DOI 10.15507/2079-6900.24.202201.31-39
Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.938.5

О топологической классификации многомерных полярных потоков

Е. Я. Гуревич, Н. С. Денисова

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

Аннотация. Работа посвящена решению задачи о топологической классификации структурно-устойчивых потоков, восходящей к классическим работам Андронова, Понтрягина, Леонтович и Майера. К настоящему времени имеются исчерпывающие классификационные результаты для потоков Морса-Смейла (структурно-устойчивых потоков, неблуждающее множество которых состоит из конечного числа неподвижных точек и периодических траекторий), заданных на многообразиях, размерность которые не превышает трех, и совсем небольшое число результатов для высших размерностях. Это объясняется возрастающей сложностью топологических задач, которые возникают при описании структуры разбиения многомерного фазового пространства на траектории. В настоящей работе рассматривается класс $G(M^n)$ потоков Морса-Смейла на замкнутом связном ориентируемом многообразии M^n, неблуждающее множество которых состоит в точности из четырех точек: источника, стока и двух седел. Для случая, когда размерность n несущего многообразия равна 4 и выше, дополнительно предполагается, что одно из инвариантных многообразий каждого седлового состояния равновесия одномерно. Для потоков из этого класса описана топология несущего многообразия, получена оценка минимального числа гетероклинических кривых, необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности, а также описан алгоритм реализации стандартного представителя каждого класса топологической эквивалентности. Один из удивительных результатов работы состоит в том, что если при $n = 3$ имеется счетное множество многообразий, допускающих потоки из рассматриваемого класса, то в размерности $n > 3$ несущее многообразие всего одно (с точностью до гомеоморфизма).

Ключевые слова: поток Морса-Смейла, полярный поток, топологическая классификация, топология несущего многообразия, гетероклиничкеская кривая

Для цитирования: Гуревич Е. Я., Денисова Н. С. О топологической классификации многомерных полярных потоков // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 1. С. 31–39. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202201.31-39

Об авторах:

Гуревич Елена Яковлевна, доцент кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, 25/12), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1815-3120, egurevich@hse.ru

Денисова Наталья Сергеевна, студент факультета информатики, математики и компьютерных наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, 25/12), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-8099-6594, nsdenisova@edu.hse.ru

Original article

MSC2020 37D15

On a topological classification of multidimensional polar flows

E. Ya. Gurevich, N. S. Denisova

National Research University «Higher School of Economics» (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

Abstract. The work solves the classification problem for structurally stable flows, which goes back to the classical works of Andronov, Pontryagin, Leontovich and Mayer. One of important examples of such flows is so-called Morse-Smale flow, whose non-wandering set consists of a finite number of fixed points and periodic trajectories. To date, there are exhaustive classification results for Morse-Smale flows given on manifolds whose dimension does not exceed three, and a very small number of results for higher dimensions. This is explained by increasing complexity of the topological problems that arise while describing the structure of the partition of a multidimensional phase space into trajectories. In this paper authors investigate the class $G(M^n)$ of Morse-Smale flows on a closed connected orientable manifold M^n whose non-wandering set consists of exactly four points: a source, a sink, and two saddles. For the case when the dimension n of the supporting manifold is greater or equal than four, it is additionally assumed that one of the invariant manifolds for each saddle equilibrium state is one-dimensional. For flows from this class, authors describe the topology of the supporting manifold, estimate minimum number of heteroclinic curves, and obtain necessary and sufficient conditions of topological equivalence. Authors also describe an algorithm that constructs standard representative in each class of topological equivalence. One of the surprising results of this paper is that while for $n = 3$ there is a countable set of manifolds that admit flows from class $G(M^3)$, there is only one supporting manifold (up to homeomorphism) for dimension $n > 3$.

