DOI 10.15507/2079-6900.24.202203.289-296 ISSN 2079-6900 (Print)
Оригинальная статья ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.926

Резонанс в ограниченных нелинейных системах маятникового типа

Е. Н. Пелиновский[1,2], И. Е. Мельников[1,2]

[1]*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)*
[2] *Институт прикладной физики РАН (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)*

Аннотация. Решение нелинейных дифференциальных уравнений с внешними силами имеет важное значение для понимания резонансных явлений в физике колебаний. В статье эта проблема анализируется на примере обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка маятникового типа, когда нелинейность описывается синусоидальным слагаемым. Построена фазовая плоскость такого осциллятора и изучены ее периодические траектории. Показано, что ограниченная нелинейность играет роль только на промежуточных амплитудах. Возбуждение нелинейного осциллятора осуществляется с помощью ограниченной двухкомпонентной силы; одна из ее компонент соответствует колебанию на резонансной частоте линейного осциллятора, а вторая представляет собой ограниченную функцию с переменной частотой. Показывается, что при соответствующем выборе внешней силы можно получить неограниченное усиление колебаний в осцилляторе маятникового типа с амплитудой, линейно пропорциональной времени. Спектральный состав внешней силы исследуется с помощью оконного преобразования Фурье. Демонстрируется, что для поддержания резонансного режима частота внешней силы должна непрерывно расти. Выполнены энергетические оценки внешней силы и колебаний осциллятора в зависимости от времени. Рассмотренный пример важен для понимания резонансных условий в нелинейных задачах.

Ключевые слова: нелинейный резонанс, осциллятор, оконное преобразование Фурье, математический маятник, спектрограмма

Для цитирования: Пелиновский Е. Н., Мельников И. Е. Резонанс в ограниченных нелинейных системах маятникова типа // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 3. С. 289–296. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202203.289-296

Об авторах:

Пелиновский Ефим Наумович, профессор кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), главный научный сотрудник, ФГБНУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН» (603950, Россия, Н. Новгород, ул. Ульянова, д. 46), доктор физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-5092-0302, pelinovsky@appl.sci-nnov.ru

Мельников Иоанн Евгеньевич, студент факультета информатики, математики и компьютерных наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), ORCID: https://orcid.org/ 0000-0003-4560-9648, melnicovioann@gmail.com

Original article

MSC2020 34A34

Resonance in bounded nonlinear pendulum-type systems

E. N. Pelinovsky[1,2], **I. E. Melnikov**[1,2]

[1] *Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russian Federation)*
[2] *Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences (Nizhny Novgorod, Russian Federation)*

Abstract. Solving nonlinear differential equations with external forces is important for understanding resonant phenomena in the physics of oscillations. The article analyzes this problem basing on example of an ordinary second-order differential equation of the pendulum type, where the nonlinearity is described by a sinusoidal term. The phase plane of such an oscillator is constructed and its periodic trajectories are studied. It is illustrated that bounded nonlinearity matters only at intermediate amplitudes. The excitation of a nonlinear oscillator is carried out using a limited two–component force; the first its component corresponds to an oscillation at the resonant frequency of a linear oscillator, and the second is a limited function with a variable frequency. It is shown that with the appropriate choice of an external force, it is possible to obtain unlimited amplification of oscillations in a pendulum-type oscillator with amplitude linearly proportional to time. Spectral composition of the external force is investigated using short-time Fourier transform. It is demonstrated that in order to maintain the resonant mode, the frequency of the external force must continuously increase. Energy estimates of the external force and oscillator fluctuations depending on time are performed. The considered example is important for understanding resonant conditions in nonlinear problems.

Keywords: Nonlinear resonance, oscillator, short-time Fourier transform, mathematical pendulum, spectrogram

For citation: *E. N. Pelinovsky, I. E. Melnikov.* Resonance in bounded nonlinear pendulum-type systems. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 24:3(2022), 289–296. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202203.289-296

About the authors:
Efim N. Pelinovsky, Professor of the Department of Fundamental Mathematics, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), Chief Researcher, Federal Research Center Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences (46 Ulyanova St., Nizhny Novgorod 603950), Doctor of Physical and Mathematical Sciences, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-5092-0302 , pelinovsky@appl.sci-nnov.ru
Ioann E. Melnikov, Student of the Faculty of Informatics, Mathematics and Computer Science, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: https://orcid.org/ 0000-0003-4560-9648, melnicovioann@gmail.com

1. Введение

Резонанс в линейном осцилляторе является хорошо изученным явлением. Так, например, чтобы возбудить линейный математический маятник необходимо воздействовать на него гармонической внешней силой той же частоты, что и его собственная частота колебаний [1]. Однако в случае нелинейных систем такой способ уже не работает.

