*, **24**:12 (2012), 86–96 (In Russ.).
11. Yu. A. Poveshchenko, V. O. Podryga, Yu. S. Sharova, “Integrally consistent methods for calculating self-gravitating and magnetohydrodynamic phenomena”, *Preprints of the KIAM*, **160** (2018) (In Russ.).
12. Yu. V. Popov, I. V. Fryazinov, *Adaptive artificial viscosity method numerical solution of equations of gas dynamics*, Krasand Publ., Moscow, 2014 (In Russ.), 288 p.
13. Yu. A. Poveshchenko, M. E. Ladonkina, V. O. Podryga, O. R. Rahimly, Yu. S. Sharova, “On a two-layer completely conservative difference scheme of gas dynamics in Eulerian variables with adaptive regularization of solution”, *Keldysh Institute Preprints*, **14** (2019) (In Russ.), 23 p.
14. O. Rahimly, V. Podryga, Y. Poveshchenko, P. Rahimly, Y. Sharova, “Two-layer completely conservative difference scheme of gas dynamics in Eulerian variables with adaptive regularization of solution”, *Lecture Notes in Computer Science*, **11958 LNCS** (2020), 618–625. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-41032-2_71
15. M. E. Ladonkina, Yu. A. Poveschenko, O. R. Rahimly, H. Zhang, “Theoretical analysis of fully conservative difference schemes with adaptive viscosity”, *Zhurnal SVMO*, **23**:4 (2021), 412–423 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202104.412-423>

Submitted 08.07.2022; Revised 12.08.2022; Accepted 24.08.2022

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.