DOI 10.15507/2079-6900.24.202202.151-161 ISSN 2079-6900 (Print)
Оригинальная статья ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.62

О численном решении жестких линейных дифференциально-алгебраических уравнений второго порядка

Л. С. Соловарова[1], Т. З. Фыонг[2]

[1] *ФГБУН «Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова» (г. Иркутск, Российская Федерация)*
[2] *Ханойский математический институт Вьетнамской академии наук и технологий (г. Ханой, Вьетнам)*

Аннотация. В данной статье рассмотрены системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью. Такие постановки задач в отечественной и зарубежной литературе принято называть дифференциально-алгебраическими уравнениями. В настоящей работе внимание уделено задачам второго порядка. На основе фактов из теории матричных пучков и полиномов приведены достаточные условия существования и единственности решения данных уравнений. Для их численного решения исследуются многошаговый метод и его вариант, основанный на переформулированной записи исходной задачи. Такое представление позволяет строить методы, матрицы коэффициентов у которых могут рассчитываться в предыдущих точках. Данный подход хорошо зарекомендовал себя при численном решении дифференциально-алгебраических уравнений первого порядка, содержащих жесткие и быстроосциллирующие компоненты и обладающих сингулярным матричным пучком. Предлагаемый в настоящей работе численный алгоритм исследован на устойчивость для известного тестового уравнения. Показано, что данная разностная схема может иметь первый порядок сходимости. Приведены численные расчеты модельной задачи.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраические уравнения второго порядка, жесткие системы, разностные схемы

Для цитирования: Соловарова Л. С., Фыонг Т. З. О численном решении жестких линейных дифференциально-алгебраических уравнений второго порядка // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 2. С. 151–161. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202202.151-161

Об авторах:
Соловарова Любовь Степановна, старший научный сотрудник лаборатории 1.1, ФГБУН «Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова» (664033, Россия, г. Иркутск, ул. Лермонтова, д. 134), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3392-5232, soleilu@mail.ru
Та Зуй Фыонг, доцент, Ханойский математический институт Вьетнамской академии наук и технологий (10307, Вьетнам, г. Ханой, ул. Хоанг Куок Виет Роад, д. 18), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6955-1589, tdphuong@math.ac.vn

Original article

MSC2020 65L80

On the numerical solution of second-order stiff linear differential-algebraic equations

L. S. Solovarova[1], T. D. Phuong[2]

[1] *Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS (Irkutsk, Russian Federation)*
[2] *Institute of Mathematics of the Vietnamese Academy of Science and Technology (Hanoi, Vietnam)*

Abstract. This article addresses systems of linear ordinary differential equations with an identically degenerate matrix in the main part. Such formulations of problems in literature are usually called differential-algebraic equations. In this work, attention is paid to the problems of the second order. Basing on the theory of matrix pencils and polynomials, sufficient conditions for existence and uniqueness of the equations' solution are given. To solve them numerically, authors investigate a multistep method and its version based on a reformulated notation of the original problem. This representation makes it possible to construct methods whose coefficient matrices can be calculated at previous points. This approach has delivered good results in numerical solution of first-order differential-algebraic equations that contain stiff and rapidly oscillating components and have singular matrix pencil. The stability of proposed numerical algorithm is investigated for the well-known test equation. It is shown that this difference scheme has the first order of convergence. Numerical calculations of the model problem are presented.

Keywords: differential algebraic equations of the second order, stiff systems, difference schemes

For citation: *L. S. Solovarova, T. D. Phuong.* On the numerical solution of second-order stiff linear differential-algebraic equations. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 24:2(2022), 151–161. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202202.151-161

About the authors:

Liubov S. Solovarova, Senior Researcher, Laboratory 1.1, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS (134 Lermontova s., Irkutsk 664033, Russia), Ph.D. (Phys.-Math.), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3392-5232, soleilu@mail.ru

Ta Duy Phuong, Associate Professor, Institute of Mathematics of the Vietnamese Academy of Science and Technology, (18 Hoang Quoc Viet Road, Hanoi 10307, Vietnam), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6955-1589, tdphuong@math.ac.vn

