DOI 10.15507/2079-6900.24.202201.54-65 ISSN 2079-6900 (Print)
Оригинальная статья ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 515.163

Классификация надстроек над декартовыми произведениями меняющих ориентацию диффеоморфизмов окружности

С. Х. Зинина[1], П. И. Починка[2]

[1] *ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (г. Саранск, Российская Федерация)*
[2] *Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)*

Аннотация. В настоящей статье вводится класс G декартовых произведений грубых преобразований окружности, меняющих ориентацию, и изучается их динамика. Как известно из работы А. Г. Майера, неблуждающее множество меняющего ориентацию диффеоморфизма окружности состоит из $2q$ периодических точек, где q – натуральное число. Поэтому декартово произведение двух таких диффеоморфизмов имеет $4q_1q_2$ периодических точек, где q_1 соответствует первому преобразованию, а q_2 – второму. Авторами описываются все возможные виды множества этих точек, состоящего из $2q_1q_2$ седловых точек, q_1q_2 стоков и q_1q_2 источников; при этом 4 точки являются неподвижными, а остальные имеют период 2. В теории гладких динамических систем весьма полезной является конструкция, позволяющая по данному диффеоморфизму f многообразия построить поток на многообразии с размерностью на единицу большей; этот поток носит название надстройки над f. Авторами вводится понятие надстройки над диффеоморфизмами класса G, описываются всевозможные виды и число орбит надстройки. Кроме того, доказывается теорема о топологии многообразия, на котором задана надстройка: несущее многообразие рассматриваемых потоков гомеоморфно замкнутому 3-многообразию $\mathbb{T}^2 \times [0,1]/\varphi$, где $\varphi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$. Основной результат работы гласит, что для топологической эквивалентности надстроек над диффеоморфизмами класса G необходима и достаточна топологическая сопряженность диффеоморфизмов, над которыми берутся надстройки. Идея доказательства заключается в том чтобы показать, что из топологической эквивалентности двух надстроек ϕ^t и ϕ'^t следует топологическая сопряженность ϕ и ϕ'.

Ключевые слова: грубые системы дифференциальных уравнений, грубые преобразования окружности, меняющие ориентацию преобразования окружности, декартово произведение преобразований окружности, надстройка над диффеоморфизмом

Для цитирования: Зинина С. Х., Починка П. И. Классификация надстроек над декартовыми произведениями меняющих ориентацию диффеоморфизмов окружности // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 1. С. 54–65. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202201.54-65

Об авторах:

Зинина Светлана Халиловна, аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68/1), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3002-281X, kapkaevasvetlana@yandex.ru

Починка Павел Ильич, студент факультета информатики, математики и компьютерных наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

© *С. Х. Зинина, П. И. Починка*

Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.
This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License.

(603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6377-747X, pavel-pochinka@yandex.ru

Original article

MSC2020 57N10

Classification of suspensions over cartesian products of orientation-reversing diffeomorphisms of a circle

S. Kh. Zinina[1], P. I. Pochinka[2]

[1] *National Research Mordovia State University (Saransk, Russian Federation)*
[2] *Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russian Federation)*

Abstract. This paper introduces class G containing Cartesian products of orientation-changing rough transformations of the circle and studies their dynamics. As it is known from the paper of A.G. Maier non-wandering set of orientation-changing diffeomorphism of the circle consists of $2q$ periodic points, where q is some natural number. So Cartesian products of two such diffeomorphisms has $4q_1q_2$ periodic points where q_1 corresponds to the first transformation and q_2 corresponds to the second one. The authors describe all possible types of the set of periodic points, which contains $2q_1q_2$ saddle points, q_1q_2 sinks, and q_1q_2 sources; 4 points from mentioned $4q_1q_2$ periodic ones are fixed, and the remaining $4q_1q_2 - 4$ points have period 2. In the theory of smooth dynamical systems, a very useful result is that, given a diffeomorphism f of a manifold, one can construct a flow on a manifold with dimension one greater; this flow is called the suspension over f. The authors introduce the concept of suspension over diffeomorphisms of class G, describe all possible types of suspension orbits and the number of these orbits. Besides that, the authors prove a theorem on the topology of the manifold on which the suspension is given. Namely, the carrier manifold of the flows under consideration is homeomorphic to the closed 3-manifold $\mathbb{T}^2\times[0,1]/\varphi$, where $\varphi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$. The main result of the paper says that suspensions over diffeomorphisms of the class G are topologically equivalent if and only if corresponding diffeomorphisms are topologically conjugate. The idea of the proof is to show that the topological equivalence of the suspensions ϕ^t and ϕ'^t implies the topological conjugacy of ϕ and ϕ'.

