DOI 10.15507/2079-6900.24.202201.21-30
Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.938.5

Динамичекие свойства прямых произведений дискретных динамических систем

М. К. Баринова, Е. К. Шустова

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

Аннотация. Естественным способом создания новых динамических систем является рассмотрение прямых произведений уже известных систем. Данная работа посвящена изучению некоторых динамических свойств прямых произведений гомеоморфизмов и диффеоморфизмов. В частности, доказывается, что цепно рекуррентное множество прямого произведения гомеоморфизмов является прямым произведением цепно рекуррентных множеств, а также, что прямое произведение диффеоморфизмов сохраняет гиперболическую структуру на прямом произведении гиперболических множеств. Известно, что если диффеоморфизм имеет гиперболическое цепно рекуррентное множество, то он является Ω-устройчивым. Таким образом, из результатов настоящей работы следует, что прямое произведение Ω-устойчивых диффеоморфизмов также является Ω-устойчивым. Еще один вопрос, затронутый в статье, касается существования энергетической функции – гладкой функции Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с цепно-рекуррентным множеством системы. Этот вопрос решается для прямого произведения диффеоморфизмов, уже обладающих энергетическими функциями. Доказывается, что в этом случае функция может быть найдена в виде взвешенной суммы их энергетических функций.

Ключевые слова: прямое произведение, гомеоморфизм, диффеоморфизм, гиперболическое множество, цепно рекуррентное множество, энергетическая функция

Для цитирования: М. К. Баринова, Е. К. Шустова Динамичекие свойства прямых произведений дискретных динамических систем // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 1. С. 21–30. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202201.21-30

Об авторах:

Баринова Марина Константиновна, старший научный сотрудник международной лаборатории динамических систем и приложений Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4406-583X, mkbarinova@yandex.ru

Шустова Евгения Константиновна, студент факультета информатики, математики и компьютерных наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4998-2186, ekshustova@gmail.com

Original article

MSC2020 37D20

Dynamical properties of direct products of discrete dynamical systems

M. K. Barinova, E. K. Shustova

National Research University «High School of Economics» (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

Abstract. A natural way for creating new dynamical systems is to consider direct products of already known systems. The paper studies some dynamical properties of direct products of homeomorphisms and diffeomorphisms. In particular, authors prove that a chain-recurrent set of the direct product of homeomorphisms is a direct product of the chain-recurrent sets. Another result established in the paper is that the direct product of diffeomorphisms holds hyperbolic structure on the direct product of hyperbolic sets. It is known that if a diffeomorphism has a hyperbolic chain-recurrent set, then this mapping is Ω-stable. Therefore, it follows from the results of the paper that the direct product of Ω-stable diffeomorphisms is also Ω-stable. Another question which is raised in the article concerns the existence of an energy function for the direct product of diffeomorphisms which already have such functions (recall that energy function is a smooth Lyapunov function whose set of critical points coincides with the chain-recurrent set of the system). Authors show that in this case the function can be found as a weighted sum of energy functions of initial diffeomorphisms.

Keywords: direct product, homeomorphism, diffeomorphism, hyperbolic set, chain recurrent set, energy function

For citation: *M. K. Barinova, E. K. Shustova.* Dynamical properties of direct products of discrete dynamical systems. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 24:1(2022), 21–30. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202201.21-30

About the authors:
Marina K. Barinova, Senior Research Fellow, National Research University «High School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4406-583X, mkbarinova@yandex.ru
Evgenia K. Shustova, student, Faculty of Informatics, Mathematics and Computer Science, National Research University «High School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: https://orcid.org/ 0000-0002-4998-2186, ekshustova@gmail.com

1. Введение

Согласно результатам Ч. Конли [1], энергетическая функция существует для любой динамической системы, а сам факт существования носит название «Фундаментальная теорема динамических систем».