1. Введение

Многие технические и природные процессы можно описать взаимосвязанными обыкновенными дифференциальными и алгебраическими уравнениями. Эти системы принято называть дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ). И качественная теория, и теория численных методов для ДАУ развиваются с 1970–1980-х гг. В настоящее время существует огромное количество статей и монографий, посвященных различным аспектам исследования ДАУ(см., например, [1–7]). Несмотря на этот факт, теория численного решения рассматриваемых задач далека до завершения, особенно это касается сложных случаев, например, ДАУ второго и большего порядков. Как правило, для решения таких задач вводят новую kn-мерную вектор-функцию, где k – порядок ДАУ, n – размерность исходной системы. Тогда ДАУ порядка k приводится к первому порядку. Такой подход обладает двумя недостатками: увеличение размерности получаемой задачи и ухудшение ее свойств. Кроме того, к настоящему времени опубликовано крайне ограниченное количество статей, посвященных численному решению ДАУ высокого порядка. Приведем некоторые из них: работа [8] посвящена применению неявного метода Эйлера для рассматриваемых задач, а в [9] для их исследования используется техника проекторов.

Поскольку ДАУ высокого порядка – интересный для изучения и востребованный в приложениях объект, но при этом теория его численного решения развита недостаточно, вполне естественно для разработки таких алгоритмов использовать результаты, полученные для рассматриваемых задач первого порядка. Для численного решения ДАУ первого порядка высокого индекса и задач, содержащих жесткие компоненты, зарекомендовал себя подход, основанный на иной записи исходной задачи [10]. Настоящая работа посвящена анализу данной техники для ДАУ второго порядка.

2. Постановка задачи и определения

Рассмотрим задачу

$$A(t)x^{''}(t) + B(t)x^{'}(t) + C(t)x(t) = f(t),\ t \in [0, 1], \tag{2.1}$$

$$x(0) = x_0, x^{'}(t)|_{t=0} = x_0^{'}, \tag{2.2}$$

где $A(t), B(t), C(t)$ – $(n \times n)$-матрицы; $f(t)$ и $x(t)$ – заданная и искомая n-мерные вектор-функции, соответственно; $x_0, x_0^{'} \in R^n$. Здесь и далее предполагается, что

$$det A(t) \equiv 0. \tag{2.3}$$

Систему (2.1) с условием (2.3) принято называть дифференциально-алгебраическими уравнениями второго порядка (ДАУ2). Предполагается, что начальные условия (2.2) согласованы с правой частью (заданы корректно), то есть рассматриваемая задача имеет решение. Под решением мы понимаем любую дифференцируемую вектор-функцию, которая обращает (2.1) в тождество и удовлетворяет условиям (2.2).

Большую роль при исследовании ДАУ первого порядка играет теория регулярных матричных пучков [6], [11–12]. Для дальнейшего изложения нам потребуются определения и вспомогательные результаты.

Определение 2.1. [11] *Выражение вида $\lambda A + B$, где λ – скалярный параметр, A и B – матрицы размера $(m \times n)$, называют матричным пучком. Если $m = n$ и $det(\lambda A + B) \not\equiv 0$, где λ – скаляр, то пучок матриц $\lambda A + B$ называется регулярным. В противном случае ($m \neq n$ или $det(\lambda A + B) \equiv 0$, $\forall \lambda$) пучок называется сингулярным.*

Определение 2.2. [6] *Пучок матриц $\lambda A(t) + B(t)$ удовлетворяет критерию “ранг–степень” на отрезке $[0, 1]$, если $\operatorname{rank} A(t) = k = \mathrm{const}$, и*

$$\det (\lambda A(t) + B(t)) = a_0(t)\lambda^k + a_1(t)\lambda^{k-1} + \ldots + a_k(t), \quad a_0(t) \neq 0\ \forall t \in [0, 1].$$

О п р е д е л е н и е 2.3. [13] *Матричный полином $\lambda A(t) + \mu B(t) + C(t)$, где λ, μ – скалярные параметры, имеет простую структуру на отрезке $[0, 1]$, если*

1) $rank A(t) = k = const\ \forall t \in [0, 1]$;

2) $rank(A(t)|B(t)) = k + l = const\ \forall t \in [0, 1]$;

3) $\det(\lambda A(t) + \mu B(t) + C(t)) = a_0(t)\lambda^k \mu^l + \cdots,\ a_0(t) \neq 0\ \forall t \in [0, 1]$.