Keywords: rough systems of differential equations, rough circle transformations, orientation-reversing circle transformations, Cartesian product of circle transformations, suspension over a diffeomorphism

For citation: *S. Kh. Zinina, P. I. Pochinka.* Classification of suspensions over cartesian products of orientation-reversing diffeomorphisms of a circle. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 24:1(2022), 54–65. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202201.54-65

About the authors:
Svetlana Kh. Zinina, Postgraduate Student, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3002-281X, kapkaevasvetlana@yandex.ru
Pavel I. Pochinka, Student of the Faculty of Informatics, Mathematics and Computer Science, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6377-747X, pavel-pochinka@yandex.ru

1. Введение

В 1937 г. А. А. Андронов и Л. С. Понтрягин в работе [1] ввели понятие грубой системы дифференциальных уравнений на плоскости, которая имеет конечное число состояний равновесия и предельных циклов, причем все они являются гиперболическими и не существует траекторий, идущих из седла в седло. В 1939 г. А. Г. Майером [2] было введено понятие грубости для динамических систем с дискретным временем на окружности, в рамках доказательства грубости и типичности диффеоморфизмов Морса-Смейла на окружности были изучены грубые преобразования окружности, описана их динамика и получена топологическая классификация. В частности, им были рассмотрены меняющие ориентацию преобразования окружности и доказано, что они имеют четное число периодических точек, половина из которых является стоковыми, половина – источниковыми, при этом в точности две точки являются неподвижными, а все остальные имеют период 2. Класс топологической сопряженности такого диффеоморфизма полностью определяется числом периодических точек и типом неподвижных точек.

Из работы [3] известно, что произведения меняющих ориентацию грубых преобразований окружностей топологически сопряжены тогда и только тогда, когда сопряжены диффеоморфизмы на каждой компоненте декартового произведения. В работе [4] получена полная топологическая классификация n-мерных декартовых произведений грубых преобразований окружности.

В 1959 г. М. М. Пейшото [5] обобщил результаты А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина на произвольные замкнутые поверхности, отказавшись от требования близости к тождественному отображению для гомеоморфизма, сопрягающего динамику близких систем, ввел понятие «структурной устойчивости». После этих работ гиперболическая теория стала активно развиваться. Ч. Мане [6] и К. Робинсоном [7] получен критерий структурной устойчивости произвольных диффеоморфизмов на многообразиях. С. Смейлом, Дж. Палисом, В. ди Мелу в работах [8–11] построена теория простейших структурно устойчивых систем. В работе [12] представлено систематизированное изложения систем Морса-Смейла. Новый подход к классификации сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла на ориентируемой поверхности изложен в работе [13].

В теории гладких динамических систем полезной является конструкция, позволяющая по данному диффеоморфизму f многообразия построить поток на многообразии с размерностью на единицу большей, этот поток носит название надстройки над f.

В работе [14] рассмотрены надстройки над диффеоморфизмами Морса–Смейла с тремя периодическими орбитами. Несложно показать, что надстройки над топологически сопряженными диффеоморфизмами являются топологически эквивалентными потоками. Обратное в общем случае неверно. Из работы [15] следует, что существуют эквивалентные потоки, являющиеся надстройками над топологически несопряженными грубыми сохраняющими ориентацию диффеоморфизмами. В то же время надстройки над меняющими ориентацию диффеоморфизмами окружностей эквивалентны тогда и только тогда, когда топологически сопряжены диффеоморфизмы окружностей. В настоящей работе авторами доказывается, что надстройки над декартовыми произведениями меняющих ориентацию грубых преобразований окружностей топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда сопряжены соответствующие диффеоморфизмы торов. Заметим, что несущее многообразие рассматриваемых потоков гомеоморфно замкнутому 3-многообразию $\mathbb{T}^2 \times [0,1]/\varphi$, где $\varphi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ – алгебраический автоморфизм тора, заданный матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $(x, 1) \sim (\varphi(x), 0)$.

2. Меняющие ориентацию грубые преобразования окружности

А. Г. Майером в работе [2] были изучены грубые преобразования окружности в рамках доказательства грубости и типичности диффеоморфизмов Морса-Смейла на окружности, приведем лишь некоторые из его классификационных результатов, касающихся меняющих ориентацию грубых преобразований окружности. В работе [16] приведено современное изложение топологической классификации грубых преобразований окружности.

Предложение 2.1. *Пусть $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ — меняющий ориентацию диффеоморфизм окружности. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Множество $Per(f)$ состоит из $2q$ ($q \in \mathbb{N}$) периодических точек, две из которых являются неподвижными, а остальные имеют период 2.*

   Положим $\nu = -1$, если неподвижные точки f являются источниковыми; $\nu = 0$, если неподвижные точки f – стоковые и источниковые; $\nu = +1$, если неподвижные точки f – стоковые. При этом если $\nu = 0$, то q — нечетное, в остальных случаях q — четное (см. Рис. 2.1).

