DOI 10.15507/2079-6900.24.202203.280-288 ISSN 2079-6900 (Print)
Оригинальная статья ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.956.4+517.988.8

Быстро сходящиеся черновские аппроксимации к решению уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности

А. В. Веденин

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

Аннотация. Настоящая работа посвящена новому методу построения аппроксимаций к решению параболического дифференциального уравнения в частных производных. Рассматривается задача Коши для уравнения теплопроводности на прямой с переменным коэффициентом теплопроводности. Построена последовательность функций, которая сходится к решению этой задачи равномерно по пространственной переменной и локально равномерно по времени. Составляющие последовательность функции явно выражены через начальное условие и коэффициент теплопроводности, т.е. через функции, играющие роль параметров. При построении последовательности используются идеи и методы функционального анализа, а именно, теорема Чернова об аппроксимации операторных полугрупп, в силу чего построенные функции называются черновскими аппроксимациями. В большинстве ранее опубликованных работ норма разности между точным решением и черновской аппроксимацией с номером n не превышает $const/n$. Аппроксимации, построенные в работе, являются быстро сходящимися, т. е. для них ошибка убывает быстрее $const/n$. Это следует из теоремы Галкина-Ремизова. Приведены ключевые формулы, явный вид построенных аппроксимаций и схемы доказательств. Полученные в настоящей статье результаты указывают путь к построению быстро сходящихся черновских аппроксимаций для более широкого класса уравнений.

Ключевые слова: задача Коши для уравнения теплопроводности, переменный коэффициент теплопроводности, аппроксимация решения, скорость сходимости к решению, однопараметрические полугруппы операторов, формула Чернова

Для цитирования: Веденин А. В. Быстро сходящиеся черновские аппроксимации к решению уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 3. С. 280–288. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202203.280-288

Об авторе:

Веденин Александр Владимирович, аспирант кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4035-7579, lcsndr@mail.ru

Original article

MSC2020 65M12, 47D06

Fast converging Chernoff approximations to the solution of heat equation with variable coefficient of thermal conductivity

A. V. Vedenin

Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

Abstract. This paper is devoted to a new method for constructing approximations to the solution of a parabolic partial differential equation. The Cauchy problem for the heat equation on a straight line with a variable heat conduction coefficient is considered. In this paper, a sequence of functions is constructed that converges to the solution of the Cauchy problem uniformly in the spatial variable and locally uniformly in time. The functions that make up the sequence are explicitly expressed in terms of the initial condition and the thermal conductivity coefficient, i.e. through functions that play the role of parameters. When constructing functions that converge to the solution, ideas and methods of functional analysis are used, namely, Chernoff's theorem on approximation of operator semigroups, which is why the constructed functions are called Chernoff approximations. In most previously published papers, the error (i. e., the norm of the difference between the exact solution and the Chernoff approximation with number n) does not exceed $const/n$. Therefore, approximations, when using which the error decreases to zero faster than $const/n$, we call fast convergent. This is exactly what the approximations constructed in this work are, as follows from the recently proved Galkin-Remizov theorem. Key formulas, explicit forms of constructed approximations, and proof schemes are given in the paper. The results obtained in this paper point the way to the construction of fast converging Chernoff approximations for a wider class of equations.

Keywords: Cauchy problem for heat equation with variable coefficient of thermal conductivity, approximation of solution, rate of convergence to the solution, one-parameter semigroup of operators, Chernoff product formula

For citation: *A. V. Vedenin.* Fast converging Chernoff approximations to the solution of heat equation with variable coefficient of thermal conductivity. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 24:3(2022), 280–288. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202203.280-288

About the author:
Aleksandr V. Vedenin, Postgraduate Student, Department of Fundamental Mathematics, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4035-7579, lcsndr@mail.ru

1. Введение

Дифференциальные уравнения в частных производных имеют широкое применение в физике, химии, биологии или, например, в инженерии, конструировании материалов. Такие уравнения позволяют воспроизвести математическую модель той или иной системы, естественным образом возникающей в других науках. Таким образом, работы, посвященные решению дифференциальных уравнений в частных производных, становятся все более актуальными. Далеко не все уравнения можно решить аналитически. Подобная задача может быть поставлена таким образом, что становится необходимо применять численные методы. Конечно, многие такие инструменты для применения к дифференциальным уравнениям известны: на основе сетки, метода Галеркина, метода Монте-Карло, на основе итераций (см. [1–3]). Однако, наш метод принципиально новый. Он опирается на такие достижения функционального анализа, как теория C_0-полугрупп [4] и теорема Чернова [5]. Развитие методов, построенных на теореме Чернова, позволяет применять инструменты функционального анализа к приближенному решению дифференциальных уравнений (см., например, работы [6–9]).