Относительно существования и единственности решения задачи (2.1) – (2.2) справедлива

Т е о р е м а 2.1. [13] *Пусть для задачи (2.1) – (2.2) выполнены следующие условия:*

1) матричный полином $\lambda A(t) + \mu B(t) + C(t)$ имеет простую структуру на $[0, 1]$;

2) элементы входных данных обладают достаточной гладкостью (из класса $C^2_{[0,1]}$);

3) начальные условия (2.2) согласованы с правой частью (2.1) (заданы корректно).

Тогда задача (2.1) – (2.2) имеет единственное решение из класса $C^2_{[0,1]}$.

В следующем параграфе приведем построение многошаговых методов для решения задачи (2.1) – (2.2).

3. Многошаговые схемы и их модификация

Зададим на отрезке интегрирования равномерную сетку

$$t_i = i\,h, \quad i = 0, 1, \ldots, N, \quad h = 1/N$$

и обозначим

$$A_i = A(t_i),\ B_i = B(t_i),\ C_i = C(t_i),\ f_i = f(t_i),\ x_i \approx x(t_i).$$

Предполагается, что $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ заранее вычислены (x_0 задано из (2.2)).

Приведем простейшую неявную двухшаговую разностную схему

$$A_{i+1}(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) + h\,B_{i+1}(x_{i+1} - x_i) + h^2 C_{i+1} x_{i+1} = h^2 f_{i+1}. \tag{3.1}$$

В работе [14] доказана сходимость данной схемы к точному решению со скоростью $O(h)$, если выполнены условия:

1) матрица $B(t) \equiv 0$;

2) пучок матриц $\lambda A(t) + C(t)$ удовлетворяет критерию „ранг-степень“;

3) элементы матриц $A(t)$, $B(t)$ и вектор-функции $f(t)$ принадлежат классу $C^2_{[0,1]}$;

4) стартовые значения x_0,x_1 удовлетворяют $\|x_0 - x(0)\| = O(h)$, $\|x_1 - x(h)\| = O(h)$.

Если у системы (2.1) матрица $A(t) \equiv 0$, то матричный полином $\lambda A(t) + \mu B(t)+$ $+C(t)$ простой структуры будет матричным пучком $\mu B(t) + C(t)$, который удовлетворяет «ранг – степень». Это следует из статьи [13]. В этом случае схема (3.1) после сокращения обеих частей на h станет неявной схемой Эйлера

$$B_{i+1}(x_{i+1} - x_i) + hC_{i+1}x_{i+1} = hf_{i+1}. \tag{3.2}$$

Данная схема для ДАУ первого порядка, у которой матричный пучок $\mu B(t)+C(t)$ удовлетворяет «ранг – степень», хорошо исследован (см., напр., [6],[15] и приведенную там библиографию) на предмет устойчивости и сходимости. Также данная схема неплохо зарекомендовала себя для жестких обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) (см., напр., [3]).

Также перед ее анализом отметим следующий факт. Продолжительное время считалось, что для численного решения линейных ДАУ первого порядка

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) = f(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0, 1],$$

у которых матричный пучок $\lambda A(t) + B(t)$ удовлетворяет критерию «ранг – степень» можно с успехом применять неявные схемы, разработанные для численного решения жестких ОДУ.

Однако в 2002 г. [15] был построен пример жесткой линейной системы ДАУ, для которой применение неявной схемы Эйлера требовало существенного ограничения на шаг интегрирования. В противном случае данная схема становилась неустойчивой. Позже [16] были построены другие примеры жестких ДАУ индекса один, для численного решения которых A-устойчивые методы также требовали ограничения на шаг интегрирования.

Ниже мы приведем пример жесткой и (или) быстроосцилирующей задачи (2.1) – (2.2), для численного решения которой также простейшие неявные методы требуют ограничения на шаг интегрирования.

