

DOI 10.15507/2079-6900.24.202203.304-316

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.62

## Численное решение сингулярно возмущенной краевой задачи сверхзвукового течения, преобразованной к модифицированному наилучшему аргументу

Е. Д. Цапко

*ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (г. Москва, Российская Федерация)*

**Аннотация.** При решении задач аэродинамики исследователи часто сталкиваются с необходимостью численного интегрирования краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения. В некоторых случаях задачу удается свести к решению краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения. Тогда можно применить различные численные методы, такие как метод сеток, ряд проекционных методов, которые, в свою очередь, могут формировать основу метода конечных элементов, а также метод стрельбы. При использовании метода сеток необходимо решать систему алгебраических уравнений, зачастую, нелинейную, что приводит к возрастанию времени счета задачи, а также к сложностям сходимости приближенного решения. При решении жестких задач Коши, как правило, применяют неявные схемы, однако в этом случае возникают те же самые сложности, что и для метода сеток. Преобразование рассматриваемой задачи к наилучшему аргументу  $\lambda$ , отсчитываемому по касательной вдоль интегральной кривой, позволяет повысить эффективность явных численных методов. Однако в случаях, когда скорость роста интегральных кривых близка к экспоненциальной, перехода к наилучшему аргументу оказывается недостаточно. Тогда наилучший аргумент модифицируется таким образом, чтобы сгладить данный недостаток. В данной работе исследуется применение модифицированного наилучшего аргумента к решению краевой задачи о движении аэродинамического потока при вдувании газа со сверхзвуковой скоростью в канал переменного сечения.

**Ключевые слова:** сингулярно возмущенная задача, обыкновенное дифференциальное уравнение, краевая задача, метод продолжения решения, наилучший аргумент, модифицированный наилучший аргумент, сверхзвуковое течение

**Для цитирования:** Цапко Е. Д. Численное решение краевой задачи сверхзвукового течения, преобразованной к модифицированному наилучшему аргументу // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 3. С. 304–316. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202203.304-316>

*Об авторе:*

**Цапко Екатерина Дмитриевна**, аспирант кафедры № 802 «Мехатроника и теоретическая механика», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (125993, Россия, г. Москва, Волоколамское ш., д. 4), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4215-3510>, [zapkokaty@gmail.com](mailto:zapkokaty@gmail.com)

© Е. Д. Цапко



MSC2020 65L11

# Numerical solution of a singularly perturbed boundary value problem of supersonic flow transformed to the modified best argument

E. D. Tsapko

*Moscow Aviation Institute (National Research University) (Moscow, Russian Federation)*

**Abstract.** When solving problems of aerodynamics, researchers often need to numerically solve singularly perturbed boundary value problems. In some cases, the problem can be reduced to solving a boundary value problem for an ordinary differential equation. Then it is possible to apply various numerical methods such as the grid method, the shooting method, as well as a number of projection methods, which, in turn, can form the basis of the finite element method. The grid method requires solving a system of algebraic equations, that are often nonlinear, which leads to an increase in the calculation time and to the difficulties in convergence of the approximate solution. According to the shooting method, the solution of boundary value problem is reduced to solving a certain set of Cauchy problems. When solving stiff Cauchy problems, implicit schemes are used as a rule, but in this case the same difficulties arise as for the grid method. The transformation of the problem to the best argument  $\lambda$ , calculated tangentially along the integral curve, makes it possible to increase the efficiency of explicit numerical methods. However, in cases where the growth rate of integral curves is close to exponential, the transformation to the best argument is not efficient enough. Then the best argument is modified in such a way as to smooth out this flaw. This paper investigates the application of modified best argument to the solution of the boundary value problem of an aerodynamic flow movement in case when the gas is injected at supersonic speed into a channel of variable cross-section.

**Keywords:** singularly perturbed problem, ordinary differential equation, boundary value problem, method of solution continuation, best argument, modified best argument, supersonic flow

**For citation:** *E. D. Tsapko.* Numerical solution of a singularly perturbed boundary value problem of supersonic flow transformed to the modified best argument. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 24:3(2022), 304–316. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202203.304-316>

*About the author:*

**Ekaterina D. Tsapko**, Postgraduate Student, Department of Mechatronics and Theoretical mechanics, Moscow Aviation Institute (National Research University) (4 Volokolamskoe Av., Moscow 125993, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4215-3510>, [zapkokaty@gmail.com](mailto:zapkokaty@gmail.com)