2. Постановка задачи

Мы рассматриваем задачу Коши для уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности. С одной стороны, этот пример уже достаточно сложный, чтобы он представлял интерес для численных методов. С другой стороны, относительная простота примера позволяет наглядно и эффективно продемонстрировать наши инструменты для построения решения. Для численных методов важен не только сам факт наличия аппроксимаций к решению и их явное выражение, но и скорость сходимости таких приближений. Мы строим решение в виде так называемых черновских аппроксимаций. Изучение скорости сходимости приближений, основанных на теореме Чернова, начато в работах [10–12]. Мы опираемся на серию работ, возникших изначально из гипотезы, предложенной И. Д. Ремизовым [13]. В работе [15] была сформулирована и доказана теорема Галкина-Ремизова. Именно её вместо оригинальной теоремы Чернова мы используем в нашей работе для того, чтобы найти оценку на скорость сходимости построенных нами черновских аппроксимаций к решению задачи Коши. Сначала введём несколько обозначений, позволяющих записать формулировки теорем более кратко.

Определение 2.1. *Обозначим символом $UC_b(\mathbb{R})$ линейное пространство всех ограниченных и равномерно непрерывных вещественнозначных функций на вещественной прямой. Символом $UC_b^k(\mathbb{R})$ обозначим его подможество, состоящее из всех k раз дифференцируемых функций, все производные которых до порядка k включительно ограничены и равномерно непрерывны. Символ $C_b^\infty(\mathbb{R})$ будем использовать для его подмножества, состоящего из всех ограниченных бесконечно дифференцируемых функций, все производные которых ограниченны. Пространство $UC_b(\mathbb{R})$ рассматривается с его естественной нормой $\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Если $a \in UC_b(\mathbb{R})$ и $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R})$, то для каждого $x \in \mathbb{R}$ зададим функцию $L\varphi$ равенством*

$$(L\varphi)(x) = a(x)\varphi''(x). \tag{2.1}$$

3. Быстро сходящиеся черновские аппроксимации

Первый результат настоящей статьи представлен в следующей теореме

Теорема 3.1. *Используем обозначения из определения 2.1 и предположим, что $a, a', a'' \in UC_b(\mathbb{R})$ и существует такое число $a_0 > 0$, что $a(x) > a_0$ для всех $x \in \mathbb{R}$.*

Для каждых $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, $f \in UC_b(\mathbb{R})$, *положим*

$$(S(t)f)(x) = \frac{2}{3}f(x) + \frac{1}{6}f\left(x + \sqrt{6a(x)t}\right) + \frac{1}{6}f\left(x - \sqrt{6a(x)t}\right) + \\ + a(x)a'(x)t\Big(3f\left(x + \sqrt[3]{t}\right) - 3f\left(x + 2\sqrt[3]{t}\right) + f\left(x + 3\sqrt[3]{t}\right)\Big) + \\ + \frac{1}{2}a(x)a''(x)t\Big(f\left(x + \sqrt{t}\right) + f\left(x - \sqrt{t}\right)\Big) - \Big(a'(x) + a''(x)\Big)a(x)tf(x), \quad (3.1)$$

тогда:

1) замыкание оператора L *из равенства (2.1), заданного на области определения* $D(L) = C_b^\infty(\mathbb{R}) \subset UC_b(\mathbb{R})$, *существует и является генератором* C_0*-полугруппы* $(e^{tL})_{t\geq 0}$ *в* $UC_b(\mathbb{R})$*;*

2) для задачи Коши

$$\begin{cases} u_t'(t,x) = a(x)u_{xx}''(t,x), \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

существует решение $u(t,x)$, *единственное в классе тех ограниченных функций, которые при каждом* $t \geq 0$ *равномерно непрерывны по* $x \in \mathbb{R}$. *Это решение даётся равенством* $u(t,x) = (e^{tL}u_0)(x)$*;*

3. функция $u(t,x)$ *представляется в виде предела сходящихся черновских аппроксимаций:*

$$u(t,x) = (e^{tL}u_0)(x) = \lim_{n\to\infty}\left(S\left(\frac{t}{n}\right)^n u_0\right)(x),$$