С проблемой нелинейного резонанса столкнулись в середине прошлого века при попытке разгона заряженых частиц в циклотроне. Линейная математическая модель, которая описывает движение частиц в циклотроне [2], не учитывает, что при достаточно больших скоростях из-за релятивистских эффектов происходит изменение их периода обращения, и гармоническое изменение напряжения на дуантах, которое генерирует электрическое поле (благодаря чему возникает резонанс), уже не приносит должного эффекта.

Нелинейные резонансы также возникают во многих других физических системах [3–5]. Эта проблема встречается для всех нелинейных систем, частота собственных колебаний которых зависит от амплитуды колебаний. Данную проблему можно решить, непрерывно изменяя частоту внешней силы и делая ее все время резонансной [6]. Такой подход помог справиться с получением нелинейного резонанса в циклотроне [7]. Один из таких примеров рассмотрен в работе [8] на примере вынужденных колебаний математического маятника

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \sin u = \varepsilon \cos\varphi(t).$$

Важно подчеркнуть, что, меняя частоту внешней силы по линейному закону, как это предложено в работе [8], невозможно достичь значительного усиления, потому что частота нелинейного осциллятора сложным образом зависит от амплитуды, и колебания становятся несинусоидальными. Целью данной работы является исследование резонанса в нелинейных системах маятникового типа, когда ограниченной несинусоидальной силой можно возбудить синусоидальное колебание с растущей амплитудой.

2. Нелинейный осциллятор маятникового типа

Резонанс в линейной колебательной системе математического маятника без затухания [9] описывается уравнением (2.1)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = P\cos(\omega_0 t), \tag{2.1}$$

где ω_0 – частота его колебаний. В уравнении (2.1) удобно перейти к безразмерным величинам, а именно положить $u = \dfrac{x}{P}$ и $\tau = \omega_0 t$, тогда уравнение (2.1) запишем в виде:

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} + u = \cos\tau.$$

Рассмотрим здесь осциллятор с ограниченной нелинейностью маятникового типа, движения которого описывается следующим уравнением:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u + Q\sin^2 Du = 0, \tag{2.2}$$

где $Q \in \mathbb{R}$, $D \in \mathbb{R}$ – некоторые константы. Для простоты Q и D будем считать положительными. Нелинейность $F(u) = Q\sin^2 Du$, которая отличает уравнение (2.2) от уравнения математического маятника, является ограниченной и малой в малой окрестности колебаний, т. е. $F(0) = 0$ и $F(u) \to \mu u^2$ при $u \to 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ (параметры Q, D и μ

связаны соотношением $\mu = QD^2$). Данные условия позволяют при малых амплитудах колебаний, воздействуя на систему косинусоидальной внешней силой на единичной частоте, получить линейный резонанс, поскольку при этом нелинейный член будет $o(u)$.

Исследуем собственную динамику данной системы. Состояния равновесия находятся из уравнения

$$u + Q\sin^2 Du = 0. \tag{2.3}$$

Один из корней этого уравнения легко находится: $u = 0$, и он соответствует центру. Остальные состояния равновесия определяются из трансцендентного уравнения

$$\frac{1}{QD} = \frac{-sin^2 v}{v},$$

где $v = Du$. Отсюда видно, что все остальные корни отрицательны, и они существуют только при $QD > 1,379$. В области $1,379 < QD < 4,651$ появляются два корня (больший по модулю – центр, а меньший – седло). При еще больших значениях параметра QD происходит рождение еще двух корней и т. д. Эти бифуркации видны на серии фазовых портретов, представленных на Рис. 2.1.