Keywords: Morse-Smale flows, polar flow, topological classification, topology of ambient manifold, heteroclinic curve

For citation: *E. Ya. Gurevich, N. S. Denisova.* On a topological classification of multidimensional polar flows. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 24:1(2022), 31–39. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202201.31-39

About the authors:

Elena Ya. Gurevich, Associate Professor, Department of Fundamental Mathematics, National Research University «High School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1815-3120, egurevich@hse.ru

Natalya S. Denisova, student of the Faculty of Informatics, Mathematics and Computer Science, National Research University «High School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-8099-6594, nsdenisova@edu.hse.ru

1. Введение и формулировка результатов

Напомним, что гладкий поток $f^t : M^n \to M^n$, заданный на замкнутом гладком многообразии M^n размерности n, называется *градиентно-подобным*, если его неблуждающее множество Ω_{f^t} состоит из конечного числа гиперболических состояний равновесия, а инвариантные многообразия состояний равновесия пересекаются трансверсально.

Число ind_p, равное размерности неустойчивого многообразия W^u_p гиперболического состояния равновесия p, называется его *индексом Морса.* Состояния равновесия, индекс Морса которого равен $n(0)$, называется *источником* (*стоком*); состояние равновесия, индекс Морса которого меньше n, но больше нуля, называется *седловым.*

Пусть p, q — седловые состояния равновесия градиентно-подобного потока, такие что $W^u_p \cap W^s_q \neq \emptyset$. Пересечение $W^u_p \cap W^s_q$ будем называть *гетероклиническим пересечением.* Если пересечение $W^u_p \cap W^s_q$ одномерно, то каждую его компоненту связности будем называть *гетероклинической кривой.*

Полярным потоком называется градиентно-подобный поток, неблуждающее множество которого содержит один источник, один сток и произвольное число седловых состояний равновесия.

Обозначим $G(M^n)$ класс полярных потоков на ориентируемом многообразии M^n размерности $n \geq 2$, такой что для любого $f^t \in G(M^n)$ множество седловых состояний равновесия состоит ровно из двух точек, при этом если $n \geq 3$, то седловые состояния равновесия имеют индексы Морса, равные 1 и $(n-1)$ соответственно. При $n = 2$ это условие выполняется автоматически для всех потоков; в предложении 2.1 будет показано, что при $n = 3$ этому требованию удовлетворяет любой полярный поток с двумя седловыми состояниями равновесия. Будем обозначать ω (α) стоковое (источниковое) состояние равновесия потока $f^t \in G(M^n)$, σ_1, σ_{n-1} — седловые состояния равновесия индексов $1, (n-1)$ соответственно.

Напомним, что *линзой* $L_{p,q}$ называется многообразие, полученное склейкой полноториев Π_1 и Π_2 по диффеоморфизму $\varphi : \partial\Pi_1 \to \partial\Pi_2$, переводящему меридиан Π_1 полнотория в кривую $l \in \partial\Pi_2$, гомотопический класс которой определяется парой (p, q), где (p, q) — взаимно простые числа, $p > q > 0$. При этом гомотопический класс $(0, 1)$ соответствует меридиану полнотория (кривой, не гомотопной нулю на граничном торе, но гомотопной нулю на полнотории), а класс $(1, 0)$ – параллели. Трехмерную сферу $\mathbb{S}^3$ и прямое произведение $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ двумерной сферы на окружность будем также считать линзами $L_{1,0}, L_{0,1}$ соответственно.

Топология многообразия M^n и гетероклинические пересечения потоков из рассматриваемого класса описывается следующим образом.

Теорема 1.1. *Пусть M^n — ориентируемое замкнутое многообразие, допускающее поток $f^t \in G(M^n)$. Тогда:*

1) *если $n = 2$, то многообразие M^n является тором и поток f^t не имеет гетероклинических пересечений;*
2) *если $n = 3$, то многообразие M^n является линзой $L_{p,q}$ и блуждающее множество потока f^t содержит не менее чем p гетероклинических кривых;*
3) *если $n \geq 4$, то многообразие M^n гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$, при этом $W^u_{\sigma_1} \cap W^s_{\sigma_{n-1}} = \emptyset$, а пересечение $W^s_{\sigma_1} \cap W^u_{\sigma_{n-1}}$ либо пусто, либо состоит из конечного числа компонент связности.*

Из классических результатов Пейшото [1] следует, что любые два потока $f^t, g^t \in$ $\in G(M^2)$ топологически эквивалентны. Топологическая классификация потоков из класса $G(M^3)$ следует из работ [2–3]. Идея работы [2] используется для получения необходимых и достаточных условий топологической эквивалентности потоков из класса $G(M^n)$, $n \geq 4$.