В 1961 г. С. Смейлом [2] был получен первый результат по построению энергетической функции. В своей работе он доказал существование энергетической функции Морса у градиентно-подобных потоков. Затем в 1968 г. К. Мейер [3] обобщил результат Смейла, построив энергетическую функцию Морса-Ботта для произвольного потока Морса-Смейла. Дж. Фрэнкс в 1985 г. [4] доказал, что у любого гладкого потока на компактном многообразии есть энергетическая функция. Кроме того, в 2020 г. была построена энергетическая функция Морса-Ботта для поверхностных Ω-устойчивых потоков [5]. Таким образом, вопрос о существовании такой функции для непрерывных динамических систем был решен, однако открытым оставался вопрос, какие дискретные системы допускают энергетические функции. Первые результаты в этой области были получены Д. Пикстоном: в 1977 г. [6] он доказал существование энергетической функции Морса у любого диффеоморфизма Морса-Смейла на поверхности. Однако даже регулярные диффеоморфизмы на многообразиях размерности $n \geqslant 3$ не обязательно обладают такой функцией. Именно Пикстон в 1977 г. первым построил пример диффеоморфизма на 3-сфере, не имеющего энергетической функции. Этот эффект связан с диким вложением сепаратрис седловых точек в объемлющее многообразие. В. З. Гринес, Ф. Лауденбах и О. В. Починка в 2012 г. [7] нашли достаточные условия существования энергетической функции для 3-диффеоморфизмов Морса-Смейла. Кроме того, в настоящее время активно изучается вопрос существования энергетических функций для Ω-устойчивых диффеоморфизмов с хаотической динамикой, заданных на 2- и 3-многообразиях. В работах В. З Гринеса, М. К Бариновой, О. В Починки были доказаны такие факты, как существование гладкой энергетической функции у поверхностных диффеоморфизмов с одномерными нетривиальными базисными множествами [8] и у некоторых классов трехмерных каскадов с гиперболической хаотической динамикой [9–11], а также отсутствие энергетической функции у поверхностных диффеоморфизмов с нульмерными базисными множествами без пар [12].

2. Формулировка основных результатов

Пусть M_1 и M_2 — метрические пространства с метриками d_1 и d_2 соответственно. Тогда $M = M_1 \times M_2$ с метрикой d, введенной следующим образом:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d_1^2(x_1, x_2) + d_2^2(y_1, y_2)}, \quad \text{где } (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in M,$$

также является метрическим пространством. *Прямым произведением гомеоморфизмов* $f : M_1 \to M_1$ и $g : M_2 \to M_2$ называют гомеоморфизм $f \times g$, который действует на $M = M_1 \times M_2$ следующим образом: если $(x, y) \in M$, то $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$.

В теории динамических систем широко используется такой тип возвращаемости, как цепно рекуррентные точки, определяемый с помощью ε-цепей. *ε-цепью длины n*, соединяющей точку x с точкой y для каскада $f : M \to M$ называется последовательность $x = x_0, \dots, x_n = y$ точек в M, такая что $d(f(x_{i-1}), x_i) < \varepsilon$ для $1 \leqslant i \leqslant n$. Точка $x \in M$ называется *цепно рекуррентной* для каскада f, если для любого $\varepsilon > 0$ существует n, зависящее от ε, и ε-цепь длины n, соединяющая точку x с ней самой (см. Рис. 2.1).

На множестве R_f можно ввести отношение эквивалентности $\sim$ следующим образом: $x \sim y$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует ε-цепь, соединяющая точку x с точкой y, и ε-цепь, соединяющая точку y с точкой x. Две такие точки называются *цепно эквивалентными*, класс эквивалентности – *цепной компонентой*, а множество всех цепно рекуррентных точек называется *цепно рекуррентным множеством* и обозначается R_f.

Первый результат данной работы касается структуры цепно рекуррентного множества прямого произведения гомеоморфизмов.