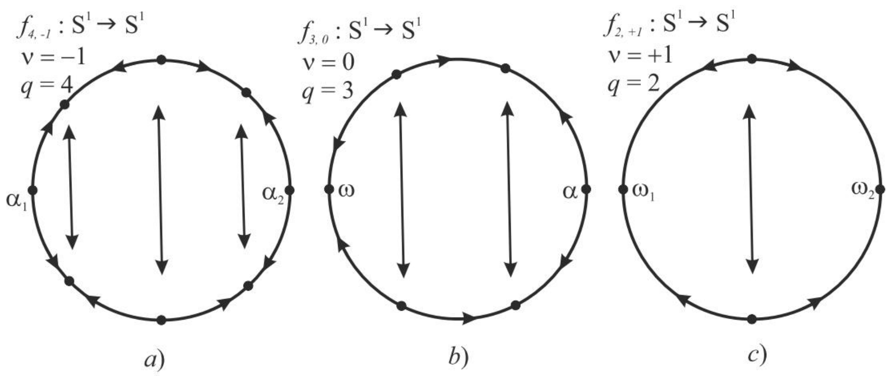


Рис. 2.1. Меняющие ориентацию диффеоморфизмы окружности:
a) диффеоморфизм $f_{4,-1}$ с неподвижными точками α_1 и α_2;
b) диффеоморфизм $f_{3,0}$ с неподвижными точками α и ω; c) диффеоморфизм $f_{2,+1}$ с неподвижными точками ω_1 и ω_2

Fig 2.1. Orientation-reversing diffeomorphisms of the circle:
a) diffeomorphism $f_{4,-1}$ with fix points α_1 and α_2; b) diffeomorphism $f_{3,0}$ with fix points α and ω; c) diffeomorphism $f_{2,+1}$ with fix points ω_1 and ω_2

2. *Два диффеоморфизма f и f' с параметрами q, ν и q', ν' соответственно топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $q = q'$ и $\nu = \nu'$.*

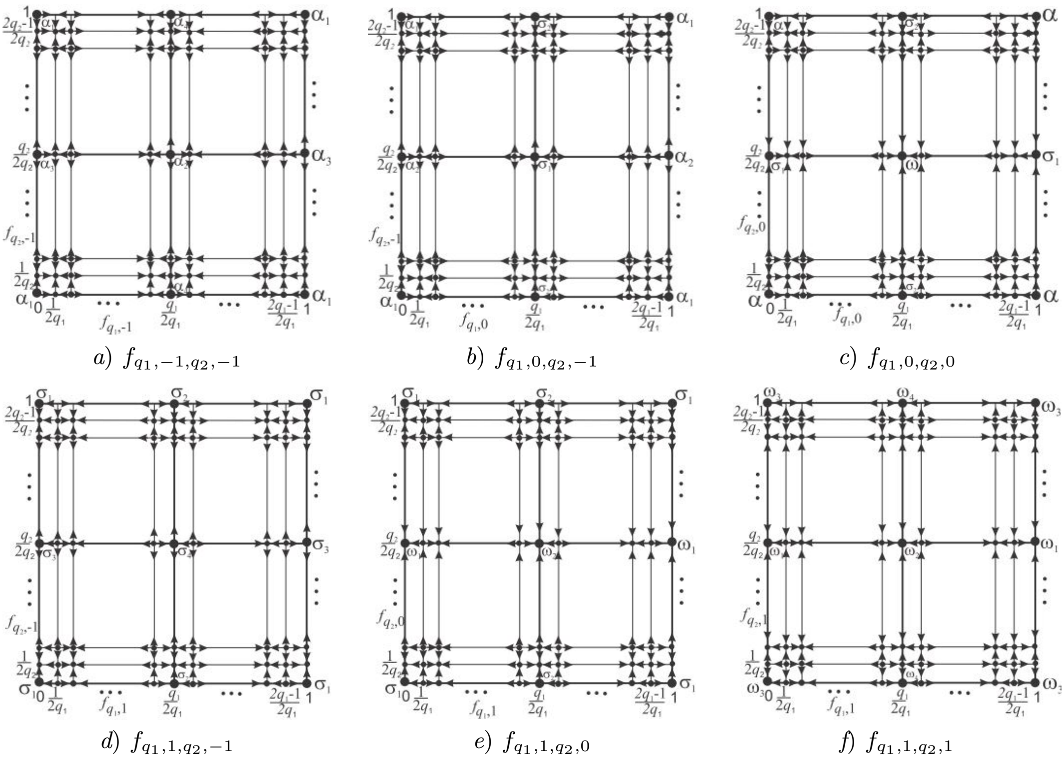
Обозначим через $f_{q,\nu} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ меняющий ориентацию диффеоморфизм окружности с параметрами q и ν.