## 1. Введение

В теории жестких уравнений отдельно выделяют класс уравнений с малым параметром при старшей производной. Впервые они были рассмотрены в работах А. Н. Тихонова [1–3] и получили название сингулярно возмущенных уравнений. В работах Тихонова

было дано определение области влияния решения вырожденного уравнения и вырожденной системы, а также доказаны первые общие утверждения о близости решения вырожденного уравнения или системы уравнений к решению исходной задачи. Полученные Тихоновым результаты были развиты в работах его ученицы А. Б. Васильевой. Совместно с В. Ф. Бутузовым и другими ее учениками и коллегами [4–7] были получены фундаментальные результаты по представлению решений сингулярно возмущенных задач асимптотическими рядами специальных видов. В конце 80-х – начале 90-х гг. XX в., помимо задач с пограничными слоями, в работах А. Б. Васильевой, В. Ф. Бутузова и Н. Н. Нефедова рассмотрены задачи с контрастными структурами (внутренними слоями) [8–9]. Стоит также отметить вклад в теорию сингулярных возмущений С. А. Ломова и И. С. Ломова, в монографии которых дана математическая теория пограничного слоя для линейных дифференциальных уравнений в одномерном и многомерном случаях для операторов с различными свойствами [10]. В монографии С. А. Ломова [11] также рассмотрены некоторые классы нелинейных уравнений.

В зависимости от задачи определяющие уравнения могут быть нелинейными или квазилинейными, поэтому получить точное аналитическое решение затруднительно. К численным методам краевых задач относят конечно-разностные методы (методы сеток), метод конечных элементов и его модификации, проекционные методы, метод стрельбы и многие другие. Преимуществом метода сеток и метода конечных разностей является их универсальность: во многие программные среды уже включены готовые библиотеки, реализующие данные методы. Однако при решении жестких задач применение этих подходов требует огромных вычислительных мощностей. Метод стрельбы, в свою очередь, сводит решение краевой задачи к решению ряда начальных задач, что влечет за собой трудности численного решения жестких задач Коши, а именно для решения жестких начальных задач зачастую используют неявные методы. Это связано с тем, что, в отличие от явных, они позволяют получить более точное решение в участках быстрого изменения интегральной кривой. Явным методам для этого требуется сильное уменьшение шага интегрирования, что негативно сказывается на времени счета. При этом применение неявных методов затруднено необходимостью искать решение системы нелинейных алгебраических уравнений и анализировать сходимость полученного решения этой системы из выбранного начального приближения. Существуют методы, позволяющие преодолеть эти затруднения. Одним из них является метод наилучшей параметризации, или метод продолжения решения по наилучшему аргументу.

Метод продолжения решения по наилучшему аргументу был разработан в трудах В. И. Шалашилина и Е. Б. Кузнецова [12]. Ранее в работах [13–14] было показано, что он позволяет повысить эффективность явных численных методов для сингулярно возмущенных задач. Этот метод заключается в том, что аргумент системы уравнений заменяется на новый, отсчитываемый по касательной вдоль интегральной кривой исходной задачи. Размерность новой задачи повышается на единицу, однако она является наилучшим образом обусловленной, что имеет ряд вычислительных преимуществ. Однако в случае, когда интегральные кривые исходной задачи имеют экспоненциальную скорость роста, такой переход не позволяет существенно понизить жесткость преобразованной задачи. На базе метода продолжения решения был разработан новый подход. Модифицированный наилучший аргумент способен понизить показатель жесткости решаемой задачи. В работе [15] новый подход был апробирован на примере тестовой начальной задачи с экспоненциальной скоростью роста интегральных кривых.

В данной статье предлагается рассмотреть задачу возникновения сверхзвукового потока газа в канале с переменным сечением  $A(x)$ . Эта задача моделируется систе-

мой Навье-Стокса, и в книге Чанга К. и Хауэса Ф. [16] сводится к краевой задаче для сингулярно-возмущенного уравнения. В простейшем случае  $A(x) = 1$ , рассмотренном в статье [17], в данной задаче образуется пограничный слой при устремлении к нулю малого параметра, стоящего при старшей производной. Преобразование задачи к модифицированному наилучшему аргументу позволило получить численное решение явным методом Эйлера тогда, когда это не удалось ни исходной задаче, ни задаче, преобразованной к наилучшему аргументу. Целью текущей работы является рассмотрение случая переменного сечения вида  $A(x) = 1 + x^2$  и анализ эффективности применения метода продолжения решения по наилучшему аргументу и его экспоненциальной модификации.