Теорема 2.1. *Цепно рекуррентное множество прямого произведения $f \times g$ гомеоморфизмов f и g совпадает с прямым произведением их цепно рекуррентных*

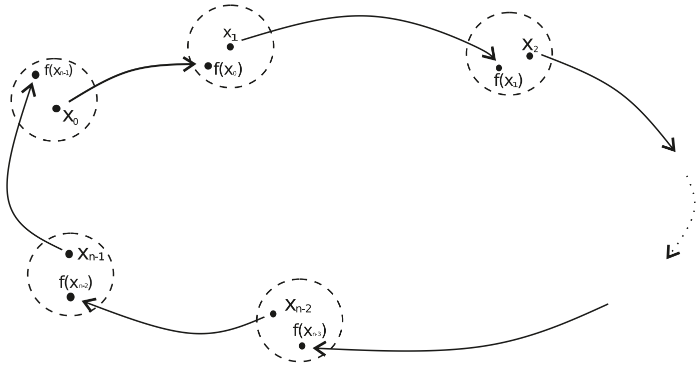

Рис. 2.1. Цепно рекуррентная точка
Fig 2.1. Chain recurrent point

множеств, причем каждая цепная компонента гомеоморфизма $f \times g$ является прямым произведением некоторых цепных компонент f и g.

Пусть $f : M^n \to M^n$ — диффеоморфизм, заданный на гладком замкнутом многообразии размерности n. Компактное f-инвариантное множество $\Lambda \subset int\ M^n$ называется *гиперболическим*, если для каждого $x \in \Lambda$ касательное пространство T_xM^n представляется в виде прямой суммы подпространств E^s_x, E^u_x, $T_xM^n = E^s_x \oplus E^u_x$, такой что

а) $Df(E^s_x) = E^s_{f(x)}$, $Df(E^u_x) = E^u_{f(x)}$;

б) для некоторых фиксированных $c > 0$ и $0 < \lambda < 1$

$$||Df^k(v)|| \leqslant c\lambda^k||v||,\ v \in E^s_x, \quad k > 0,$$

$$||Df^{-k}(v)|| \leqslant c\lambda^k||v||,\ v \in E^u_x, \quad k > 0;$$

в) E^s_x, E^u_x меняются непрерывно при изменении $x \in \Lambda$.

Следующая теорема касается гиперболичности прямого произведения гиперболических множеств.

Теорема 2.2. *Прямое произведение гиперболических множеств Λ_f и Λ_g диффеоморфизмов f и g является гиперболическим множеством диффеоморфизма $f \times g$.*

Условие гиперболичности цепно рекуррентного множества диффеоморфизма эквивалентно Ω-устойчивости системы (см., например, [13]). Тогда результат, сформулированный ниже, является непосредственным следствием теорем 2.1 и 2.2.

Следствие 2.1. *Если диффеоморфизмы f и g являются Ω-устойчивыми, то их прямое произведение $f \times g$ также будет Ω-устойчивым диффеоморфизмом.*

Функцией Ляпунова [1] для диффеоморфизма $f : M^n \to M^n$ называется непрерывная функция $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ со следующими свойствами:

1) если $x \notin R_f$, то $\varphi(f(x)) < \varphi(x)$;

2) если $x, y \in R_f$, то $\varphi(x) = \varphi(y)$ тогда и только тогда, когда x и y лежат в одной цепной компоненте;

3) $\varphi(R_f)$ — компактное нигде не плотное подмножество прямой R.

Гладкая функция Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с цепно рекуррентным множеством системы, называется *энергетической функцией* [3].

Сформулируем теорему о существовании энергетической функции для прямого произведения диффеоморфизмов.

Теорема 2.3. *Если Ω-устойчивые диффеоморфизмы f и g обладают энергетической функцией, то их прямое произведение $f \times g$ будет иметь энергетическую функцию в виде взвешенной суммы энергетических функций для диффеоморфизмов f и g.*

Доказательство этой теоремы будет проведено в п. 5.

3. Цепно рекуррентное множество прямого произведения гомеоморфизмов

Докажем теорему 2.1, а именно: цепно рекуррентное множество прямого произведения гомеоморфизмов совпадает с прямым произведением их цепно рекуррентных множеств.