3. Декартово произведение меняющих ориентацию грубых преобразований окружностей

Рассмотрим класс G диффеоморфизмов двумерного тора следующего вида:

$$f_{q_1,\nu_1,q_2,\nu_2} = f_{q_1,\nu_1} \times f_{q_2,\nu_2} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2.$$

Непосредственно из п. a) предложения 2.1 вытекают следующие свойства диффеоморфизмов данного класса.



a) $f_{q_1,-1,q_2,-1}$ *b)* $f_{q_1,0,q_2,-1}$ *c)* $f_{q_1,0,q_2,0}$

d) $f_{q_1,1,q_2,-1}$ *e)* $f_{q_1,1,q_2,0}$ *f)* $f_{q_1,1,q_2,1}$

Рис. 3.1. Фазовые портреты диффеоморфизмов класса G: a) $f_{q_1,-1,q_2,-1}$ с неподвижными источниками α_1, α_2, α_3, α_4; b) $f_{q_1,0,q_2,-1}$ с неподвижными точками α_1, α_2, σ_1, σ_2; c) $f_{q_1,0,q_2,0}$ с неподвижными точками α, ω, σ_1, σ_2; d) $f_{q_1,1,q_2,-1}$ с неподвижными седлами σ_1, σ_2, σ_3, σ_4; e) $f_{q_1,1,q_2,0}$ с неподвижными точками ω_1, ω_2, σ_1, σ_2; f) $f_{q_1,1,q_2,1}$ с неподвижными стоками ω_1, ω_2, ω_3, ω_4

Fig 3.1. Phase portraits of diffeomorphisms of class G: a) $f_{q_1,-1,q_2,-1}$ with fixed sources α_1, α_2, α_3, α_4; b) $f_{q_1,0,q_2,-1}$ with fixed points α_1, α_2, σ_1, σ_2; c) diffeomorphism $f_{q_1,0,q_2,0}$ with fixed points α, ω, σ_1, σ_2; d) $f_{q_1,1,q_2,-1}$ with fixed saddles σ_1, σ_2, σ_3, σ_4; e) $f_{q_1,1,q_2,0}$ with fixed points ω_1, ω_2, σ_1, σ_2; f) $f_{q_1,1,q_2,1}$ with fixed sinks ω_1, ω_2, ω_3, ω_4

Предложение 3.1. *Для любого диффеоморфизма* f_{q_1,ν_1,q_2,ν_2} *множество* $Per(f_{q_1,\nu_1,q_2,\nu_2})$ *состоит из* $4q_1q_2$ *периодических точек, из которых* $2q_1q_2$ *седловых,* q_1q_2 *стоковых и* q_1q_2 *источниковых. Четыре точки из* $4q_1q_2$ *являются неподвижными, а остальные* $4q_1q_2 - 4$ *точки имеют период* 2. *При этом:*

1) если $\nu_1 + \nu_2 = -2$, то все 4 неподвижные точки являются источниковыми (см. Рис. 3.1, a);

2) если $\nu_1 + \nu_2 = -1$, то две неподвижные точки являются источниковыми, две – седловыми (см. Рис. 3.1, b);

3) если $\nu_1 = \nu_2 = 0$, то одна неподвижная точка является источниковой, одна – стоковой и две – седловыми (см. Рис. 3.1, c);

4) если $\nu_1\nu_2 = -1$, то все неподвижные точки являются седловыми (см. Рис. 3.1, d);

5) если $\nu_1 + \nu_2 = 1$, то две неподвижные точки являются стоковыми, две – седловыми (см. Рис. 3.1, e);

6) если $\nu_1 + \nu_2 = 2$, то все 4 неподвижные точки являются стоковыми (см. Рис. 3.1, f).

Предложение 3.2. *([3] теорема 1.1) Два диффеоморфизма f_{q_1,ν_1,q_2,ν_2} и $f_{q'_1,\nu'_1,q'_2,\nu'_2}$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда либо $q_1 = q'_1$, $q_2 = q'_2$, $\nu_1 = \nu'_1$, $\nu_2 = \nu'_2$, либо $q_1 = q'_2$, $q_2 = q'_1$, $\nu_1 = \nu'_2$, $\nu_2 = \nu'_1$.*

4. Надстройки над грубыми преобразованиями окружности

Пусть дан диффеоморфизм $\phi : M^n \to M^n$ и ξ^t — поток на многообразии $M^n \times \mathbb{R}$, порожденный векторным полем, состоящим из единичных векторов, параллельных $\mathbb{R}$ и направленных в $+\infty$, такой что $\xi^t(x, r) = (x, r + t)$. Определим диффеоморфизм $g : M^n \times \mathbb{R} \to M^n \times \mathbb{R}$ формулой $g(x, r) = (\phi(x), r - 1)$. Положим $G = \{g^k\ , k \in \mathbb{Z}\}$ и $M_\phi = (M^n \times \mathbb{R})/G$. Обозначим через $p_{_\phi} : M^n \times \mathbb{R} \to M_\phi$ естественную проекцию и через ϕ^t – поток на многообразии M_ϕ, заданный формулой $\phi^t(x) = p_{_\phi}(\xi^t(p_{_\phi}^{-1}(x)))$. Поток ϕ^t называется *надстройкой над диффеоморфизмом* ϕ (см., например, Рис. 4.1).