Положим $A_{f^t} = W^u_{\sigma_1} \cup \omega$, $R_{f^t} = W^s_{\sigma_{n-1}} \cup \alpha$, $V_{f^t} = M^n \setminus (A_{f^t} \cup R_{f^t})$. В предложении 2.3 мы показываем, что существует гладкое замкнутое подмногообразие $\Sigma_{f^t} \in V_{f^t}$, дифеоморфное $\mathbb{S}^{n-2} \times \mathbb{S}^1$ и пересекающееся трансверсально с каждой траекторией потока f^t, лежащей в V_{f^t}.

Положим $L^s_{f^t} = W^s_{\sigma_1} \cap \Sigma_{f^t}, L^u_{f^t} = W^u_{\sigma_{n-1}} \cap \Sigma_{f^t}$.

Т е о р е м а 1.2. *Потоки $f^t, g^t \in G(M^n)$, $n \geq 2$, топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда существует гомеоморфизм $h : \Sigma_{f^t} \to \Sigma_{g^t}$, такой что $h(L^s_{f^t}) = L^s_{g^t}, h(L^u_{f^t}) = L^u_{g^t}$.*

2. Топология несущего многообразия и гетероклинические пересечения

Этот раздел посвящен доказательству теоремы 1.1.

Положим $\mathbb{B}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x^1 + \dots x^n \leq 1\}$, $\mathbb{S}^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x^1 + \dots x^n = 1\}$, $n \geq 1$.

Обозначим через c_i число состояний равновесия произвольного градиентно-подобного потока, индекс Морса которых равен $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, и через $\chi(M^n)$ эйлерову характеристику несущего многообразия M^n. В силу [4] (Теорема 4.1) справедливо следующее равенство

$$c_0 - c_1 + \dots + (-1)^n c_n = \chi(M^n). \tag{2.1}$$

Доказательство п. 1 теоремы 1.1. В случае $n = 2$ из формулы (2.1) непосредственно следует, что если многообразие M^2 допускает поток из класса $G(M^2)$, то его эйлерова характеристика равна 0. Поскольку многообразие M^2 предполагается ориентируемым, то отсюда следует, что оно диффеоморфно тору. По условию, определяющему класс $G(M^n)$, инвариантные многообразия седловых состояний равновесия пересекаются трансверсально. В случае $n = 2$ размерность эти инвариантных многообразий равна единице, следовательно, их пересечение либо пусто, либо нульмерно (т. е. состоит из изолированных точек). Если пересечение непусто, то в силу его инвариантности вместе с каждой точкой в пересечении содержится орбита этой точки, следовательно, пересечение одномерно. Полученное противоречие доказывает, что в случае $n = 2$ поток $f^t \in G(M^n)$ не имеет гетероклинических пересечений. Таким образом, п. 1 теоремы 1.1 доказан. Отметим, что при доказательстве отсутствия гетероклинического пересечения использовалось только условие трансверсальности пересечения и двумерность объемлющего многообразия, так что эти рассуждения доказывают, что любой градиентно-подобный поток на поверхности не имеет гетероклинических пересечений. В отличие от потоков, градиентно-подобные диффеоморфизмы на поверхностях допускают гетероклинические пересечения (см. [5–6], где получена топологическая классификация содержательных классов градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей).

Для доказательства теоремы 1.1 при $n > 2$ приведем несколько вспомогательных предложений.

П р е д л о ж е н и е 2.1. *Множество седловых состояний равновесия потока $f^t \in G(M^3)$ состоит в точности из седел σ_1, σ_2, индексы Морса которых равны 1 и 2 соответственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Эйлерова характеристика любого трехмерного многообразия равна нулю, а из определения класса $G(M^3)$ следует, что $c_0 = c_n = 1$, $c_1^2 + c_2^2 > 0$. Тогда из формулы (2.1) получаем, что $c_1 = c_2 = 1$, что и требовалось доказать.