Доказательство. Докажем, что $R_f \times R_g = R_{f\times g}$, где R_f, R_g, $R_{f\times g}$ — цепно рекуррентные множества гомеоморфизмов f, g и $f \times g$ соответственно. Для этого покажем включение в обе стороны.

1. $R_f \times R_g \subset R_{f\times g}$

Пусть точка $x \in R_f$, тогда $\forall \varepsilon > 0$ существует $\varepsilon/2$-цепь $x = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = x$ длины n, такая что $d_1(f(x_{i-1}), x_i) < \varepsilon/2$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Пусть точка $y \in R_g$, тогда $\forall \varepsilon > 0$ существует $\varepsilon/2$-цепь $y = y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}, y_k = y$ длины k, такая что $d_2(g(y_{i-1}), y_i) < \varepsilon/2$ для всех $i = 1, \ldots, k$.

Очевидно, что последовательности $\underbrace{x_0, \ldots, x_{n-1}, x_0, \ldots, x_{n-1}, x_0, \ldots, x_{n-1}}_{k \text{ раз}}, x_n$ и $\underbrace{y_0, \ldots, y_{k-1}, y_0, \ldots, y_{k-1}, y_0 \ldots, y_{k-1}}_{n \text{ раз}}, y_k$ являются $\varepsilon/2$-цепями длины n и k гомеоморфизмов f и g соответственно, соединяющими точки x и y с собой. Докажем, что последовательность точек, составленная из этих двух цепей, является ε-цепью длины nk гомеоморфизма $f \times g$ для точки $(x, y) \in R_f \times R_g$, соединяющей её с собой, т. е. для последовательности $(x, y) = (\tilde{x}_0, \tilde{y}_0), (\tilde{x}_1, \tilde{y}_1), \ldots, (\tilde{x}_{nk}, \tilde{y}_{nk}) = (x, y)$, где $\tilde{x}_i = x_{i \ mod \ n}$ и $\tilde{y}_i = y_{i \ mod \ k}$, верны оценки $d((f(\tilde{x}_{i-1}), g(\tilde{y}_{i-1})), (\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)) < \varepsilon$ для всех $i = 1, \ldots, nk$. Из неравенства треугольника и определения метрики d получаем:

$$d((f(\tilde{x}_{i-1}), g(\tilde{y}_{i-1})), (\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)) \leqslant d((f(\tilde{x}_{i-1}), g(\tilde{y}_{i-1})), (\tilde{x}_i, g(\tilde{y}_{i-1}))) + d((\tilde{x}_i, g(\tilde{y}_{i-1})), (\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)) =$$

$$= d_1(f(\tilde{x}_{i-1}), \tilde{x}_i) + d_2(g(\tilde{y}_{i-1}), \tilde{y}_i) =$$

$$= d_1(f(x_{i-1}(mod\ n)), x_i(mod\ n)) + d_2(g(y_{i-1}(mod\ n)), y_{i\ mod\ n}) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Таким образом, точки $(x, y) \in R_f \times R_g$ являются цепно рекуррентными.

Следовательно, мы доказали, что прямое произведение цепно рекуррентных множеств гомеоморфизмов включено в цепно рекуррентное множество их прямого произведения.

2. $R_f \times R_g \supset R_{f\times g}$.

Пусть точка $(x,y)\in R_{f\times g}$, тогда $\forall\varepsilon>0$ существует ε-цепь $(x,y) = (x_0,y_0),(x_1, y_1),\ldots,(x_{n-1},y_{n-1}),(x_n,y_n)=(x,y)$ длины n, такая что $d((f\times g)(x_{i-1},y_{i-1}),(x_i,y_i))<\varepsilon$ для всех $i=1,\ldots,n$. По определению метрики прямого произведения:

$$d((f(x_{i-1}),g(y_{i-1})),(x_i,y_i))=\sqrt{d_1^2(f(x_{i-1}),x_i)+d_2^2(g(y_{i-1}),y_i)}<\varepsilon,$$

а значит

$$d_1(f(x_{i-1}),x_i)<\varepsilon \text{ и } d_2(g(y_{i-1}),y_i)<\varepsilon.$$

Таким образом, $\forall\varepsilon>0$ последовательности $x_0,x_1,\ldots,x_n$ и $y_0,y_1,\ldots,y_n$ являются ε-цепями, соединяющими точки x и y с собой, т. е. $x\in R_f$, $y\in R_g$. Следовательно, обратное включение тоже доказано.