Несложно показать,что надстройки над топологически сопряженными диффеоморфизмами являются топологически эквивалентными потоками. Обратное в общем случае неверно. В силу результатов работы [15] надстройки над меняющими ориентацию грубыми диффеоморфизмами окружности эквивалентны тогда и только тогда, когда топологически сопряжены диффеоморфизмы окружностей.

Пусть $\phi = f_{q_1,\nu_1,q_2,\nu_2} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ – диффеоморфизм тора и $\phi^t : M_\phi \to M_\phi$ – надстройка над ним. Обозначим через n_{ϕ^t} число всех периодических орбит, через m_{ϕ^t} — число стоковых, через k_{ϕ^t} — источниковых, через l_{ϕ^t} — седловых орбит потока ϕ^t. Непосредственно из предложения 3.1 вытекают следующие свойства надстройки ϕ^t.

Предложение 4.1. *Число всех периодических орбит n_{ϕ^t} потока $\phi^t : M_\phi \to M_\phi$ определяется по формуле:*

$$n_{\phi^t} = 2q_1q_2 + 2.$$

При этом:

1) если $\nu_1 + \nu_2 = -2$, то $l_{\phi^t} = q_1q_2$, $m_{\phi^t} = \dfrac{q_1q_2}{2}$, $k_{\phi^t} = \dfrac{q_1q_2}{2} + 2$;

2) если $\nu_1 + \nu_2 = -1$, то $l_{\phi^t} = q_1q_2 + 1$, $m_{\phi^t} = \dfrac{q_1q_2}{2}$, $k_{\phi^t} = \dfrac{q_1q_2}{2} + 1$;

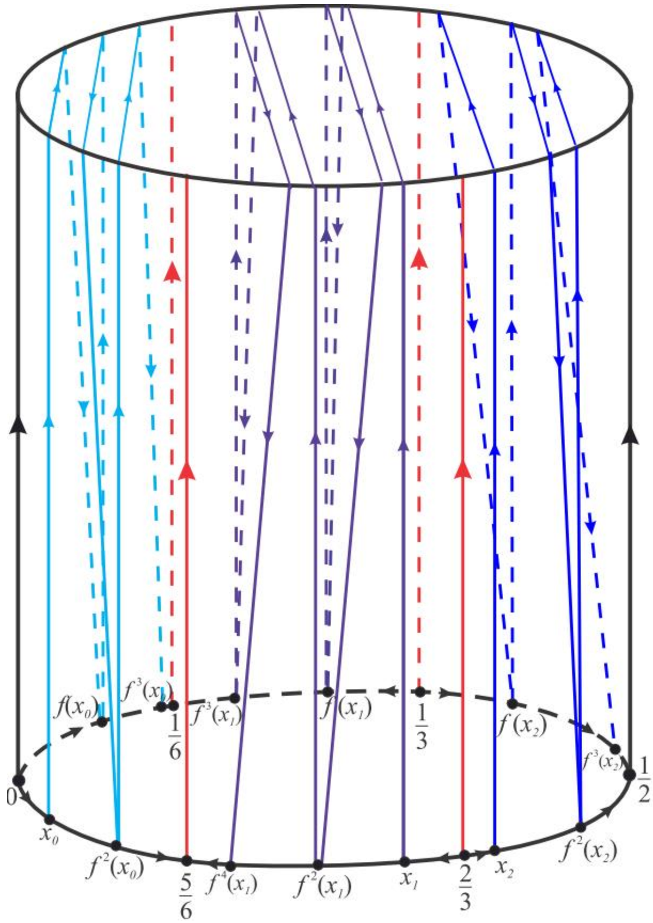


Рис. 4.1. Надстройка над диффеоморфизмом $f_{3,0}$
Fig 4.1. Suspension over a diffeomorphism $f_{3,0}$

3) если $\nu_1\nu_2 = -1$, то $l_{\phi^t} = q_1q_2 + 2$, $m_{\phi^t} = \dfrac{q_1q_2}{2}$, $k_{\phi^t} = \dfrac{q_1q_2}{2}$;

4) если $\nu_1 = \nu_2 = 0$, то $l_{\phi^t} = q_1q_2 + 1$, $m_{\phi^t} = \dfrac{q_1q_2}{2} + \dfrac{1}{2}$, $k_{\phi^t} = \dfrac{q_1q_2}{2} + \dfrac{1}{2}$;

5) если $\nu_1 + \nu_2 = 1$, то $l_{\phi^t} = q_1q_2 + 1$, $m_{\phi^t} = \dfrac{q_1q_2}{2} + 1$, $k_{\phi^t} = \dfrac{q_1q_2}{2}$;

6) если $\nu_1 + \nu_2 = 2$, то $l_{\phi^t} = q_1q_2$, $m_{\phi^t} = \dfrac{q_1q_2}{2} + 2$, $k_{\phi^t} = \dfrac{q_1q_2}{2}$.