Напомним, что α, ω обозначают источниковое и стоковое состояния равновесия потока $f^t \in G(M^n)$; σ_i обозначает седловое состояние равновесия такое, что $dim\, W^u_{\sigma_i} = i$, $i \in \{1, (n-1)\}$, $n \geq 3$.

Предложение 2.2. *Пусть $f^t \in G(M^n), n \geq 3$. Тогда:*

1) $W^u_{\sigma_1} \cap W^s_{\sigma_{n-1}} = \emptyset, W^s_{\sigma_{n-1}} \cap W^u_{\sigma_1} = \emptyset$;

2) $cl\, W^u_{\sigma_1} = W^u_{\sigma_1} \cup \omega$, $cl\, W^s_{\sigma_{n-1}} = W^s_{\sigma_{n-1}} \cup \alpha$.

Доказательство. По определению многообразия $W^u_{\sigma_1}, W^s_{\sigma_{n-1}}$ одномерны, поэтому доказательство первого пункта утверждения аналогично доказательству отсутствия гетероклинических пересечений для случая $n = 2$. Докажем пункт 2. Пусть $x \in W^u_{\sigma_1}$. Так как многообразие M^n замкнуто, то орбита $O_x = \bigcup\limits_{t \in \mathbb{R}} f^t(x)$ точки x содержит последовательность, сходящуюся к некоторой точке $x_* \in M^n$. Тогда существует окрестность $U \in M^n$ точки x^* и возрастающая последовательность $n_1, \ldots, n_i, \ldots$, такая, что $f^{n_i}(x) \subset U$ для всех $i > 0$. Тогда для любого $i \in \mathbb{N}$ точка $f^{n_{i+1}-n_i}(f^{n_i}(x)) = f^{n_{i+1}}(x)$ лежит одновременно в U и в $f^{n_{i+1}-n_i}(U)$, поэтому $f^{n_{i+1}-n_i}(U) \cap U \neq \emptyset$, точка x_* является неблуждающей и $x \in W^s_{x_*}$. Так как $W^u_{\sigma_1} \cap W^s_{\sigma_{n-1}} = \emptyset$, $W^u_{\sigma_1} \cap W^s_{\sigma_1} = \sigma_1$ и $W^s_\alpha = \alpha$, то единственный возможный вариант это $x_* = \omega$. Таким образом, $cl\, W^u_{\sigma_1} = W^u_{\sigma_1} \cup \omega$. Аналогично доказывается, что $cl\, W^s_{\sigma_{n-1}} = W^s_{\sigma_{n-1}} \cup \alpha$.

Следующее утверждение является непосредственным следствием [7] (Theorem B), [8] (Theorem 2).

Утверждение 2.1. *Для любого градиентно-подобного потока f^t на гладком замкнутом многообразии M^n существует гладкая функция $\varphi : M^n \longrightarrow [0, n]$ такая, что:*

1) φ является функцией Морса;

2) Множество критических точек функции φ совпадает с Ω_{f^t} потока f^t;

3) $\varphi(f^t(x)) < \varphi(x)$ для любой точки $x \notin \Omega_{f^t}$ и любого $t > 0$.

4) Для любого состояния равновесия $\varphi(p) = dim\, W^u_p$;

5) для любого $c \in (0, n) \setminus \mathbb{N}$ множество $\varphi^{-1}(c)$ является гладким замкнутым подмногообразием, трансверсально пересекающим все траектории потока f^t.

Функция φ, описанная в утверждении 2.1, называется *самоиндексирующейся энергетической функцией* потока f^t.

Предложение 2.3. *Существует топологическое вложение $\eta : \mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1 \to \to M^n$, такое что:*

1) $A_{f^t} \subset int\, \eta(\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1)$;

2) $R_{f^t} \subset M^n \setminus int\, \eta(\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1)$;

3) $M^n \setminus int\, \eta(\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1)$ гомеоморфно $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$;

4) $\Sigma_{f^t} = \eta(\partial\, \mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1)$ является гладким подмногообразием многообразия M^n и пересекает каждую траекторию, лежащую в V_{f^t}, трансверсально.