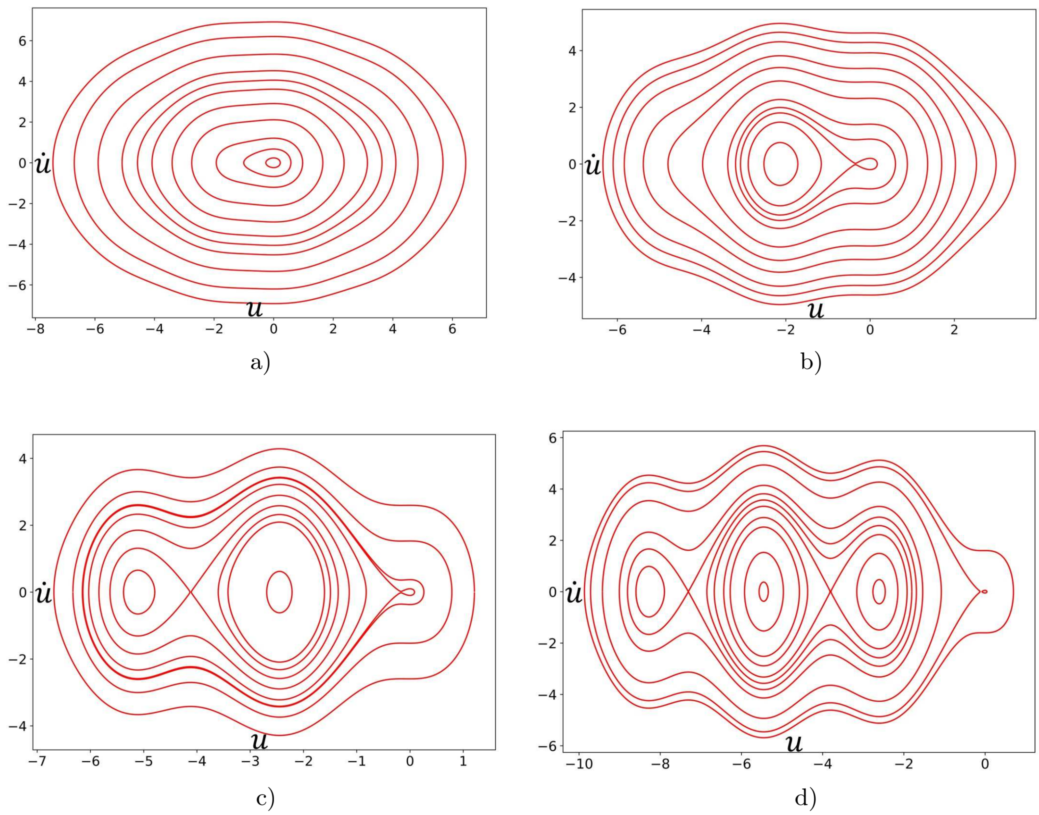


Рис. 2.1. Фазовая плоскость уравнения (2.2) со следующими параметрами: a) $Q = 1$, $D = 1$; b) $Q = 3$, $D = 1$; c) $Q = 6$, $D = 1$; d) $Q = 10$, $D = 1$

Fig 2.1. Phase plane of equation (2.2) with the following parameters: a) $Q = 1$, $D = 1$; b) $Q = 3$, $D = 1$; c) $Q = 6$, $D = 1$; d) $Q = 10$, $D = 1$

Ограниченная нелинейность играет роль только на промежуточных амплитудах, поскольку при больших амплитудах мы видим искривленные эллипсы со смещенным центром. Следует отметить, что периодическое движение возможно в сущности при любой амплитуде, хотя при небольших амплитудах возможно движение и по сепаратрисе.

3. Резонанс в нелинейном осцилляторе маятникового типа

Предположим, что в системе, описываемой уравнение (2.2), возможно получение резонанса как и в линейном случае, то есть получение решения

$$u(t) = t\sin t \tag{3.1}$$

благодаря воздействию некоторой внешней силы $2cost + f(t)$. Для того чтобы найти внешнюю силу, которая возбуждает резонанс, подставим (3.1) в следующее уравнение:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u + Q\sin^2 Du = 2\cos t + f(t). \tag{3.2}$$

Получим выражение для $f(t)$:

$$f(t) = Q\sin^2(Dt\sin t). \tag{3.3}$$

Исследуем, как будет изменяться спектр внешней силы $f(t)$ вида (3.3) с течением времени для этого воспользуемся оконным преобразование Фурье [10]

$$x(\omega,\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t-\tau)f(t)e^{-i\omega t}dt,$$

где $w(t-\tau)$ – некоторая оконная функция; τ – период времени.