Рассмотрим декартово произведение периодической точки x меняющего ориентацию диффеоморфизма окружности f_{q_1,ν_1} на окружность $\mathbb{S}^1$. Положим $C_x = \{x\} \times \mathbb{S}^1$ и обозначим через C_x^t объединение всех орбит потока ϕ^t, проходящих через точки окружности C_x. Тогда если x – неподвижная точка, то C_x^t является бутылкой Клейна, если x – точка периода 2, то C_x^t – двумерный тор. Обозначим через Σ_x объединение седловых орбит, принадлежащих множеству C_x^t и через l_x – их число. Если $C_x^t = cl(W^s_{\Sigma_x})$, то положим $\delta_x = s$; если $C_x^t = cl(W^u_{\Sigma_x})$, то положим $\delta_x = u$. Введем аналогичные обозначения, связанные с периодической точкой y меняющего ориентацию диффеоморфизма окружности f_{q_2,ν_2}.

Пусть a_1, b_1 (a_2, b_2) – неподвижные точки отображения f_{q_1,ν_1} (f_{q_2,ν_2}). Положим

$$\Delta_{\phi^t,1} = \{(\delta_{a_1}, l_{a_1}), (\delta_{b_1}, l_{b_1})\},\ \Delta_{\phi^t,2} = \{(\delta_{a_2}, l_{a_2}), (\delta_{b_2}, l_{b_2})\}$$

$$\text{и}\ P_{\phi^t,1} = (q_1, \nu_1),\ P_{\phi^t,2} = (q_2, \nu_2).$$

Предложение 4.2. *Для потока $\phi^t : M_\phi \to M_\phi$ реализуются следующие возможности:*

1. $P_{\phi^t,1} = (q_1, -1)$, $P_{\phi^t,2} = (q_2, -1)$
$$\text{и}\quad \Delta_{\phi^t,1} = \left\{\left(s, \frac{q_2}{2}\right), \left(s, \frac{q_2}{2}\right)\right\}, \Delta_{\phi^t,2} = \left\{\left(s, \frac{q_1}{2}\right), \left(s, \frac{q_1}{2}\right)\right\};$$
2. $P_{\phi^t,1} = (q_1, 0)$, $P_{\phi^t,2} = (q_2, -1)$
$$\text{и}\quad \Delta_{\phi^t,1} = \left\{\left(u, \frac{q_2}{2}+1\right), \left(s, \frac{q_2}{2}\right)\right\}, \Delta_{\phi^t,2} = \left\{\left(s, \frac{q_1+1}{2}\right), \left(s, \frac{q_1+1}{2}\right)\right\};$$
3. $P_{\phi^t,1} = (q_1, 1)$, $P_{\phi^t,2} = (q_2, -1)$
$$\text{и}\quad \Delta_{\phi^t,1} = \left\{\left(u, \frac{q_2}{2}+1\right), \left(u, \frac{q_2}{2}+1\right)\right\}, \Delta_{\phi^t,2} = \left\{\left(s, \frac{q_1}{2}+1\right), \left(s, \frac{q_1}{2}+1\right)\right\};$$
4. $P_{\phi^t,1} = (q_1, 0)$, $P_{\phi^t,2} = (q_2, 0)$
$$\text{и}\quad \Delta_{\phi^t,1} = \left\{\left(u, \frac{q_2+1}{2}\right), \left(s, \frac{q_2+1}{2}\right)\right\}, \Delta_{\phi^t,2} = \left\{\left(u, \frac{q_1+1}{2}\right), \left(s, \frac{q_1+1}{2}\right)\right\};$$
5. $P_{\phi^t,1} = (q_1, 0)$, $P_{\phi^t,2} = (q_2, 1)$
$$\text{и}\quad \Delta_{\phi^t,1} = \left\{\left(u, \frac{q_2}{2}\right), \left(s, \frac{q_2}{2}+1\right)\right\}, \Delta_{\phi^t,2} = \left\{\left(u, \frac{q_1+1}{2}\right), \left(u, \frac{q_1+1}{2}\right)\right\};$$
6. $P_{\phi^t,1} = (q_1, 1)$, $P_{\phi^t,2} = (q_2, 1)$
$$\text{и}\quad \Delta_{\phi^t,1} = \left\{\left(u, \frac{q_2}{2}\right), \left(u, \frac{q_2}{2}\right)\right\}, \Delta_{\phi^t,2} = \left\{\left(u, \frac{q_1}{2}\right), \left(u, \frac{q_1}{2}\right)\right\}.$$

Остальные случаи получаются «зеркально» перенумеровкой 1 и 2.