## 2. Методика исследования

Рассмотрим задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка вида

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), \quad a < x < b, \quad (2.1)$$

с краевыми условиями первого рода

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b. \quad (2.2)$$

Уравнение (2.1) в общем случае является нелинейным, поэтому найти точное аналитическое решение зачастую невозможно. В этом случае для решения задачи (2.1)–(2.2) можно применить различные численные методы, одним из которых является метод стрельбы.

### 2.1. Метод стрельбы

Согласно методу стрельбы, вместо краевой задачи (2.1)–(2.2) решается следующая задача Коши [18]:

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), & a < x < b, \\ y(a) = y_a, \quad y'(a) = \tan \beta, & \beta : y(b, \beta) = y_b. \end{cases} \quad (2.3)$$

Здесь интегральная кривая  $y(x, \beta)$  зависит также от параметра  $\beta$ , называемого углом пристрелки. Он выбирается из условия

$$|y(b, \beta) - y_b| \leq \varepsilon, \quad (2.4)$$

где  $\varepsilon$  — заданная точность.

Начальным углом пристрелки можно, например, выбрать следующий:

$$\operatorname{tg} \beta_0 = \frac{y_b - y_a}{b - a}.$$

Одним из подходов подбора угла пристрелки является метод дихотомии [18], или метод половинного деления [19].

1. Решается задача Коши (2.3) со значением угла пристрелки  $\beta_0$ . Если выполняется условие (2.4), то полученное решение будет решением краевой задачи (2.1)–(2.2) с точностью  $\varepsilon$ .

2. Если  $y(b, \beta_0) > y_b$ , то угол пристрелки уменьшается и решается задача Коши (2.3) с  $\beta_1$  до тех пор, пока не выполнится условие  $y(b, \beta_1) < y_b$ .

Если  $y(b, \beta_0) < y_b$ , то угол пристрелки увеличивается и решается задача Коши (2.3) с  $\beta_1$  до тех пор, пока не выполнится условие  $y(b, \beta_1) > y_b$ .

3. В результате будет получен интервал  $(\beta_0, \beta_1)$ , внутри которого лежит истинное значение угла пристрелки  $\beta^*$ . Для его определения интервал последовательно делится пополам по формуле

$$\beta_{k+1} = \frac{\beta_{k-1} + \beta_k}{2}$$

до тех пор, пока не будет выполнено условие  $|y(b, \beta_{k+1}) - y_b| \leq \varepsilon$ . В этом случае найден истинный угол пристрелки  $\beta^*$  и  $y(x, \beta^*)$  — истинная интегральная кривая.

Однако метод половинного деления очень медленно сходится и требует решения большого числа задач Коши для различных значений углов пристрелки. При решении жестких задач, которые и без того, как правило, требуют значительно более длительного времени счета, это особенно критический недостаток. Итерационная процедура Ньютона позволяет ускорить скорость сходимости итерационного процесса [18].

Согласно ей, угол пристрелки  $\beta_1$  имеет вид

$$\beta_1 = \beta_0 + \frac{y_b - y(b, \beta_0)}{y(b, \beta_0 + \delta) - y(b, \beta_0)} \delta,$$

где  $\delta$  — малое приращение. Итерационный процесс продолжается до выполнения условия (2.4), при этом на каждой итерации угол пристрелки определяется по формуле

$$\beta_{k+1} = \beta_k + \frac{y_b - y(b, \beta_k)}{y(b, \beta_k) - y(b, \beta_{k-1})} (\beta_k - \beta_{k-1}).$$

Данная процедура сходится быстро вблизи корня, а сходимость вдали от корня зависит от подбора начального значения  $\beta_0$  [19].

## 2.2. Наилучшая параметризация

В работе В. И. Шалапилина и Е. Б. Кузнецова [12] показано применение метода продолжения решения по наилучшему аргументу к решению задачи Коши. Метод состоит в замене исходного аргумента задачи на новый, отсчитываемый по касательной вдоль интегральной кривой. Он получил название наилучшего аргумента, т. к. преобразованная к нему линейная система дифференциальных уравнений является наилучшим образом обусловленной. Для задачи Коши (2.3) дифференциал наилучшего аргумента имеет вид:

$$d\lambda^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + dx^2,$$

где  $y_1, y_2$  — искомые функции системы (2.3), приведенной к нормальной форме:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2, & y_1(a) = y_a, \quad a < x < b, \\ \frac{dy_2}{dx} = f(x, y_1, y_2), & y_2(a) = \tan \beta, \quad \beta : y_1(b, \beta) = y_b. \end{cases} \quad (2.5)$$