Рассмотрим тестовое уравнение

$$x'' + ax' + bx = 0, \quad x(0) = x_0, \quad x'(t)|_{t=0} = x'_0, \quad t \in [0, 1], \tag{3.3}$$

где a и b — вещественные скалярные параметры,

$$a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad a + b >> 0, \tag{3.4}$$

и на нем проведем исследование на предмет устойчивости схемы (3.1).

Обозначим

$$z = a\,h, \quad y = b\,h^2.$$

Схема (3.1) для задачи (3.3) дает соотношения

$$(1 + z + y)x_{i+1} - (2 + z)x_i + x_{i-1} = 0, \tag{3.5}$$

которым соответствует характеристическое уравнение

$$(1 + z + y)p^2 - (2 + z)p + 1 = \alpha p^2 + \beta p + \delta = 0. \tag{3.6}$$

Оценим, при каких значениях z, y корни характеристического уравнения (3.6) лежат в единичном круге. Далее поступим стандартным образом [17]. Произведем замену переменной $p = \dfrac{q+1}{q-1}$, которая отображает круг единичного радиуса комплексной плоскости с центром в начале координат в левую полуплоскость, получим

$$(\alpha + \beta + \delta)q^2 + 2(\alpha - \delta)q + (\alpha - \beta + \delta) = 0. \tag{3.7}$$

Данный полином будет иметь корни, лежащие в левой полуплоскости (следовательно, корни (3.6) лежат в единичном круге), если коэффициенты (3.7) имеют одинаковый знак (критерий Рауса–Гурвица ([17]). В нашем случае

$$\alpha = 1 + z + y, \quad \beta = -(2 + z), \quad \delta = 1,$$

$$\alpha + \beta + \delta = y \geq 0,$$

$$\alpha - \delta = z + y > 0,$$

$$\alpha - \beta + \delta = 4 + 2z + y > 0,$$

т. е. схема (3.1) будет устойчива для задачи (3.3) с параметрами (3.4).

Проанализируем поведение данной схемы на модельном примере. Рассмотрим ДАУ вида

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}'' + \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} 0 & d \\ 1 & t+\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

$$t \in [0,1], \ u(0) = u_0, \ v(0) = v_0, \ u'(t)|_{t=0} = u'_0, \ v'(t)|_{t=0} = v'_0,$$

где c, d, ε — скалярные вещественные параметры; $(u(t), v(t))^T = x(t)$; начальные данные удовлетворяют третьему условию теоремы 2.1. Легко заметить, что при $\varepsilon \neq 0$ матричный полином $\lambda^2 A(t) + \lambda B(t) + C(t)$ имеет простую структуру, т. е. задача (3.8) удовлетворяет всем условиям теоремы 2.1. Из второго уравнения (3.8) имеем

$$u(t) = -(t + \varepsilon)v(t).$$

Подставив это выражение в первое уравнение (3.8), получим

$$-\varepsilon v''(t) + (c - 2)v'(t) + d\,v = 0.$$

Данное уравнение будет жестким и (или) быстроосцилирующим, если $c \leq 2, \ d < 0, \ 0 < \varepsilon << 1$. Применим для данного примера схему (3.1), которая является устойчивой для модельной задачи (3.3), полагая $v_0, \ v_1$ заданными и $u_0 = -\varepsilon v_0, \ u_1 = -(h + \varepsilon)v_1$. Получим

$$\begin{pmatrix} 1 & t_{i+1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} \\ v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1} \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i+1} - u_i \\ v_{i+1} - v_i \end{pmatrix} + \tag{3.9}$$

$$+ h^2 \begin{pmatrix} 0 & d \\ 1 & t_{i+1} + \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i+1} \\ v_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Из второго уравнения (3.9) имеем

$$u_{i+1} = -(t_{i+1} + \varepsilon)v_{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Подставляя эти выражения в первое уравнение (3.9) и опуская элементарные выкладки, получим

$$(-\varepsilon + h\,c + h^2 d)v_{i+1} + (2\varepsilon - 2\,h - h\,c)v_i + (2\,h - \varepsilon)v_{i-1} = 0.$$