Аналогичным образом доказывается, что каждая цепная компонента гомеоморфизма $f\times g$ является прямым произведением некоторых цепных компонент f и g.

4. Прямое произведение гиперболических множеств

В данном разделе докажем теорему 2.2.

Доказательство. Пусть f и g — диффеоморфизмы, заданные на гладких замкнутых многообразиях M^n и M^k соответственно, с гиперболическими множествами Λ_f и Λ_g. Докажем, что множество $\Lambda=\Lambda_f\times\Lambda_g$ является гиперболическим для диффеоморфизма $f\times g$, заданного на многообразии $M=M^n\times M^k$, по определению.

Рассмотрим произвольную точку $(x,y)\in\Lambda$. По определению прямого произведения Римановых многообразий касательное пространство $T_{(x,y)}M=T_xM^n\times T_yM^k$. Докажем, что $T_{(x,y)}M$ представляется в виде прямой суммы подпространств $E^s_{(x,y)}$, $E^u_{(x,y)}$, $T_{(x,y)}M=E^s_{(x,y)}\oplus E^u_{(x,y)}$. Поскольку Λ_f и Λ_g — гиперболические, то $T_xM^n=E^s_x\oplus E^u_x$ и $T_yM^k=E^s_y\oplus E^u_y$. Для любого $(v,w)\in T_{(x,y)}M$: $v\in T_xM^n$, $w\in T_yM^k$ и по определению прямой суммы существуют единственные представления $v=v^s+v^u$, $v^s\in E^s_x$, $v^u\in E^u_x$, и $w=w^s+w^u$, $w^s\in E^s_y$, $w^u\in E^u_y$. Тогда справедлива цепочка равенств:

$$(v,w)=(v^s_x,0)+(v^u_x,0)+(0,w^s_y)+(0,w^u_y)=(v^s_x,w^s_y)+(w^u_x,w^u_y),$$

причем данное представление в виде суммы единственно. Таким образом, $E^s_{(x,y)}=E^s_x\times E^s_y$ и $E^u_{(x,y)}=E^u_x\times E^u_y$. Проверим выполнение остальных условий определения:

а) матрица, определяющая дифференциал $D(f\times g)$, имеет блочно-диагональный вид с блоками Df и Dg, поэтому $D(f\times g)(E^s_{(x,y)})=E^s_{(f(x),g(y))}$, $D(f\times g)(E^u_{(x,y)})=E^u_{(f(x),g(y))}$;

б) докажем оценки действия дифференциала $D(f\times g)$ на $E^s_{(x,y)}$ (для $E^u_{(x,y)}$ доказательство аналогично). Существуют константы $c_f,c_g>0$ и $0<\lambda_f,\lambda_g<1$

$$||Df^m(v)||\leqslant c_f\lambda_f^m||v||,\ v\in E^s_x, m>0,$$
$$||Dg^m(w)||\leqslant c_g\lambda_g^m||w||,\ w\in E^s_y, m>0,$$

и

$$||D(f\times g)^m(v,w)||=||(Df^m(v),Dg^m(w))||=\sqrt{(||Df^m(v)||^2+||Dg^m(w)||^2)}\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{(c_f\lambda_f^m||v||)^2+(c_g\lambda_g^m||w||)^2}\leqslant c_{f\times g}\lambda^m_{f\times g}\sqrt{||v||^2+||w||^2}=c_{f\times g}\lambda^m_{f\times g}||(v,w)||,$$

где $c_{f\times g}=max\{c_f,c_g\}$, $\lambda_{f\times g}=max\{\lambda_f,\lambda_g\}$, $(v,w)\in E^s_{(x,y)}$ и $m>0$;

в) непрерывность $E^s_{(x,y)}$, $E^u_{(x,y)}$ непосредственно следует из непрерывности E^s_x, E^u_x, E^s_y, E^u_y.