Тогда преобразование к наилучшему аргументу  $\lambda$  задачи (2.5) приводит к системе вида:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{d\lambda} = \frac{y_2}{\sqrt{Q(x, y_1, y_2)}}, & y_1(0) = y_a, \\ \frac{dy_2}{d\lambda} = \frac{f(x, y_1, y_2)}{\sqrt{Q(x, y_1, y_2)}}, & y_2(0) = \tan \beta, \quad \beta : y_1(\lambda^*, \beta) = y_b, \\ \frac{dx}{d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{Q(x, y_1, y_2)}}, & x(0) = a, \quad \lambda \in [0, \lambda^*], \quad \lambda^* : x(\lambda^*) = b, \end{cases} \quad (2.6)$$

где  $Q(x, y_1, y_2) = 1 + y_2^2 + f^2(x, y_1, y_2)$ . В работе [12] показано, что задача (2.6) обладает рядом важных свойств:

1. Квадратичная норма правой части системы (2.6) равна единице, т. е. устраняются вычислительные трудности, связанные с неограниченным возрастанием правых частей системы (2.5).
2. Система (2.6) является наилучшим образом обусловленной.
3. Показатель жесткости системы (2.6) меньше, чем у системы (2.5).

### 2.3. Модификация наилучшего аргумента

Отмеченные свойства позволяют повысить эффективность явных численных методов. Это было показано на примере тестовой начальной задачи с контрастными структурами в работе [13]. Наилучшая параметризация позволила значительно сократить время счета и повысить точность численного решения. Однако для некоторого класса задач этот подход оказывается малоэффективен. В работе [15] рассматривается тестовая задача, получившая в работе А. А. Белова и Н. Н. Калиткина [20] название экспоненциального теста, так как скорость изменения интегральных кривых является экспоненциальной. Было показано, что в этом случае наилучший аргумент малоэффективен. Был разработан новый подход, чему и была посвящена работа [15]. Было предложено модифицировать наилучший аргумент, добавив в него экспоненциальную составляющую:

$$d\kappa^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + \exp(-2\alpha t) dx^2,$$

где  $\alpha$  — настраиваемый параметр. Тогда, преобразование к модифицированному наилучшему аргументу  $\kappa$  задачи (2.5) приводит к системе:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{d\kappa} = \frac{y_2 \cdot \exp(\alpha x)}{\sqrt{Q'(x, y_1, y_2)}}, & y_1(0) = y_a, \\ \frac{dy_2}{d\kappa} = \frac{f(x, y_1, y_2) \cdot \exp(\alpha x)}{\sqrt{Q'(x, y_1, y_2)}}, & y_2(0) = \tan \beta, \quad \beta : y_1(\kappa^*, \beta) = y_b, \\ \frac{dx}{d\kappa} = \frac{\exp(\alpha x)}{\sqrt{Q'(x, y_1, y_2)}}, & x(0) = a, \quad \kappa \in [0, \kappa^*], \quad \kappa^* : x(\kappa^*) = b, \end{cases} \quad (2.7)$$

где  $Q'(x, y_1, y_2) = 1 + y_2^2 \cdot \exp(2\alpha x) + f^2(x, y_1, y_2) \cdot \exp(2\alpha x)$ .

Как было показано в работах [15; 17], при варьировании параметра  $\alpha$  можно повысить эффективность численных методов при решении жестких задач с экспоненциальной скоростью роста интегральных кривых по сравнению с наилучшим аргументом  $\lambda$ .

### 3. Результаты исследования

В работе Чанга К. и Хауэса Ф. [16] рассматривается следующая задача:

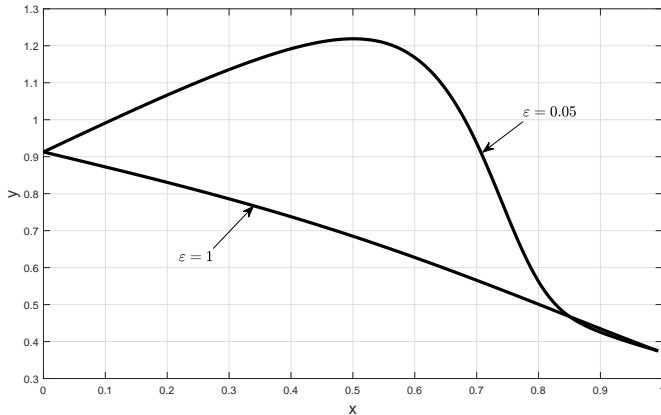
$$\begin{cases} \varepsilon A(x)y \frac{d^2 y}{dx^2} = \left[ \frac{\gamma+1}{2} y - y^{-1} \right] \frac{dy}{dx} - \frac{d}{dx} \left[ \ln A(x) \left( 1 - \frac{\gamma-1}{2} y^2 \right) \right], & 0 < x < 1 \\ y(0, \varepsilon) = y_-, & y(1, \varepsilon) = y_+, \end{cases} \quad (3.1)$$