где $S\left(\frac{t}{n}\right)$ *получается из* (3.1) *заменой* t *на* t/n, *а* $S\left(\frac{t}{n}\right)^n = \underbrace{S\left(\frac{t}{n}\right)\dots S\left(\frac{t}{n}\right)}_{n}$ *это композиция* n *копий линейного ограниченного оператора* $S\left(\frac{t}{n}\right)$. *Черновскими аппроксимациями решения* $u(t,x)$ *являются функции* $u_n(t,x) = \left(S\left(\frac{t}{n}\right)^n u_0\right)(x)$*;*

4) для каждых $u_0 \in UC_b^6(\mathbb{R})$, $a \in UC_b^4(\mathbb{R})$ *существуют такие константы* $K_{S1}, K_{S2}, \dots, K_{S6} > 0, w_S > 0$, *что при каждом* $t_S > 0$ *скорость сходимости оценивается следующим образом:*

$$\sup_{t\in[0,t_S]}\sup_{x\in\mathbb{R}}|u_n(t,x) - u(t,x)| \leq e^{w_S t_S}\frac{t_S^{7/3}}{n^{4/3}}\sum_{i=0}^{6}K_{Si}\sup_{x\in\mathbb{R}}|u_0^{(i)}(x)|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Приведем схему доказательства. Первый пункт теоремы 3.1 следует из общей теории параболических дифференциальных уравнений и того, что ограниченная функция a удовлетворяет условию $\inf_{x\in\mathbb{R}} a(x) > 0$. Второй пункт теоремы 3.1 следует из первого в силу представления решения дифференциального уравнения с помощью полугруппы (см.[4]).

Третий и четвёртый (а также первый) пункты теоремы 3.1 непосредственно следуют из утверждающей части теоремы 4.2 в [15], которая, в свою очередь, является следствием теоремы Галкина-Ремизова (т. е. теоремы 3.1 в [15], см. также [14]). Приведём ниже предполагающую часть теоремы теоремы 4.2 в [15], т. е. условия, которые надо проверить для оператрно-значной функции S, заданной формулой 3.1.

A1. $a, a', a'' \in UC_b(\mathbb{R})$ и существует такое число $a_0 > 0$, что $a(x) > a_0$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

A2. Для каждых $T_S > 0, f \in UC_b(\mathbb{R})$, $t \in [0, T_S)$ верно, что $\|S(t)\| \leq e^{w_S t}$.

A3. Для каждых $f \in UC_b^6(\mathbb{R})$, $a \in UC_b^4(\mathbb{R})$ существуют вещественные константы $w_S > 0, B_{S1}, B_{S2}, \ldots, B_{S6} > 0$, что выполняется следующее неравенство:

$$\left\| S(t)f - \sum_{k=0}^{2} \frac{t^k L^k f}{k!} \right\| \leq t^{7/3} \sum_{j=0}^{6} B_{Sj} \|f^{(j)}\|.$$

Проверим выполнение условий A1, A2, A3. В самом деле, A1 непосредственно следует из условий теоремы 3.1.

A2 доказываем следующим образом. Имея в виду, что $\|S(t)f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |(S(t)f)(x)|$, и используя свойства супремума, приходим к оценке $\|S(t)f\| \leq (1 + w_S t)\|f\|$, где w_S – вещественная константа, которая зависит от $\|a\|, \|a'\|, \|a''\|$, но не зависит от t и f. В силу сказанного, с учётом определения нормы линейного оператора, приходим к оценке $\|S(t)\| \leq 1 + w_S t \leq e^{w_S t}$. Это завершает проверку условия A2.