Предложение 4.3. *Для любого потока $\phi^t : M_\phi \to M_\phi$ объемлющее многообразие гомеоморфно замкнутому 3-многообразию $\mathbb{T}^2 \times [0,1]/\varphi$, где $\varphi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ – алгебраический автоморфизм тора, заданный матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $(x,1) \sim (\varphi(x), 0)$.*

Доказательство. По построению диффеоморфизм ϕ индуцирует изоморфизм фундаментальной группы, заданный матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Тогда, в силу теоремы 2.6 работы [17], многообразие M_ϕ гомеоморфно замкнутому 3-многообразию $\mathbb{T}^2 \times [0,1]/\varphi$, где $\varphi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ – алгебраический автоморфизм тора, заданный матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $(x, 1) \sim (\varphi(x), 0)$.
Доказательство завершено.

Пусть $\phi = f_{q_1,\nu_1,q_2,\nu_2} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ и $\phi' = f_{q'_1,\nu'_1,q'_2,\nu'_2} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ диффеоморфизмы торов и $\phi^t : M_\phi \to M_\phi$, $\phi'^t : M_{\phi'} \to M_{\phi'}$ – надстройки над данными диффеоморфизмами.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 4.1. *Надстройки ϕ^t и ϕ'^t топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда топологически сопряжены диффеоморфизмы ϕ и ϕ'.*

Для доказательства теоремы достаточно показать, что из топологической эквивалентности надстроек ϕ^t и ϕ'^t следует топологическая сопряженность ϕ и ϕ'. Другими словами, в силу предложения 4.2 достаточно показать, что из эквивалентности надстроек ϕ^t и ϕ'^t следует, что $q_1 = q'_1$, $\nu_1 = \nu'_1$, $q_2 = q'_2$, $\nu_2 = \nu'_2$ или $q_1 = q'_2$, $\nu_1 = \nu'_2$, $q_2 = q'_1$, $\nu_2 = \nu'_1$.

Доказательство. Предположим, что существует гомеоморфизм $h : M_\phi \to M_{\phi'}$, переводящий орбиты потока ϕ^t в орбиты потока ϕ'^t. Из определения эквивалентности следует, что гомеоморфизм h переводит замыкания инвариантных многообразий седловых орбит потока ϕ^t в аналогичные замыкания потока ϕ'^t с сохранением устойчивости. В силу предложения 4.2, все такие замыкания формируют два семейства попарно непересекающихся торов и бутылок Клейна так, что в каждом семействе в точности две бутылки Клейна. Тогда гомеоморфизм h переводит эти поверхности потока ϕ^t в аналогичные поверхности потока ϕ'^t. В частности, каждая пара непересекающихся бутылок Клейна переходит в аналогичную пару. Кроме того, эти бутылки Клейна должны содержать одинаковое количество седловых орбит.

Отсюда следует, что $\Delta_{\phi^t,1} = \Delta_{\phi'^t,1}$ и $\Delta_{\phi^t,2} = \Delta_{\phi'^t,2}$ или $\Delta_{\phi^t,1} = \Delta_{\phi'^t,2}$ и $\Delta_{\phi^t,2} = \Delta_{\phi'^t,1}$. Или, равносильно, $q_1 = q'_1$, $\nu_1 = \nu'_1$, $q_2 = q'_2$, $\nu_2 = \nu'_2$ или $q_1 = q'_2$, $\nu_1 = \nu'_2$, $q_2 = q'_1$, $\nu_2 = \nu'_1$.
Доказательство завершено.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-90069 и фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» проект № 19-7-1-15-1. Авторы благодарят О. В. Починку за постановку задачи и плодотворные обсуждения.

Список литературы

1. Андронов А. А., Понтрягин Л. С. Грубые системы // Доклады АН СССР. 1937. Т. 14, № 5. С. 247–250.

2. Майер А. Г. Грубое преобразование окружности в окружность // Ученые записки Горьк. гос. ун-та. 1939. Т. 12. С. 215–229.

3. Гуревич Е. Я., Зинина С. Х. О топологической классификации градиентно-подобных систем на поверхностях, являющихся локальными прямыми произведениями // Журнал Средневолжского математического общества. 2015. Т. 17, № 1. С. 37–47.

4. Голикова И. В., Зинина С. Х. Топологическая сопряженность n-кратных декартовых произведений грубых преобразований окружности // Известия Высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 6. С. 851–862. DOI: https://doi.org/10.18500/0869-6632-2021-29-6-851-862

5. Peixoto M. M. On structural stability // Ann. Math. 1959. Vol. 69. pp. 199–222.

6. Mane R. A proof of C^1-stability conjecture // Publ. Math. IHES. 1988. Vol. 66. pp. 161–210.

7. Robinson C. Structural stability of C^1 diffeomorphisms // J. Diff. Equat. 1976. Vol. 22, No 1. pp. 28–73.

8. Смейл С. Дифференцируемые динамические системы // УМН. 1970. Т. 25. С. 113–185.