моделирующая поток, возникающий в канале с площадью поперечного сечения  $A(x)$  при вдувании газа со сверхзвуковой скоростью. Здесь  $y_- > y_+ > 0$ ,  $\varepsilon = \mu\gamma(\rho_0 c_0)^{-1}$  — малый параметр,  $\mu$  — коэффициент вязкости,  $\gamma$  — показатель адиабаты со значением между 1 и  $5/3$ ,  $\rho_0$  — плотность,  $c_0$  — скорость звука на входе в канал.

В одном из разделов статьи [17] был рассмотрен более простой случай постоянного сечения  $A(x) = 1$  для задачи (3.1). В этом случае в задаче (3.1) при уменьшении  $\varepsilon$  образуется пограничный слой. В этой статье рассматривается случай переменного сечения  $A(x) = 1 + x^2$ . Приводя уравнение задачи (3.1) к системе в нормальной форме, получим задачу вида

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1, & y_1(0) = y_-, & y_2(1) = y_+, & 0 < x < 1, \\ \frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{\varepsilon (1+x^2)^2 y_1^2} \left( \left[ \frac{\gamma+1}{2} y_1^2 - 1 + \ln(1+x^2) (\gamma-1) y_1^2 \right] \times \right. \\ \left. \times (1+x^2) y_2 - 2xy_1 \left( 1 - \frac{\gamma-1}{2} y_1^2 \right) \right). \end{cases} \quad (3.2)$$

В задаче (3.2) при устремлении  $\varepsilon$  к нулю в решении образуется внутренний слой, как это показано на Рис. 3.1.



**Рис. 3.1.** Численное решение задачи (3.2) для  $\varepsilon = 0.05$  явным методом Эйлера с переменным шагом, отсчитываемым по правилу Рунге с точностью  $\theta = 10^{-3}$ , с начальным шагом  $h_0 = 10^{-4}$

**Fig 3.1.** The numerical solution of the problem (3.2) at  $\varepsilon = 0.05$  using explicit Euler's method with variable integration step chosen according to the Runge's rule with tolerance  $\theta = 10^{-3}$  and initial integration step  $h_0 = 10^{-4}$

### 3.1. Преобразование к наилучшему аргументу

Используя результаты раздела 2.2, преобразуем задачу (3.2) к наилучшему аргументу  $\lambda$ :

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{d\lambda} = \frac{2\varepsilon(1+x^2)^2 y_1^2 y_2}{\sqrt{Q(y_1, y_2, x, \varepsilon)}}, & y_1(0) = y_-, \\ \frac{dy_2}{d\lambda} = \frac{P(x, y_1, y_2)}{\sqrt{Q(x, y_1, y_2, \varepsilon)}}, & y_2(1) = y_+, \\ \frac{dx}{d\lambda} = \frac{2\varepsilon(1+x^2)^2 y_1^2}{\sqrt{Q(x, y_1, y_2, \varepsilon)}}, & x(0) = 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

где

$$Q(x, y_1, y_2, \varepsilon) = 4\varepsilon^2(1+x^2)^4 y_1^4(1+y_2^2) + P^2(y_1, y_2, x)$$

и

$$P(x, y_1, y_2) = ((\gamma+1)y_1^2 - 2 + 2\ln(1+x^2)(\gamma-1)y_1^2)y_2(1+x^2) - 2xy_1(2 - (\gamma-1)y_1^2).$$

### 3.2. Преобразование к модифицированному наилучшему аргументу

Согласно (2.7) имеем задачу вида:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{d\kappa} = \frac{2\varepsilon(1+x^2)^2 y_1^2 y_2 \cdot \exp(\alpha x)}{\sqrt{Q'(x, y_1, y_2, \varepsilon)}}, & y_1(0) = y_-, \\ \frac{dy_2}{d\kappa} = \frac{P'(x, y_1, y_2)}{\sqrt{Q'(x, y_1, y_2, \varepsilon)}}, & y_2(1) = y_+, \\ \frac{dx}{d\kappa} = \frac{2\varepsilon(1+x^2)^2 y_1^2 \cdot \exp(\alpha x)}{\sqrt{Q'(x, y_1, y_2, \varepsilon)}}, & x(0) = 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