Теперь докажем, что A3 тоже верно. Для этого при фиксированном $x \in \mathbb{R}$ разложим $(S(t)f)(x)$ по формуле Тейлора при $t \to 0$, используя разложения для каждого слагаемого в правой части равенства 3.1. Сперва разложим по формуле Тейлора функцию $\tau \mapsto f(x + \tau)$ при $\tau \to 0$ по степеням τ до τ^5 включительно, а остаточный член после пятой производной представим в форме Лагранжа. Это возможно, т. к. $f \in UC_b^6(\mathbb{R})$, следовательно, $f^{(6)} \in UC_b(\mathbb{R})$ согласно 2.1. Полагая теперь $\tau = \sqrt{6a(x)t}$ в первом слагаемом получаем разложение функции $t \mapsto f\left(x + \sqrt{6a(x)t}\right)$ по степеням t при фиксированном x. Поступая аналогично со всеми слагаемыми в правой части равенства 3.1, приводим подобные слагаемые, берём супремум по $x \in \mathbb{R}$ и приходим к оценке $\left\| S(t)f - \sum_{k=0}^{2} \frac{t^k L^k f}{k!} \right\| \leq t^{7/3} \sum_{j=0}^{6} B_{Sj} \|f^{(j)}\|$. Проверка условия A3 завершена.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Как правило, скорость сходимости черновских аппроксимаций не превышает C/n, где C – вещественная константа, n – номер члена последовательности, что приближает решение. Однако некоторые специальные конструкции, благодаря которым построена формула в теореме 3.1, позволяют преодолеть это ограничение.

Также стоит отметить, что наша формула использует только оператор сдвига. Сам по себе такой прием в этой статье не является новым, однако он обладает рядом преимуществ. В частности, благодаря оператору сдвига мы можем строить модификацию нашего основного результата, что дополнительно улучшает скорость сходимости. Второй результат настоящей статьи состоит в следующем.

Т е о р е м а 3.2. *Используем обозначения из определения 2.1 и предположим, что $a, a', a'' \in UC_b(\mathbb{R})$ и существует такое число $a_0 > 0$, что $a(x) > a_0$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Для каждых $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, $f \in UC_b(\mathbb{R})$, положим*

$$\begin{aligned}(G(t)f)(x) = \frac{2}{3}f(x) + \frac{1}{6}f\left(x + \sqrt{6a(x)t}\right) + \frac{1}{6}f\left(x - \sqrt{6a(x)t}\right) - \\ -a(x)a'(x)t\Big(\frac{7}{2}f\left(x + \sqrt[3]{t}\right) + \frac{1}{4}f\left(x - \sqrt[3]{t}\right) - \frac{7}{4}f\left(x + 2\sqrt[3]{t}\right) + \frac{1}{4}f\left(x - 2\sqrt[3]{t}\right) + \frac{1}{4}f\left(x + 3\sqrt[3]{t}\right)\Big) + \\ + \frac{1}{2}a(x)a''(x)t\Big(f\left(x + \sqrt{t}\right) + f\left(x - \sqrt{t}\right)\Big) + \Big(\frac{5}{2}a'(x) - a''(x)\Big)a(x)tf(x). \quad (3.2)\end{aligned}$$

Тогда:

1. Замыкание оператора L *из равенства (2.1), заданного на области определения* $D(L) = C_b^\infty(\mathbb{R}) \subset UC_b(\mathbb{R})$*, существует и является генератором* C_0*-полугруппы* $(e^{tL})_{t\geq 0}$ *в* $UC_b(\mathbb{R})$*.*

2. Для задачи Коши

$$\begin{cases} u_t'(t,x) = a(x)u_{xx}''(t,x), & t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

существует решение $u(t,x)$*, единственное в классе тех ограниченных функций, которые при каждом* $t \geq 0$ *равномерно непрерывны по* $x \in \mathbb{R}$*. Это решение даётся равенством* $u(t,x) = (e^{tL}u_0)(x)$*.*

3. Функция $u(t,x)$ *представляется в виде предела сходящихся черновских аппроксимаций:*

$$u(t,x) = (e^{tL}u_0)(x) = \lim_{n\to\infty} \left(G\left(\frac{t}{n}\right)^n u_0 \right)(x),$$

где $G\left(\frac{t}{n}\right)$ *получается из* (3.2) *заменой* t *на* t/n*, а* $G\left(\frac{t}{n}\right)^n = \underbrace{G\left(\frac{t}{n}\right)\ldots G\left(\frac{t}{n}\right)}_{n}$ *– композиция* n *копий линейного ограниченного оператора* $G\left(\frac{t}{n}\right)$*. Черновскими аппроксимациями решения* $u(t,x)$ *являются функции* $u_n(t,x) = \left(G\left(\frac{t}{n}\right)^n u_0 \right)(x)$*.*