По аналогии с исследованным характеристическим уравнением (3.6), выпишем характеристический полином для данного уравнения. Получим

$$h^2\,d\,q^2 + (h^2\,d + (c-2)\,h)q + 2h(2 + c) + h^2\,d - 4\varepsilon = 0,$$

$h^2\, d \le 0$ и $h^2\, d + (c-2)\, h < 0$ в силу постановки задачи, следовательно,

$$d\, h^2 + (4+2\varepsilon)h - 4\varepsilon \le 0.$$

Таким образом, схема (3.1) для примера (3.9) будет устойчива только при ограничении на шаг интегрирования $h \in (0, h_1)$, где h_1 — положительный корень уравнения

$$d\, \overline{h}^2 + (4+2\varepsilon)\overline{h} - 4\varepsilon = 0.$$

Приведем модификацию схемы (3.1). Перепишем ДАУ (2.1) в виде

$$(A(t)x(t))'' + [(B(t) - 2A'(t))x(t)]' + (C(t) + A''(t) - B'(t))x(t) = f(t) \tag{3.10}$$

и уже для такой записи применим двушаговую схему типа (3.1):

$$\begin{gathered}(A_{i+1}x_{i+1} - 2A_i x_i + A_{i-1}x_{i-1}) + h\,(B_{i+1} - 2{A'}_{i+1})x_{i+1} - h(B_i - 2{A'}_i)x_i + \\ + h^2(C_{i+1} + {A''}_{i+1} - {B'}_{i+1})x_{i+1} = (A_{i+1} - 2h{A'}_{i+1} + h^2{A''}_{i+1})x_{i+1} + \\ + (-2A_i + 2h{A'}_i)x_i + A_{i-1}x_{i-1} + h(B_{i+1} - h{B'}_{i+1})x_{i+1} - hB_i x_i + h^2 C_{i+1}x_{i+1} = \\ = h^2 f_{i+1}.\end{gathered} \tag{3.11}$$

В силу гладкости входных элементов имеем

$$\begin{gathered}A_{i+1} - 2h{A'}_{i+1} + h^2{A''}_{i+1} = (A_{i+1} - h{A'}_{i+1}) - h({A'}_{i+1} - h{A''}_{i+1}) \approx A_i - hA_i^{'} \approx A_{i-1}, \\ -2A_i + 2h{A'}_i = -2(A_i - h{A'}_i) \approx -2A_{i-1}, \\ B_{i+1} - h{B'}_{i+1} \approx B_i.\end{gathered}$$

С учетом последних трех формул разностную схему (3.11) перепишем в виде

$$A_{i-1}(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) + h\, B_i(x_{i+1} - x_i) + h^2 C_{i+1}x_{i+1} = h^2 f_{i+1}. \tag{3.12}$$

Применим схему (3.12) для ДАУ (3.8). Имеем

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix} 1 & t_{i-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} \\ v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1} \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{i+1} - u_i \\ v_{i+1} - v_i \end{pmatrix} + \\ + h^2\begin{pmatrix} 0 & d \\ 1 & t_{i+1} + \varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{i+1} \\ v_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{gathered}$$

Выкладки, аналогичные выкладкам, проведенным для схемы (3.9), дают соотношения

$$\begin{gathered}u_{i+1} = -(t_{i+1} + \varepsilon)v_{i+1}, \\ (h(c-2) - \varepsilon + h^2 d)v_{i+1} + (h(2-c) + 2\varepsilon)v_i - \varepsilon v_{i-1} = \alpha v_{i+1} + \beta v_i + \delta v_{i-1}.\end{gathered} \tag{3.13}$$

Выписывая для (3.13) характеристический полином (3.7) и опуская несложные выкладки, получим

$$h^2\, d\, q^2 + 2(h(c-2) + h^2 d)q + (h^2 d + 2h(c-2) - 4\varepsilon) = 0. \tag{3.14}$$

В силу условий задачи ($c \le 2,\ d < 0,\ 0 < \varepsilon << 1$) коэффициенты полинома (3.14) будут отрицательными, следовательно, корни (3.14) лежат в левой полуплоскости, а это означает, что разностное соотношение (3.13) будет устойчивым, т. к. $p = \dfrac{q+1}{q-1}$.

4. Численные расчеты

Применим разностную схему (3.12) для уравнения (3.8) со значениями параметров $c = 1$, $d = -2$, $\epsilon = 0.0001$.