9. Palis J. On Morse-Smale dynamical systems / Topology. 1969. Vol. 8, No 4. pp. 385–404.

10. Palis J., Smale S. Structural stability theorems. Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math. 1970. Vol. 14. pp. 223–231.

11. Палис Ж., Ди Мелу В. Геометрическая теория динамических систем: введение: пер. с англ. М.: Мир, 1986. 301 с.

12. Grines V., Medvedev T., Pochinka O. Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds. Switzerland: Springer, 2016. 313 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-44847-3

13. Морозов А. И., Починка О. В. Комбинаторный инвариант для поверхностных диффеоморфизмов Морса-Смейла с ориентируемой гетероклиникой // Журнал Средневолжского математического общества. 2020. Т. 22, № 1. С. 71–80. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.22.202001.71-80

14. Шубин Д. Д. Топология несущих многообразий несингулярных потоков с тремя нескрученными орбитами // Известия Высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, вып. 6. С. 863–868. DOI: https://doi.org/10.18500/0869-6632-2021-29-6-863-868

15. Голикова И. В., Починка О. В. Надстройки над грубыми преобразованиями окружности [Электронный ресурс] // Огарев-online. 2020. № 13. Режим доступа: http://journal.mrsu.ru/arts/nadstrojki-nad-grubymi-preobrazovaniyami-okruzhnosti

16. Колобянина А. Е., Ноздринова Е. В., Починка О. В. Современное изложение классификации грубых преобразований окружности // Журнал Средневолжского математического общества. 2018. Т. 20, № 4. С. 408–418. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.20.201804.408-418

17. Hatcher A. Notes on basic 3-manifold topology. 2007. 60 p. Available at: https://pi.math.cornell.edu/hatcher/3M/3Mfds.pdf (accessed: 15.11.2021).

Поступила 01.12.2021; доработана после рецензирования 10.02.2022; принята к публикации 24.02.2022

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. A. A. Andronov, L. S. Pontryagin, "Rough systems", *Reports of the Academy of Sciences of the USSR*, **14**:5 (1937), 247–250 (In Russ.).

2. A. G. Maier, "A rough transformation of a circle into a circle", *Uch. Zap. Gorkovskogo Univ.*, **12** (1939), 215–229 (In Russ.).

3. E. Ya. Gurevich, S. Kh. Zinina, "On topological classification of gradient-like systems on surfaces, that are locally direct product", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **17**:1 (2015), 37–47 (In Russ.).

4. I. V. Golikova, S. Kh. Zinina, "Topological conjugacy of n-multiple Cartesian products of circle rough transformations", *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Applied Nonlinear Dynamics*, **29**:6 (2021), 851–862 (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.18500/0869-6632-2021-29-6-851-862

5. M. M. Peixoto, "On structural stability", *Ann. Math.*, **69** (1959), 199–222.

6. R. Mane, "A proof of C^1 stability conjecture", *Publ. Math. IHES*, **66** (1988), 161–210.

7. C. Robinson, "Structural stability of C^1 diffeomorphisms", *J. Diff. Equat.*, **22**:1 (1976), 28–73.

8. S. Smale, "Differentiable dynamical systems", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.

9. J. Palis, "On Morse-Smale dynamical systems", *Topology*, **8**:5 (1969), 385–404.

10. J. Palis, S. Smale, "Structural stability theorems", *Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math.*, **14** (1970), 223–231.

11. J. Palis, W. de Melo, *Geometric theory of dynamical systems. An introduction*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982, 198 p.

12. V. Grines, T. Medvedev, O. Pochinka, *Dynamical systems on 2- and 3-manifolds.*, Springer, Switzerland, 2016 DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-44847-3, 313 p.

13. A. I. Morozov, O. V. Pochinka, "Combinatorial invariant of Morse-Smale diffeomorphisms on surfaces with orientable heteroclinic", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **22**:1 (2020), 71–80 (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.22.202001.71-80

14. D. D. Shubin, “Topology of ambient manifolds of non-singular Morse – Smale flows with three periodic orbits”, *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Applied Nonlinear Dynamics*, **29**:6 (2021), 863–868 (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.18500/0869-6632-2021-29-6-863-868

15. I. V. Golikova, O. V. Pochinka, “Suspension over rough circle transformation”, *Ogarev-Online*, 2020, no. 13 (In Russ.), Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/nadstrojki-nad-grubymi-preobrazovaniyami-okruzhnosti.

16. A. E. Kolobyanina, E. V. Nozdrinova, O. V. Pochinka, “Classification of rough transformations of a circle from a modern point of view”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **20**:4 (2018), 408–418 (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.20.201804.408-418

17. A. Hatcher, *Notes on basic 3-manifold topology*, 2007, 60 p., https://pi.math.cornell.edu/hatcher/3M/3M.pdf.

Submitted 01.12.2021; Revised 10.02.2022; Accepted 24.02.2022

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.