Таким образом, Λ – гиперболическое множество.

5. Энергетическая функция для прямого произведения

В данном разделе мы докажем теорему 2.3.

Доказательство. Пусть M^n и M^k — гладкие замкнутые многообразия и $\varphi_f : M^n \to \mathbb{R}$ и $\varphi_g : M^k \to \mathbb{R}$ — энергетические функции для Ω-устойчивых диффеоморфизмов $f : M^n \to M^n$ и $g : M^k \to M^k$ соответственно. В силу теоремы о спектральном разложении Смейла диффеоморфизмы f, g имеют конечное число цепных компонент, т. е. $R_f = C^1_f \cup \dots \cup C^l_f$ и $R_g = C^1_g \cup \dots \cup C^m_g$. Выберем положительные константы a и b таким образом, что a — это обратное к разности между максимальным и минимальным значением функции φ_f на цепных компонентах диффеоморфизма f, а $b/2$ — обратное к минимальной разности между значениями функции φ_g на различных цепных компонентах диффеоморфизма g, т. е.

$$a = \begin{cases} \dfrac{1}{\max\limits_{i\neq j} |\varphi_f(C^i_f) - \varphi_f(C^j_f)|}, & \text{если } l > 1,\\ 1, & \text{если } l = 1, \end{cases} \tag{5.1}$$

$$b = \begin{cases} \dfrac{2}{\min\limits_{i\neq j} |\varphi_g(C^i_g) - \varphi_g(C^j_g)|}, & \text{если } m > 1,\\ 1, & \text{если } m = 1. \end{cases} \tag{5.2}$$

Докажем, что $\varphi = a\varphi_f + b\varphi_g : M^n \times M^k \to \mathbb{R}$ — энергетическая функция для прямого произведения диффеоморфизмов f и g. Для этого проверим выполнение следующих условий:

1) φ — функция Ляпунова для $f \times g$;

2) φ — гладкая;

3) множество критических точек $Cr(\varphi)$ совпадает с $R_{f\times g}$.

1. Докажем сначала убывание вдоль траекторий вне цепно рекуррентного множества. Рассмотрим точку $(x, y) \notin R_{f\times g}$, такую что $x \in M^n$, $y \in M^k$. Из теоремы 2.1 следует, что

$$(x, y) \in R_{f\times g} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in R_f,\\ y \in R_g. \end{cases}$$

Значит, если $(x, y) \notin R_{f\times g}$, то либо $x \notin R_f$ и $\varphi_f(f(x)) < \varphi_f(x)$, либо $y \notin R_g$ и $\varphi_g(g(y)) < \varphi_g(y)$. Тогда

$$\varphi((f \times g)(x, y)) = a\varphi_f(f(x)) + b\varphi_g(g(y)) < a\varphi_f(x) + b\varphi_g(y) = \varphi(x, y),$$

т. е. функция φ убывает вдоль блуждающих орбит.

Докажем, что если (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in R_{f\times g}$, то $\varphi(x_1, y_1) = \varphi(x_2, y_2)$ тогда и только тогда, когда (x_1, y_1) и (x_2, y_2) лежат в одной цепной компоненте.

Пусть $\varphi(x_1, y_1) = \varphi(x_2, y_2)$, тогда

$$\varphi(x_1, y_1) = a\varphi_f(x_1)+b\varphi_g(y_1) = a(\varphi_f(x_1)-\varphi_f(x_2))+b(\varphi_g(y_1)-\varphi_g(y_2))+a\varphi_f(x_2)+a\varphi_g(y_2) =$$

$$= a(\varphi_f(x_1) - \varphi_f(x_2)) + b(\varphi_g(y_1) - \varphi_g(y_2)) + \varphi(x_2, y_2),$$