Доказательство. Пусть $\varphi : M^n \to [0, n]$ — самоиндексирующаяся энергетическая функция потока f^t. Положим $V_a = \varphi^{-1}([0, n/2])$. Из определения следует, что $A_{f^t} \subset V_a$, $R_{f^t} \subset M^n \setminus int\, V_a$ и множество $\Sigma_{f^t} = \partial\, V_a$пересекает каждую траекторию, лежащую в V_{f^t}, трансверсально. Покажем, что V_a диффеоморфно прямому произведению $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$. Положим $M_0 = \varphi^{-1}[0, 1 - \varepsilon]$. В силу определения класса $G(M^n)$, M_0 лежит в устойчивом многообразии единственной стоковой точки W^s_ω. В локальных координатах функция φ около этой стоковой точки имеет вид $\varphi = x_1^2 + \cdots + x_n^2$, следовательно, множество M_0 диффеоморфно шару $x^2 + \cdots + x_n^2 \le 1 - \varepsilon$.

Из теории Морса (см., например, [9]) следует, что множество V_a получается из M_0 следующим образом. Пусть $H_1^n = \mathbb{B}^1 \times \mathbb{B}^{n-1}$, $F = (\partial\mathbb{B}^1) \times \mathbb{B}^{n-1}$ и $\psi : F \to \partial M_0$ — гладкое вложение. Тогда V_a гомеоморфно фактор-пространству $M_0 \cup_\psi H_1^n$, полученному из объединения $M_0 \cup H_1^n$ отождествлением точек $x \in F$ и $\psi(x)$.

Пусть $\xi : M_0 \to \mathbb{B}^1 \times \mathbb{B}^{n-1}$ — гомеоморфизм такой, что $\xi(\psi(F)) = \partial\mathbb{B}^1 \times \mathbb{B}^{n-1}$. Тогда многообразие V_a гомеоморфно фактор-пространству $\mathbb{B}^1 \times \mathbb{B}^{n-1} \cup_{\xi\psi} \mathbb{B}^1 \times \mathbb{B}^{n-1}$, полученному из объединения $\mathbb{B}^1 \times \mathbb{B}^{n-1} \cup \mathbb{B}^1 \times \mathbb{B}^{n-1}$ отождествлением точек $x \in F$ и $\xi\psi(x)$. Из конструкции следует, что это фактор-пространство гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^{n-1}$. Применением аналогичные рассуждения к функции $\tilde{\varphi} = n - \varphi$, являющейся самоиндексирующейся энергетической функцией потока f^{-t}, и получим, что многообразие $\tilde{\varphi}^{-1}([0, n/2])$ гомеоморфно $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^{n-1}$.

Доказательство п. 2 теоремы 1.1. Докажем, что в случае $n = 3$ многообразие M^n является линзой $L_{p,q}$ и блуждающее множество потока f^t содержит не менее p гетероклинических кривых. Пусть $\eta : \mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1 \to M^3$ — топологическое вложение, удовлетворяющее заключению предложения 2.3. Положим $\Pi_\omega = \eta(\mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1)$, $\Pi_\alpha = M^3 \setminus \eta(\mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1)$, $L^s_{f^t} = W^s_{\sigma_1} \cap \Sigma_{f^t}$, $L^u_{f^t} = W^u_{\sigma_2} \cap \Sigma_{f^t}$. Поскольку пересечение $W^s_{\sigma_1} \cap \Sigma$ трансверсально, то $L^s_{f^t}$ является замкнутым многообразием размерности 1, следовательно, гомеоморфно окружности. По определению многообразие M^3 является результатом склейки двух полноториев Π_ω, Π_α, следовательно, является линзой.