Точное решение уравнения (3.8) имеет вид

$$u(t) = -(t + 0.0001)(C_1 \exp^{-2t} + C_2 \exp^{-9998t}), \quad v(t) = C_1 \exp^{-2t} + C_2 \exp^{-9998t}.$$

Результаты расчетов представлены в таблице 4.1.

Таблица 4.1. Результаты применения разностной схемы (3.12) для задачи (3.8) с параметрами $c = 1$, $d = -2$, $\epsilon = 0.0001$

Table 4.1. Results of application of difference scheme (3.12) for problem (3.8) with parameters $c = 1$, $d = -2$, $\epsilon = 0.0001$

h	0.2	0.1	0.05	0.025	0.0125
err_u	0.03898	0.02309	0.012234	0.0058892	0.0021357
err_v	0.04215	0.02737	0.012233	0.0058886	0.0021355

Здесь $err_u = \max\limits_{1\le i\le N} |u_i - u(t_i)|$, $err_v = \max\limits_{1\le i\le N} |v_i - v(t_i)|$.

Из данных таблицы можно сделать вывод, что для рассматриваемой тестовой задачи при уменьшении шага в два раза, погрешность также уменьшается примерно в два раза. Таким образом, разностная схема (3.12), как и (3.1), может иметь первый порядок сходимости.

5. Заключение

В данной работе проанализированы многошаговые разностные схемы первого порядка для линейных дифференциально-алгебраических уравнений второго порядка, содержащих жесткие компоненты. Первая из них основана на простейшей дискретизации, вторая – на иной записи (2.1). Применение таких алгоритмов позволяет избежать редукции рассматриваемой задачи к ДАУ первого порядка, которая приводит к потере информации об исходной системе и увеличению ее размерности. В дальнейшем планируется обосновать данные алгоритмы и рассмотреть другие варианты их построения.

Благодарности. Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов 20-51-54003, 20-51-S52003 и проекта сотрудничества Вьетнам-Россия QTRU 01.08/20-21.

Список литературы

1. Бояринцев Ю. Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1980. 222 с.

2. Brenan K. F., Campbell S. L., Petzold L. R. Numerical solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations. Philadelphia: SIAM, 1996. 270 p.

3. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений: Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. Москва: Мир, 1999. 688 с.

4. 4. Lamour R., März R., Tischendorf C. Differential-algebraic equations: a projector based analysis. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2013. 649 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-27555-5_7

5. Афанасьева М. Н., Кузнецов Е. Б. Метод непрерывного продолжения по параметру при решении краевых задач для нелинейных систем дифференциально-алгебраических уравнений с запаздыванием, имеющих особые точки // Итоги науки и техн. Серия «Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.» 2021. Т. 192. С. 38–45.DOI: https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-192-38-45

6. Чистяков В. Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. Новосибирск: Наука, 1996. 280 с.

7. Чистяков В. Ф. О сохранении типа устойчивости разностных схем при решении жестких дифференциально-алгебраических уравнений // Сиб. журн. вычисл. матем. 2011. Т.14, №4. С. 443–456. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995423911040082

8. Sand J. On implicit Euler and related methods for high-order high-index DAEes // Applied Numerical Mathematics.2002. No. 42. pp.411–424. DOI: https://doi.org/10.1016/S0168-9274(01)00164-7

9. Mehrmann V., Shi C. Transformation of high order linear differential-algebraic systems to first order // Numerical Algorithms. 2006. No. 42. pp.281–307. DOI: https://doi.org/10.1007/s11075-006-9030-x

10. Булатов М. В., Ли Минг Гонг, Соловарова Л. С. О разностных схемах первого и второго порядков для дифференциально-алгебраических уравнений индекса не выше двух // Журнал вычисл. математики и матем. физики. 2010. Т. 50, №11. С. 1909–1918. DOI: https://doi.org/10.1134/S0965542510110047

11. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1986. 581 с.

12. Бояринцев Ю. Е., Орлова И. В. Пучки матриц и алгебро-дифференциальные системы. Новосибирск: Наука, 2006. 124 с.