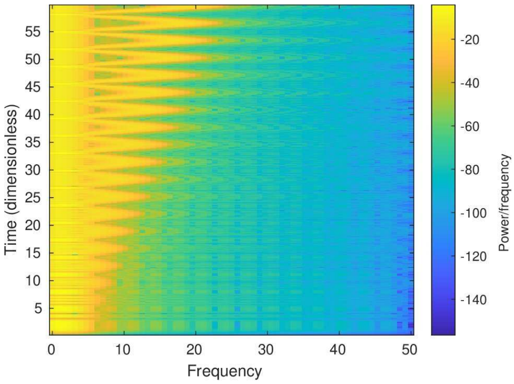
При дальнейшем анализе будем использовать оконную функцию Ханна [11]

$$w(n) = 0.5\left(1-\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right), \tag{3.4}$$

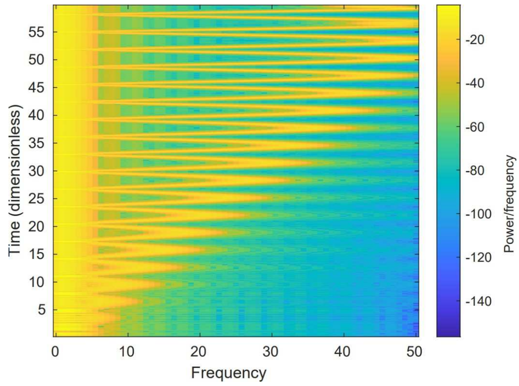
где $n \in \{0, 1, ..., N-1\}$; N – ширина окна.

Для построения спектрограмм использовался пакет MatLab. Частота дискретизации бралась равным 100 отсчётом за одну безразмерную секунду, а ширина окна – 32 отсчетам, т. е. 0.32 безразмерные секунды, области перекрывания 30 отсчётов. Соответственно, в процессе вычисления оконного преобразования Фурье на каждом шаге окно будет сдвигаться на 2 отсчёта. Полученные спектрограммы приведены на рис. 3.1 *a*–*b*.

Поскольку преобразование Фурье является линейным, то параметр Q определяет только амплитуду спектра, так что без ограничения общности его можно положить равным единице. Как видно из Рис. 3.1 *a*–*b*, более важным оказывается параметр D, определяющий ширину спектра сигнала.



a)



b)

Рис. 3.1. Спектрограмма функции $f(t)$: a) $Q = D = 1$; b) $Q = 1$, $D = 3$
Fig 3.1. Spectrogram of the function $f(t)$: a) $Q = D = 1$; b) $Q = 1$, $D = 3$

Проанализировав спектрограммы, мы можем сделать вывод, что для того, чтобы нелинейная система находилась в состоянии резонанса, внешняя сила должна становиться все более и более высокочастотной.

Определим, какое количество энергии сообщает системе (3.2) сила $f(t)$ за время T. Энергию, добавляемую осциллятору силой $f(t)$, будем вычислять по формуле

$$E(T) = \int_0^T f^2(t)dt = \int_0^T Q^2 \sin^4(Dt \sin t)dt.$$

График энергии $E(T)$ приведен на Рис. 3.2.

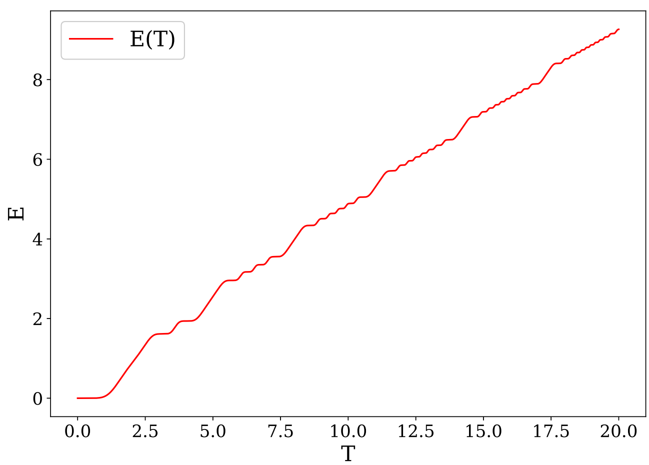


Рис. 3.2. График энергии $E(T)$, получаемая осциллятором с учетом силы $f(t)$, при значении параметров: $Q = D = 1$
Fig 3.2. The graph of the energy $E(T)$ obtained by the oscillator taking into account the force $f(t)$, with the value of the parameters: $Q = D = 1$

Из графика, изображенного на Рис. 3.2, видно, что количество энергии, которую необходимо сообщить системе, будет приблизительно прямо пропорционально времени нахождения системы в резонансе.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Минобрнауки России соглашение № 075-15-2022-1101 (разд. 2) и гранта РНФ 19-12-00253 (разд. 3).