Поскольку $L^s_{f^t}$ является секущей для потока $f^t|_{W^s_{\sigma_1} \setminus \sigma_1}$, то $L^s_{f^t}$ ограничивает в $W^s_{\sigma_1}$ диск $D = \varphi^{-1}([1, 3/2]) \cap W^s_{\sigma_1}$, содержащий точку σ_1. Диск D принадлежит полноторию Π_ω и пересекается с его границей только по кривой $L^s_{f^t}$, поэтому $L^s_{f^t}$ является меридианом полнотория Π_ω. Аналогично доказывается, что $L^u_{f^t}$ является меридианом полнотория Π_α.

Из [10] (Глава 9B) следует, что топологический тип линзы M^3 зависит только от гомотопического класса кривой $L^s_{f^t}$ в полнотории Π_α. Возможны следующие варианты:

1) $L^s_{f^t}$ – параллель полнотория Π_α. Тогда M^3 есть сфера S^3, индекс пересечения $L^s_{f^t} \cap L^u_{f^t}$ равен единице, следовательно, минимальное число точек пересечения $L^s_{f^t} \cap$ $\cap L^u_{f^t}$ равно единице. Поскольку траектория каждой точки пересечения $L^s_{f^t} \cap L^u_{f^t}$ является гетероклинической, то минимальное число гетероклинических кривых в этом случае равно 1;

2) $L^s_{f^t}$ – меридиан полнотория Π_ω. Тогда M^3 гомеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, индекс пересечения $L^s_{f^t} \cap L^u_{f^t}$ равен нулю, и минимальное число гетероклинических кривых в этом случае равно 0;

3) $[L^s_{f^t}] = (p, q)$, $p^2 + q^2 \ne 0$. Тогда M^3 является линзой $L_{p,q}$, а минимальное число гетероклинических траекторий в этом случае равно p.

П. 2 доказан.

Для доказательства п. 3 теоремы 1.1 нам потребуется следующее утверждение, доказанное в [11].

Утверждение 2.2. *Пусть* $\varphi : S^1 \times S^{n-2} \to S^1 \times S^{n-2}$ *— гомеоморфизм. Тогда существует гомеоморфизм* $\Phi : S^1 \times B^{n-1} \to S^1 \times B^{n-1}$ *такой, что* $\Phi|_{S^1 \times S^{n-2}} = \varphi$.

Доказательство п. 3 теоремы 1.1. Покажем, что при $n \geq 4$ многообразие M^n гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ и пересечение $W^s_{\sigma_1} \cap W^u_{\sigma_{n-1}}$ либо пусто, либо состоит из конечного числа компонент связности.

Конечность числа компонент пересечения $W^s_{\sigma_1} \cap W^u_{\sigma_{n-1}}$ следует из наблюдения, что каждое из многообразий $W^s_{\sigma_1}, W^u_{\sigma_{n-1}}$ пересекает Σ_{f^t} по компактному подмножеству, следовательно, пересечения $W^s_{\sigma_1} \cap \Sigma_{f^t}, W^u_{\sigma_{n-1}} \cap \Sigma_{f^t}$ являются замкнутыми подмногообразиями Σ_{f^t}. Тогда пересечение $P = (W^s_{\sigma_1} \cap W^u_{\sigma_{n-1}}) \cap \Sigma_{f^t}$ также является замкнутым гладким подмногообразием и, следовательно, состоит из конечного числа компонент связности. Из утверждения 2.1 следует, что пересечение $W^s_{\sigma_1} \cap W^u_{\sigma_{n-1}}$ имеет структуру прямого произведения $P \times \mathbb{R}$, следовательно, также состоит из конечного числа компонент связности.

Для доказательства того, что многообразие M^n гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ определим некоторые модельные многообразия.