4. Для каждых $u_0 \in UC_b^6(\mathbb{R})$*,* $a \in UC_b^4(\mathbb{R})$ *существуют такие константы* $K_{G1}, K_{G2}, \ldots, K_{G6} > 0, w_G > 0$*, что при каждом* $t_G > 0$ *скорость сходимости оценивается следующим образом:*

$$\sup_{t\in[0,t_G]} \sup_{x\in\mathbb{R}} |u_n(t,x) - u(t,x)| \leq e^{w_G t_G} \frac{t_G^3}{n^2} \sum_{i=0}^{6} K_{Gi}\|f^{(i)}\|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Схема доказательства теоремы 3.2 повторяет схему доказательства теоремы 3.1 с той лишь разницей, что неравенство в условии А3 следующее: $\left\| G(t)f - \sum_{k=0}^{2} \frac{t^k L^k f}{k!} \right\| \leq t^3 \sum_{j=0}^{6} B_{Gj}\|f^{(j)}\|$. Проверяется оно аналогично.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

4. Заключение

Итак, мы построили быстро сходящиеся черновские аппроксимации к решению уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности. Более того, мы показали пример модификации основного результата, благодаря которой мы его улучшили. Таким образом, потенциально мы можем развивать наши методы для повышения скорости сходимости черновских аппроксимаций к решению более сложных и обобщенных уравнений.

Направление систематического изучения скорости сходимости черновских аппроксимаций является молодым. Мы надеемся, что развитие этой области может быть полезно для численных методов решения дифференциальных уравнений в частных производных. В настоящий момент мы можем привести пример подобной работы, которая использует наши инструменты [16]. Несмотря на простоту задач, приводимых в качестве примера, наши методы активно развиваются и дают потенциальную возможность решать намного более сложные уравнения.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Минобрнауки России соглашение № 075-15-2022-1101. Автор благодарит И. Д. Ремизова за постановку задачи и внимание к работе, а также О. Е. Галкина за плодотворные обсуждения.

Список литературы

1. Evans G., Blackledge J., Yardley P. Numerical methods for partial differential equations. London: Springer, 2000. 304 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0377-6

2. Ruas. V. Numerical methods for partial differential equations: an introduction. Wiley, 2016. 376 p.

3. Numerical methods for PDEs: state of the art techniques / ed. by D. A. Di Pietro, A. Ern, L. Formaggia. Cham, Switzerland: Springer, 2018. 330 p.

4. Engel K.-J., Nagel R. One-parameter semigroups for linear evolution equations. New York: Springer, 2000. 589 p. DOI: https://doi.org/10.1007/b97696

5. Chernoff P. R. Note on product formulas for operator semigroups // J. Functional Analysis. 1968. Vol. 2, Issue 2. pp. 238–242. DOI: https://doi.org/10.1016/0022-1236(68)90020-7

6. Butko Ya. A. The method of Chernoff approximation // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. Cham: Springer, 2020. Vol. 325. pp. 19–46. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.1905.07309

7. Remizov I. D. Solution-giving formula to Cauchy problem for multidimensional parabolic equation with variable coefficients // Journal of Mathematical Physics. 2019. Vol. 60, Issue 7. DOI: https://doi.org/10.1063/1.5038102

8. Remizov I. D. Quasi-Feynman formulas a method of obtaining the evolution operator for the Schrödinger equation // J. Funct. Anal. 2016. Vol. 270, No. 12. pp. 4540–4557. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jfa.2015.11.017

9. Gomilko A., Kosowicz S., Tomilov Yu. A general approach to approximation theory of operator semigroups // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. 2019. Vol. 127. pp. 216–267. DOI: https://doi.org/10.1016/j.matpur.2018.08.008

10. Orlov Yu. N., Sakbaev V. Zh., Smolyanov O. G. Rate of convergence of Feynman approximations of semigroups generated by the oscillator Hamiltonian // Theoretical and Mathematical Physics 2012. Vol. 172. pp.987–1000. DOI: https://doi.org/10.1007/s11232-012-0090-x

11. Gomilko A., Tomilov Yu. On convergence rates in approximation theory for operator semigroups // Journal of Functional Analysis 2014. Vol. 266, No. 5. pp. 3040-3082. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jfa.2013.11.012

12. Remizov I. D. On estimation of error in approximations provided by Chernoff's product formula // International Conference 'ShilnikovWorkshop-2018' dedicated to the memory of outstanding Russian mathematician Leonid Pavlovich Shilnikov (1934–2011), book of abstracts. 2018. pp. 38–41.