Список литературы

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика : учеб. пособие. — В 10 т. Т. I. Механика. — 4-е изд., испр. М.: Наука; Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 216 с.

2. Ратнер Б. С. Ускорители заряженных частиц. М.: Физматгиз, 1960. 115 с.

3. Kartashova E. Nonlinear resonances of water waves : arXiv preprint. 2009. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.0905.0050

4. Kovriguine D. A., Maugin G. A., Potapov A. I. Multiwave nonlinear couplings in elastic structures // Mathematical Problems in Engineering. 2006. DOI: https://doi.org/10.1155/MPE/2006/76041

5. Fajans J., Friedland L. Autoresonant (nonstationary) excitation of pendulums, Plutinos, plasmas, and other nonlinear oscillators // American Journal of Physics. 2001. Vol. 69, No. 10. C. 1096–1102. DOI: https://doi.org/10.1119/1.1389278

6. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. – 2-е изд., перераб. и испр. М.: Наука, 1981. 918 с.

7. Векслер В. И. Новый метод ускорения релятивистских частиц // Успехи физических наук. 1967. № 11. С. 521–523.

8. Friedland L. Autoresonance in nonlinear systems // Scholarpedia. 2009. DOI: https://doi.org/10.4249/scholarpedia.5473

9. Трубецков Д. И., Рожнев Д. И. Линейные колебания и волны : учеб. пособие для вузов. М.: Физматлит, 2001. 416 с.

10. Юдин М. Н., Фарков Ю. А., Филатов Д. М. Введение в вейвлет-анализ. М.: Изд-во Мос. геологоразвед. академии, 2001. 72 с.

11. Heinzel G., Rüdiger A., Schilling R. Spectrum and spectral density estimation by the Discrete Fourier transform (DFT), including a comprehensive list of window functions and some new at-top windows. 2002.

Поступила 20.07.2022; доработана после рецензирования 15.08.2022; принята к публикации 24.08.2022

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Mechanics, Third Edition: Volume 1 (Course of Theoretical Physics)*, Butterworth-Heinemann, 1976, 200 p.
2. B. S. Ratner, *[Charged particle accelerators]*, Fizmatgiz Publ., Moscow, 1960 (In Russ.), 115 p.
3. E. Kartashova, "Nonlinear resonances of water waves", 2009. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.0905.0050
4. D. A. Kovriguine, G. A. Maugin, A. I. Potapov, "Multiwave nonlinear couplings in elastic structures", *Mathematical Problems in Engineering*, 2006. DOI: https://doi.org/10.1155/MPE/2006/76041
5. J. Fajans, L. Friedland, "Autoresonant (nonstationary) excitation of pendulums, Plutinos, plasmas, and other nonlinear oscillators", *American Journal of Physics*, **69**:10 (2001), 1096–1102. DOI: https://doi.org/10.1119/1.1389278
6. A. A. Andronov, A. A. Witt, S. E. Khaykin, *Theory of Oscillators*, Cambridge University Press, 1966, 815 p.
7. V. I. Wexler, "[A new method for accelerating]", *Uspekhi fizicheskikh nauk*, **93**:11 (1967), 521–523 (In Russ.).
8. L. Friedland, "Autoresonance in nonlinear systems", 2009. DOI: https://doi.org/10.4249/scholarpedia.5473
9. D. I. Trubetskov, D. I. Rozhnev, *[Linear oscillations and waves]*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2001 (In Russ.), 416 p.
10. M. N. Yudin, Yu. A. Farkov, D. M. Filatov, *[Introduction to wavelet analysis]*, Moscow Geological Exploration Academy Publ., Moscow, 2001 (In Russ.), 72 p.
11. Heinzel G., Rüdiger A., Schilling R., "Spectrum and spectral density estimation by the Discrete Fourier transform (DFT), including a comprehensive list of window functions and some new at-top windows", 2002.

Submitted 20.07.2022; Revised 15.08.2022; Accepted 24.08.2022

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.