13. Булатов М. В., Минг-Гонг Ли. Применение матричных полиномов к исследованию линейных дифференциально-алгебраических уравнений высокого порядка // Дифференциальные уравнения. 2008. Т.44, № 10. С. 1299–1306. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266108100017

14. Чистяков В. Ф. О расширении линейных систем, не разрешенных относительно производных. Препринт ИрВЦ СО АН СССР № 5. Иркутск, 1986.

15. März R. Differential-algebraic systems anew // Appl. Numer.Math. 2002. Vol. 42. pp. 315-335. DOI: https://doi.org/10.18452/2660

16. Kunkel P., Mehrmann V. Stability properties of differential-algebraic equations and spin-stabilized diskretizations // Electr. Trans. Numer. Analys. 2007. Vol. 26. pp. 385–420.

17. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир. 1990. 512 с.

Поступила 27.03.2022; доработана после рецензирования 26.04.2022; принята к публикации 25.05.2022

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. Yu. E. Boyarintsev, *[Regular and singular systems of ordinary differential equations]*, Nauka Publ., Novosibirsk, 1980 (In Russ.), 222 p.

2. K. F. Brenan, S. L. Campbell, L. R. Petzold, *Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations*, SIAM, Philadelphia, 1996, 270 p.

3. E. Hairer, G. Wanner, *Solving ordinary differential equations II: stiff and differential-algebraic problems*, Springer-Verlag, Berlin, 1996, 614 p.

4. R. Lamour, R. März , C. Tischendorf, *Differential-algebraic equations: A projector based analysis*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2013, 649 p.

5. M. N. Afanaseva, E. B. Kuznetsov, "The method of continuous continuation by a parameter for solving boundary-value problems for nonlinear systems of differential-algebraic equations with delay that have singular points", *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz.*, **192** (2021), 38–45 (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-192-38-45

6. V. F. Chistyakov, *[Algebraic differential operators with a finite-dimensional kernel]*, Nauka Publ., Novosibirsk, 1996 (In Russ.), 280 p.

7. V. F. Chistyakov, "Preservation of stability type of difference schemes when solving stiff differential algebraic equations", *Numer. Analys. Appl.*, **4** (2011), 363–375. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995423911040082

8. J. Sand, "On implicit Euler and related methods for high-order high-index DAEes", *Applied Numerical Mathematics*, **42** (2002), 411–424. DOI: https://doi.org/10.1016/S0168-9274(01)00164-7

9. V. Mehrmann, C. Shi, "Transformation of high order linear differential-algebraic systems to first order", *Numerical Algorithms*, **42** (2006), 281–307. DOI: https://doi.org/10.1007/s11075-006-9030-x

10. M. V. Bulatov, Ming-Gong Lee, L. S. Solovarova, "On first- and second-order difference schemes for differential-algebraic equations of index at most two", *Comput. Math. and Math. Phys.*, **50** (2010), 1808–1817. DOI: https://doi.org/10.1134/S0965542510110047

11. F. Gantmacher, *The theory of matrices*, Chelsea Publishing Company, New York, 1959, 337 p.

12. Yu. E. Boyarintsev, I. V. Orlova, *[Pencil matrix and algebraic-differential systems]*, Nauka Publ., Novosibirsk, 2006, 124 p.

13. M. V. Bulatov, M.-G. Lee, “Applications of matrix polynomials to the analysis of linear differential-algegraic equations of higher order”, *Differential Equations*, **44** (2008), 1353–1360. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266108100017

14. V. F. Chistyakov, *[On the extension of linear systems that are not resolved with respect to derivatives]*, IRC SB AS USSR, Irkutsk, 1986 (In Russ.), 25 p.

15. R. Marz, “Differential-algebraic systems anew”, *Appl. Numer. Math.*, **42** (2002), 315–335. DOI: https://doi.org/10.18452/2660

16. P. Kunkel, V. Mehrmann, “Stability properties of differential-algebraic equations and spin-stabilized diskretizations”, *Electr. Trans. Numer. Analys.*, **26** (2007), 385–420.

17. E. Hairer, G. Wanner, S. P. Norsett, *Solving ordinary differential equations I: Nonstiff problems*, Springer-Verlag, Berlin, 1987, 539 p.

Submitted 27.03.2022; Revised 26.04.2022; Accepted 25.05.2022

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.