где

$$Q'(x, y_1, y_2, \varepsilon) = 4\varepsilon^2(1+x^2)^4 y_1^4(1+y_2^2 \cdot \exp(2\alpha x)) + P'^2(y_1, y_2, x)$$

и

$$P'(x, y_1, y_2) = [((\gamma+1)y_1^2 - 2 + 2\ln(1+x^2)(\gamma-1)y_1^2)y_2(1+x^2) - 2xy_1(2 - (\gamma-1)y_1^2)] \cdot \exp(\alpha x).$$

### 3.3. Численные результаты

В табл. 3.1 приведено время численного решения задач (3.2), (3.3) и (3.4). Для расчета были выбраны те же значения, что и в книге [16]:  $y_- = 0.9129$ ,  $y_+ = 0.375$  и  $\gamma = 7/5$ . Задачи были решены методом стрельбы с применением процедуры Ньютона с малым приращением  $\delta = 10^{-3}$ . Начальные задачи были решены явным методом Эйлера с переменным шагом, выбранным согласно правилу Рунге с точностью  $\theta = 10^{-3}$ . За начальный шаг было взято значение  $h_0 = 10^{-4}$ .



**Таблица 3.1.** Время счета  $t_c$  задач (3.2), (3.3) и (3.4) методом стрельбы с малым приращением угла пристрелки  $\delta = 10^{-3}$  с применением явного метода Эйлера с переменным шагом, отсчитываемым по правилу Рунге с точностью  $\theta = 10^{-3}$ , с начальным шагом  $h_0 = 10^{-4}$

**Table 3.1.** The calculation time  $t_c$  of the problems (3.2), (3.3) and (3.4) by the shooting method with a small increment of the shooting angle  $\delta = 10^{-3}$  using explicit Euler's method with variable integration step calculated according to the Runge's rule with the tolerance  $\theta = 10^{-3}$  and initial integration step  $h_0 = 10^{-4}$

$\varepsilon$	Исходная задача /	Наилучший аргумент /	Экспоненциальный	
	Original problem	The best argument	наилучший аргумент / The modified best argument	
	$t_c, c$	$t_c, c$	$t_c, c$	$\alpha$
1.00	0.04	0.08	0.06	$10^{-3}$
0.50	0.05	0.09	0.07	$10^{-3}$
0.20	0.08	0.36	0.18	$10^{-3}$
0.15	0.11	0.42	0.20	$10^{-3}$
0.11	0.43	0.54	0.30	$10^{-3}$
0.10	2.65	0.59	0.26	$10^{-3}$
0.09	336.36	9.20	0.70	$10^{-4}$
0.08	119.45	9.18	1.79	$10^{-4}$
0.07	—	22.18	5.41	$10^{-3}$
0.06	—	—	9.95	$10^{-5}$
0.05	—	—	81.75	$0.5 \cdot 10^{-6}$

#### 4. Обсуждение и анализ полученных результатов

В статье рассмотрено применение метода наилучшей параметризации и, в частности, экспоненциального наилучшего аргумента к решению сингулярно возмущенной задачи. Получены численные решения задач (3.2), (3.3) и (3.4) методом стрельбы с применением явного метода Эйлера с переменным шагом. Анализируя результаты из табл. 3.1, отметим следующее:

1. При  $\varepsilon > 0.1$  задачи (3.2), (3.3) и (3.4) можно считать нежесткими. В этом случае применение метода наилучшей параметризации неэффективно, поскольку он увеличивает размерность задачи и приводит правую часть системы к более сложному виду, что сказывается на времени счета.
2. Задачи (3.2), (3.3) и (3.4) со значениями  $\varepsilon \leq 0.1$  в табл. 3.1 можно считать жесткими. Так, решение исходной задачи (3.2) занимает значительно большее время, а начиная со значения  $\varepsilon = 0.07$  получить решение не удается.
3. При этом стоит отметить преимущества модифицированной наилучшей параметризации: преобразование к экспоненциальному наилучшему аргументу позволило сократить время счета и получить численное решение для большего числа значений малого параметра  $\varepsilon$ .