13. Vedenin A. V., Voevodkin V. S., Galkin V. D., Karatetskaya E. Yu., Remizov I. D. Speed of convergence of Chernoff approximations to solutions of evolution equations // Mathematical Notes. 2020. Vol. 108, No. 3. pp. 451–456. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434620090151

14. Galkin O. E., Remizov I. D. Rate of convergence of Chernoff approximations to C_0-semigroups of operators // Mathematical Notes. 2022. Vol. 111, No. 2. pp. 305–307. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434622010345

15. Galkin O. E., Remizov I. D. Upper and lower estimates for rate of convergence in the Chernoff product formula for semigroups of operators. 2022. 33 p. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2104.01249

16. Prudnikov P. S. Speed of convergence of Chernoff approximations for two model examples: heat equation and transport equation. 2012. 27 p. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2012.09615

Поступила 10.06.2022; доработана после рецензирования 11.08.2022; принята к публикации 24.08.2022

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

References

1. *Numerical methods for partial differential equations*, ed. . by G. Evans, J. Blackledge, P. Yardley, Springer, 2000 DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0377-6, 304 p.

2. V. Ruas., *Numerical methods for partial differential equations: an introduction*, Wiley, 2016., 376 p.

3. *Numerical methods for PDEs: state of the art techniques*, ed. by D. A. Di Pietro, A. Ern, L. Formaggia, Springer, Cham, Switzerland, 2018, 330 p.

4. K.-J. Engel, R. Nagel., *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, Springer, New York, 2000 DOI: https://doi.org/10.1007/b97696, 589 p.

5. P. R. Chernoff, "Note on product formulas for operator semigroups", *J. Functional Analysis*, **2**:2 (1968), 238–242. DOI: https://doi.org/10.1016/0022-1236(68)90020-7

6. Ya. A. Butko, "The method of Chernoff approximation", *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, **325** (2020), 19-46. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.1905.07309

7. I. D. Remizov, "Solution-giving formula to Cauchy problem for multidimensional parabolic equation with variable coefficients", *Journal of Mathematical Physics*, **60**:7 (2019). DOI: https://doi.org/10.1063/1.5038102

8. I. D. Remizov, “Quasi-Feynman formulas a method of obtaining the evolution operator for the Schrödinger equation”, *J. Funct. Anal*, **270**:12 (2016), 4540-4557. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jfa.2015.11.017

9. A.Gomilko, S.Kosowicz, Yu.Tomilov, “A general approach to approximation theory of operator semigroups”, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **127** (2019), 216–267. DOI: https://doi.org/10.1016/j.matpur.2018.08.008

10. Yu. N. Orlov, V. Zh. Sakbaev, O. G. Smolyanov, “Rate of convergence of Feynman approximations of semigroups generated by the oscillator Hamiltonian”, *Theoretical and Mathematical Physics*, **172** (2012), 987–1000. DOI: https://doi.org/10.1007/s11232-012-0090-x

11. A. Gomilko, Yu. Tomilov, “On convergence rates in approximation theory for operator semigroups”, *Journal of Functional Analysis*, **266**:5 (2014), 3040–3082. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jfa.2013.11.012

12. I. D. Remizov, “On estimation of error in approximations provided by chernoff’s product formula”, *International Conference ’ShilnikovWorkshop-2018’ dedicated to the memory of outstanding Russian mathematician Leonid Pavlovich Shilnikov (1934-2011), book of abstracts*, 2018, 38–41.

13. A. V. Vedenin, V. S. Voevodkin, V. D. Galkin, E. Yu. Karatetskaya, I. D. Remizov, “Speed of convergence of Chernoff approximations to solutions of evolution equations”, *Mathematical Notes*, **108**:3 (2020), 451–456. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434620090151

14. O. E. Galkin, I. D. Remizov., “Rate of convergence of Chernoff approximations to C_0-semigroups of operators”, *Mathematical Notes*, **111**:2 (2022), 305–307. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434622010345

15. O. E. Galkin, I. D. Remizov., “Upper and lower estimates for rate of convergence in the Chernoff product formula for semigroups of operators”, 2022, 33 p. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2104.01249

16. P. S. Prudnikov, “Speed of convergence of Chernoff approximations for two model examples: heat equation and transport equation”, 2012, 27 p. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2012.09615

Submitted 10.06.2022; Revised 11.08.2022; Accepted 24.08.2022

The author has read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The author declare no conflict of interest.