Введем на множестве $\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ отношение эквивалентности $\sim$ следующим образом: $(x_1, \ldots, x_n) \sim (y_1, \ldots, y_n)$ тогда и только тогда, когда существует целое m такое, что $y_i = 2^m x_i$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$. Обозначим через $\hat{A} = (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})/_\sim$ фактор-пространство по этому отношению эквивалентности и через $p : \mathbb{R}^n \setminus \{O\} \to \hat{A}$ естественную проекцию. Внутренность шарового слоя $A = \left\{(x_1, ..., x_n) : 1 \leq \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leq 4\right\}$ не содержит эквивалентных точек, а для любой точки, принадлежащей компоненте связности края $S_1^{n-1} = \left\{(x_1, ..., x_n) : x_1^2 + ... + x_n^2 = 1\right\}$, $S_2^{n-1} = \left\{(x_1, ..., x_n) : x_1^2 + ... + x_n^2 = 4\right\}$, найдется в точности одна эквивалентная ей точка. Поэтому пространство $\hat{A}$ гомеоморно многообразию, полученному из A отождествлением эквивалентных точек, принадлежащих сферам S_1^{n-1}, S_2^{n-1}. Из конструкции следует, что пространство $\hat{A}$ гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$.

Положим $K = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\} | \, x_n = 0\}$, $R^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\} | \, x_n > 0\}$, $R^n_- = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\} | \, x_n < 0\}$. Аналогично рассуждениям выше доказывается, что множество $\widehat{K} = p(K)$ гомеоморфно $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ и делит $\hat{A}$ на две компоненты связности $\widehat{R}^n_+ = p(R^n_+), \widehat{R}^n_- = p(R^n_-)$, замыкания которых гомеоморфны $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$.

Из предложения 2.3 следует, что секущая Σ_{f^t} делит многообразие M^n на две компоненты связности, замыкания которых Π_ω, Π_α гомеоморфны $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$.

Пусть $\psi_+ : \Pi_\omega \to cl\, \widehat{R}^n_+$ —произвольный гомеоморфизм. Из утверждения 2.2 следует, что ограничение гомеоморфизма ψ_+ на множество $\partial \Pi_\omega$ продолжается до гомеоморфизма $\psi_- : \Pi_\alpha \to cl, \widehat{R}^n_-$. Поэтому отображение $\Psi : M^n \to \hat{A}$, совпадающее с ψ_+ на множестве Π_ω и с ψ_- на множестве Π_α, является гомеоморфизмом. Таким образом, M^n гомеоморфно $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$. Теорема 1.1 доказана.

3. Топологическая классификация потоков из класса $G(M^n)$

Докажем теорему 1.2. Необходимость ее условий непосредственно следует из определения топологической эквивалентности потоков и свойств энергетической функции потока. Докажем достаточность. Предположим, что $f^t, g^t \in G(M^n)$ и существует гомеоморфизм $h : \Sigma_{f^t} \to \Sigma_{g^t}$, такой что $h(L^s_{f^t}) = L^s_{g^t}, h(L^u_{f^t}) = L^u_{g^t}$.

Построим гомеоморфизм $H : V_{f^t} \to V_{g^t}$, переводящий траектории потока f^t в траектории потока g^t. Пусть $\varphi, \varphi' : M^n \to R$ — энергетические функции для потоков f^t, g^t соответственно. Для $c \in (0, n)$ положим $\Sigma_c = \varphi^{-1}(c)$, $\Sigma'_c = {\varphi'}^{-1}(c)$. Пусть $x \in V_{f^t}$. Тогда найдется единственное число c и единственная точка $y \in \Sigma_{f^t}$, такие что $x \in \varphi^{-1}(c)$ и x принадлежит траектории l_y точки y. Снабдим штрихом обозначения аналогичных объектов для потока g^t.

Определим гомеоморфизм $H : V_{f^t} \to V_{g^t}$ формулой $H(l_y \cap \Sigma_c) = l^{'}_{h(y)} \cap \ \Sigma^{'}_c$, где $y \in \Sigma_{f^t}, c \in (0, n)$.

Покажем, что гомеоморфизм H продолжается на множества A_{f^t} и R_{f^t}. При $c \in (0, 1)$ поверхности уровня Σ_c являются гладкими сферами размерности $(n - 1)$. По построению гомеоморфизм H определен на множестве $\Sigma_c \setminus A_{f^t}$, являющемся сферой с двумя выколотыми точками (принадежащими A_{f^t}), поэтому его можно продолжить по непрерывности на всю сферу Σ_c и, следовательно, на множество $A_{f^t} \setminus \omega$. Аналогичным образом гомеоморфизм H продолжается на множество $R_{f^t} \setminus \alpha$ и далее по непрерывности на множество $\omega \cup \alpha$. Таким образом, построен гомеоморфизм $H : M^n \to M^n$, переводящий траектории потока f^t в траектории потока g^t с сохранением ориентации на траекториях. Теорема 1.2 доказана.