## 5. Заключение

В работе рассмотрена краевая задача для сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения, моделирующая возникновение одномерного сверхзвукового потока газа в канале с сечением  $A(x) = 1 + x^2$ . Для решения краевой задачи использовался метод стрельбы, сводящий алгоритм к решению задач Коши до тех пор, пока не будет удовлетворено правое краевое условие. Таким образом, проблема была сведена к решению жестких начальных задач. Метод продолжения по наилучшему аргументу  $\lambda$  давно зарекомендовал себя в качестве подхода, позволяющего снизить жесткость решаемой задачи Коши. Однако результаты данной работы показывают, что при чрезвычайно быстром росте интегральных кривых перехода к наилучшему аргументу  $\lambda$  недостаточно. При этом недавно разработанная экспоненциальная модификация наилучшего аргумента  $\kappa$  оказывается более эффективной. Стоит отметить, что выбор параметра  $\alpha$  подбирался эмпирически. Вероятно, возможно подобрать такой параметр  $\alpha$ , который позволит еще значительно сократить время счета, а также получить численные решения данной задачи для меньших значений  $\varepsilon$ . Критерий и алгоритм выбора оптимального параметра  $\alpha$  для решения жестких задач с экспоненциальной скоростью изменения интегральных кривых является направлением дальнейших исследований.

**Благодарности.** Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-90054.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А. Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Математический сборник. 1948. Т. 22 (64), № 2. С. 193–204. URL: <http://mi.mathnet.ru/msb6075> (дата обращения: 01.09.2022).
2. Тихонов А. Н. О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры // Математический сборник. 1950. Т. 27 (69), № 1. С. 147–156. URL: <http://mi.mathnet.ru/msb5907> (дата обращения: 01.09.2022).
3. Тихонов А. Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Математический сборник. 1952. Т. 31 (73), № 3. С. 575–583. URL: <http://mi.mathnet.ru/msb5548> (дата обращения: 01.09.2022).
4. Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в сингулярно возмущенных задачах. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 2014. 140 с.
5. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
6. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990. 208 с.
7. Васильева А. Б., Плотников А. А. Асимптотическая теория сингулярно возмущенных задач. М.: Физический факультет МГУ, 2008. 398 с.
8. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н. Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 4, № 3. С. 799–851.

9. Бутузов В. Ф., Васильева А. Б., Нефедов Н. Н. Асимптотическая теория контрастных структур (обзор) // Автоматика и телемеханика. 1997. № 7. С. 4–32.
10. Ломов С. А., Ломов И. С. Основы математической теории пограничного слоя. М.: Изд-во Москов. ун-та, 2011. 456 с.
11. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981. 400 с.
12. Шалашин В. И., Кузнецов Е. Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 224 с.
13. Кузнецов Е. Б., Леонов С. С., Цапко Е. Д. Параметризация задачи Коши для нелинейных дифференциальных уравнений с контрастными структурами // Вестник Мордовского университета. 2018. Т. 28. № 4. С. 486–510. DOI: <https://doi.org/10.15507/0236-2910.028.201804.486-510>
14. Численные методы решения задач с контрастными структурами / Е. Б. Кузнецов [и др.] // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2018. Т. 14, № 3. С. 539–547. DOI: <https://doi.org/10.25559/SITITO.14.201803.542-551>
15. Kuznetsov E. B., Leonov S. S., Tsapko E. D. A new numerical approach for solving initial value problems with exponential growth integral curves // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. Vol. 927, No. 1. pp. 012032. DOI: <https://doi.org/10.1088/1757-899x/927/1/012032>
16. Чанг К., Хауэс Ф. Нелинейные сингулярно возмущенные краевые задачи. Теория и приложения. М.: Мир, 1988. 247 с.
17. Kuznetsov E. B., Leonov S. S., Tsapko E. D. Applying the Best Parameterization Method and Its Modifications for Numerical Solving of Some Classes of Singularly Perturbed Problems // Advances in Theory and Practice of Computational Mechanics. Smart Innovation, Systems and Technologies. Springer, Singapore. 2022. Vol. 274, No. 1. pp. 311–330.
18. Формалев В. Ф., Ревизников Д. Л. Численные методы. М.: Физматлит, 2004. 400 с.
19. Калиткин Н. Н. Численные методы. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 592 с.
20. Белов А. А., Калиткин Н. Н. Особенности расчета контрастных структур в задачах Коши // Матем. моделирование. 2016. Т. 28, № 10. С. 97–109. URL: <http://mi.mathnet.ru/mm3780> (дата обращения: 01.09.2022).