а значит

$$a(\varphi_f(x_1) - \varphi_f(x_2)) = -b(\varphi_g(y_1) - \varphi_g(y_2))$$

и

$$a|\varphi_f(x_1) - \varphi_f(x_2)| = b|\varphi_g(y_1) - \varphi_g(y_2)|. \tag{5.3}$$

Предположим, что (x_1, y_1) и (x_2, y_2) лежат в разных цепных компонентах. Тогда из уравнения 5.3 и теоремы 2.1 следует, что y_1, y_2 лежат в разных цепных компонентах диффеоморфизма g. Из определения констант a и b следует верность следующих неравенств:

$$a|\varphi_f(x_1) - \varphi_f(x_2)| \leqslant a \max_{i\neq j} |\varphi_f(C^i_f) - \varphi_f(C^j_f)| = 1;$$

$$b|\varphi_g(y_1) - \varphi_g(y_2)| \geqslant b \min_{i\neq j} |\varphi_g(C^i_g) - \varphi_g(C^j_g)| = 2.$$

Таким образом, равенство 5.3 выполняется только когда (x_1, y_1) и (x_2, y_2) лежат в одной цепной компоненте.

Пусть (x_1, y_1) и (x_2, y_2) лежат в одной цепной компоненте $C_{f\times g}$, тогда существуют цепные компоненты C^i_f, C^j_g диффеоморфизмов f и g соответственно, такие что $x_1, x_2 \in$ $\in C^i_f$, $y_1, y_2 \in C^j_g$. Следовательно, $\varphi_f(x_1) = \varphi_f(x_2)$ и $\varphi_g(y_1) = \varphi_g(y_2)$.

Тогда

$$\varphi(x_1, y_1) = a\varphi_f(x_1) + b\varphi_g(y_1) = a\varphi_f(x_2) + b\varphi_g(y_2) = \varphi(x_2, y_2).$$

2. Функция φ – гладкая как линейная комбинация гладких функций.

3. Покажем, что градиент функции φ обращается в ноль только в цепно рекуррентных точках.

$\forall (x, y) \in M$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in M^n$, $y = (y_1, \ldots, y_k) \in M^k$;

$$grad\ \varphi = a((\varphi_f)'_{x_1}, \ldots, (\varphi_f)'_{x_n}, 0, \ldots, 0) + b(0, \ldots, 0, (\varphi_g)'_{y_1}, \ldots, (\varphi_g)'_{y_k}) =$$

$$= (a(\varphi_f)'_{x_1}, \ldots, a(\varphi_f)'_{x_n}, b(\varphi_g)'_{y_1}, \ldots, b(\varphi_g)'_{y_k}),$$

т. е.

$$grad\ \varphi = 0 \Leftrightarrow grad\ \varphi_f = 0 \text{ и } grad\ \varphi_g = 0.$$

Таким образом, $\varphi = a\varphi_f + b\varphi_g$ — энергетическая функция для диффеоморфизма $f \times g$.

Благодарности. Исследование динамики диффеоморфизмов рассматриваемого класса поддержано грантом РНФ (проект № 21-11-00010), построение энергетической функции поддержано Лабораторией ДСП, НИУ ВШЭ, грантом правительства РФ (договор № 075-15-2019-1931).