Благодарности. Публикация подготовлена в ходе проведения исследования (№ 21-04-004) в рамках Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)» в 2021–2022 гг.

Список литературы

1. Peixoto M. M. On the classification of flows on 2-manifolds // Proceedings Symposium Dynamical Systems / ed. by M. M. Peixoto. 1973. pp. 389–419.

2. Fleitas G. Classification of gradient-like flows in dimension two and three // Bol. Soc. Mat. Brasil. 1975. No. 6. pp. 155–183.

3. Уманский Я. Л. Необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности трехмерных динамических систем Морса-Смейла с конечным числом особых траекторий // Мат. сб. 1990. Т. 181, № 2. С. 212–239.

4. Smale S. Morse inequalities for a dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1960. Vol. 66. pp. 43–49.

5. Гринес В. З. Топологическая классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла с конечным множеством гетероклинических траекторий на поверхностях // Матем. заметки. 1993. Т. 54, № 3. С. 3–17.

6. Морозов А. И., Починка О. В. Комбинаторный инвариант для поверхностных диффеоморфизмов Морса-Смейла с ориентируемой гетероклиникой // Журнал Средневолжского математического общества. 2020. Т. 22, № 1. С. 71–80. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.22.202001.71-80

7. Smale S. Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 73, No. 6. pp. 747–817.

8. Meyer K. R. Energy functions for Morse-Smale systems // Amer. J. Math., 1968. Vol. 90, No. 4. pp. 1031–1040.

9. Matsumoto Y. An introduction to Morse theory. Oxford University Press, 2001. 9 p.

10. Rolfsen D. Knots and links. AMS Chelsea Publishing, 2003. 439 p.

11. Max N. L. Homeomorphism of $S^n \times S^1$ / com. by S. Smale // Bulletin of the American Mathematical Society. 1967. Vol. 73, No. 6. pp. 939–942.

Поступила 18.12.2021; доработана после рецензирования 9.02.2022
принята к публикации 24.02.2022

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. M. M. Peixoto, “On the classification of flows on 2-manifolds”, *Proceedings Symposium Dynamical Systems*, 1973, 389–419.

2. G. Fleitas, “Classification of gradient-like flows in dimension two and three”, *Bol. Soc. Mat. Brasil*, 1975, № 6, 155–183.

3. Ya. L. Umansky, “Necessary and sufficient conditions for topological equivalence of three-dimensional dynamical Morse-Smale systems with a finite number of singular trajectories”, *Math. Col.*, **181**:2 (1990), 212–239 (In Russ.).

4. S. Smale, “Morse inequalities for a dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66** (1960), 43–49.

5. V. Z. Grines, “Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms with a finite set of heteroclinic trajectories on surfaces”, *Math. notes*, **54**:3 (1993), 3–17 (In Russ.).

6. A. I. Morozov, O. V. Pochinka, “Combinatorial invariant for Morse-Smale surface diffeomorphisms with orientable heteroclinic”, *Journal of the Middle Volga Mathematical Society*, **22**:1 (2020), 71–80 (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.22.202001.71-80

7. S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.

8. K. R. Meyer, “Energy Functions for Morse–Smale Systems”, *Amer. J. Math.*, **90**:4 (1968), 1031–1040.

9. Y. Matsumoto, *An introduction to Morse theory*, Oxford University Press, 2001, 9 с.

10. D. Rolfsen, *Knots and links*, AMS Chelsea Publishing, 2003, 439 с.

11. N. L. Max, com. by S. Smale, “Homeomorphism of $S^n \times S^1$”, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **73**:6 (1967), 939–942.

Submitted 18.12.2021; Revised 9.02.2022; Accepted 24.02.2022

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.