*Поступила 03.07.2022; доработана после рецензирования 12.08.2022;  
принята к публикации 24.08.2022*

*Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.*

## REFERENCES

1. A. N. Tikhonov, “[On the dependence of the solutions of differential equations on a small parameter]”, *Mat. Sb.*, **22**:2 (1948), 193–204 (In Russ.), <http://mi.mathnet.ru/msb6075>.
2. A. N. Tikhonov, “[On systems of differential equations containing parameters]”, *Mat. Sb.*, **27**:1 (1950), 147–156 (In Russ.), <http://mi.mathnet.ru/msb5907>.
3. A. N. Tikhonov, “[Systems of differential equations containing small parameters in the derivatives]”, *Mat. Sb.*, **31**:3 (1952), 575–583 (In Russ.), <http://mi.mathnet.ru/msb5548>.
4. V. F. Butuzov, [*Asymptotic methods in singularly perturbed problems*], YarGU, Yaroslavl, 2014 (In Russ.), 140 p.
5. A. B. Vasil’eva, V. F. Butuzov, [*Asymptotic expansions of solutions of singularly perturbed equations*], Nauka Publ., Moscow, 1973 (In Russ.), 272 p.
6. A. B. Vasil’eva, V. F. Butuzov, [*Asymptotic methods in the theory of singular perturbations*], Visshay shkola Publ., Moscow, 1990 (In Russ.), 208 p.
7. A. B. Vasil’eva, A. A. Pochinka, [*Asymptotic theory of singularly perturbed problems*], MSU Publ., Moscow, 2008 (In Russ.), 398 p.
8. A. B. Vasil’eva, V. F. Butuzov, N. N. Nefedov, “Contrast structures in singularly perturbed problems”, *Fundam. Prikl. Mat.*, **4**:3 (1998), 799–851 (In Russ.), <http://mi.mathnet.ru/eng/fpm/v4/i3/p799>.
9. V. F. Butuzov, A. B. Vasil’eva, N. N. Nefedov, “Asymptotic Theory of Contrasting Structures. A Survey”, *Autom. Remote Control*, **58**:7 (1997), 1068–1091 (In Russ.).
10. S. A. Lomov, I. S. Lomov, *Fundamentals of the mathematical theory of a boundary layer*, Moscow University Press, Moscow, 2011 (In Russ), 456 p.
11. S. A. Lomov, *Introduction to the general theory of singular perturbations*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1992 (In Russ), 375 p.
12. V. I. Shalashilin, E. B. Kuznetsov, *Parametric continuation and optimal parametrization in applied mathematics and mechanics*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, Boston, London, 2003, 236 p.
13. E. B. Kuznetsov, S. S. Leonov, E. D. Tsapko, “The parametrization of the cauchy problem for nonlinear differential equations with contrast structures”, *Mordovia University Bulletin*, **28**:4 (2018), 486–510. DOI: <https://doi.org/10.15507/0236-2910.028.201804.486-510>
14. E. B. Kuznetsov, S. S. Leonov, D. A. Tarkhov, E. D. Tsapko, A. A. Babintseva, “Arc length and multilayer methods for solving initial value problems for differential equations with contrast structures”, *Modern Information Technology and IT Education. 13th International Conference, SITITO 2018*. Vol. 1201 (Moscow, Russia, November 29 – December 2, 2018), Springer, Cham, Switzerland, 2020, 335–351 (In Russ).

15. E. B. Kuznetsov, S. S. Leonov, E. D. Tsapko, “A new numerical approach for solving initial value problems with exponential growth integral curves”, *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, **927**:1 (2020), 012032. DOI: <https://doi.org/10.1088/1757-899x/927/1/012032>
16. K. W. Chang, F. A. Howes, *Nonlinear singular perturbation phenomena: theory and application*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1984, 181 p.
17. E. B. Kuznetsov, S. S. Leonov, E. D. Tsapko, “Applying the best parameterization method and its modifications for numerical solving of some classes of singularly perturbed problems”, *Advances in Theory and Practice of Computational Mechanics*. Vol. 274, Springer, Singapore, 2022, 311–330.
18. V. F. Formalyov, D. L. Reviznikov, *[Numerical methods]*, Physmatlit Publ., Moscow, 2004 (In Russ.), 400 p.
19. N. N. Kalitkin, *[Numerical methods]*, BHV-Petersburg Publ., Saint Petersburg, 2011 (In Russ.), 592 p.
20. A. A. Belov, N. N. Kalitkin, “Features of calculating contrast structures in the Cauchy problem”, *Mathematical Models and Computer Simulations*, **9**:3 (2017), 281–291 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.1134/S2070048217030048>

*Submitted 03.07.2022; Revised 12.08.2022; Accepted 24.08.2022*

*The author has read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The author declare no conflict of interest.