Список литературы

1. Conley C. Isolated Invariant Sets and Morse Index // Am. Math. Soc. 1978. Vol. 38. DOI: https://doi.org/10.1090/cbms/038
2. Smale S. On gradient dynamical systems //Annals Math. 1961. Vol. 74. pp. 199–206.
3. Meyer K. R. Energy functions for Morse–Smale systems // Amer. J. Math. 1968. Vol. 90. pp. 1031–1040.
4. Franks J. Nonsingular Smale flow on S3 // Topology. 1985. Vol. 24, No. 3. pp. 265–282.
5. Колобянина А. Е., Круглов В. Е. Энергетическая функция Морса-Ботта для поверхностных Ω-устойчивых потоков // Журнал СВМО. 2020. Т. 22, №. 4. С. 434–441. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.22.202004.434-441
6. Pixton D. Wild unstable manifolds// Topology. 1977. Vol. 16. pp. 167–172.
7. Grines V. Z., Laudenbach F., Pochinka O. V. Dynamically ordered energy function for Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds// Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2012. Vol. 278. pp. 27–40. DOI: https://doi.org/10.1134/S0081543812060041
8. Гринес В. З., Носкова М. К., Починка О. В. Энергетическая функция для A-диффеоморфизмов поверхностей с одномерными нетривиальными базисными множествами // Динамические системы. 2015. Vol. 5, No. 1–2. pp. 31–37.
9. Barinova M., Grines V., Pochinka O., Yu B. Existence of an energy function for three-dimensional chaotic «sink-source» cascades // Chaos. 2021. Vol. 31, No. 6. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2009.10457
10. Гринес В. З., Носкова М. К., Починка О. В. Построение энергетической функции для трёхмерных каскадов с двумерным растягивающимся аттрактором // Труды ММО. 2015. Vol. 76, No. 2. pp. 271–286.
11. Гринес В. З., Носкова М. К., Починка О. В. Построение энергетической функции для A-диффеоморфизмов с двумерным неблуждающим множеством на 3-многообразиях // Труды СВМО. 2015.Vol. 17, No. 3. pp. 12–17.
12. Barinova M. On Existence of an Energy Function for Ω-stable Surface Diffeomorphisms // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. Vol. 43, No. 2. pp. 257–263.
13. Robinson C. Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos //Studies in Adv. Math. 1999. 506 p.

Поступила 21.11.2021; доработана после рецензирования 16.01.2022; принята к публикации 24.02.2022

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. C. Conley, “Isolated Invariant Sets and Morse Index”, *Am. Math. Soc.*, **38** (1978). DOI: https://doi.org/10.1090/cbms/038

2. S. Smale, “On gradient dynamical systems”, *Annals Math.*, **74** (1961), 199–206.

3. K. Meyer, “Energy functions for Morse-Smale systems”, *Amer. J. Math.*, **90** (1968), 1031–1040.

4. J. Franks, “Nonsingular Smale flow on S3”, *Topology*, **24**:3 (1985), 265–282.

5. A. E. Kolobyanina, V. E. Kruglov, “Morse-Bott energy function for surface Ω-stable flows”, *Zhurnal SVMO*, **22**:4 (2020), 434–441.

6. D. Pixton, “Wild unstable manifolds”, *Topology*, **16** (1977), 167–172.

7. V. Z. Grines,F. Laudenbach, O. V. Pochinka, “Dynamically ordered energy function for Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **278** (2012), 27–40. DOI: https://doi.org/10.1134/S0081543812060041

8. V. Z. Grines, M. K. Noskova, O. V. Pochinka, “Construction of an energy function for A-diffeomorphisms of one-dimensional non-trivial basic sets”, *Dynamic Systems*, **5**:1-2 (2015), 31–37.

9. M. Barinova, V. Grines, O. Pochinka, B. Yu, “Existence of an energy function for three-dimensional chaotic “sink-source”’ cascades jour Chaos”, **31**:6 (2021). DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2009.10457

10. V. Z. Grines, M. K. Noskova, O. V. Pochinka, “The construction of an energy function for three-dimensional cascades with a two-dimensional expanding attractor”, *Tr. Mosk. Mat. Obs.*, **76**:2 (2015), 271–286.

11. V. Z. Grines, M. K. Noskova, O. V. Pochinka, “Construction of an energy function for A-diffeomorphisms of two-dimensional non-wandering sets on 3-manifolds”, *Zhurnal SVMO*, **17**:3 (2015), 12–17.

12. M. Barinova, “On existence of an energy function for Ω-stable surface diffeomorphisms”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **43**:2 (2022), 257–263.

13. C. Robinson, “Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos”, *Studies in Adv. Math.*, 1999.

Submitted 21.11.2021; Revised 16.01.2022; Accepted 24.02.2022

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.