DOI 10.15507/2079-6900.23.202104.379–393
Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.938

О топологии многообразий, допускающих градиентно-подобные каскады с поверхностной динамикой, и росте числа некомпактных гетероклинических кривых

В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, Е. И. Яковлев

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

Аннотация. В работе рассматривается класс $GSD(M^3)$ градиентно-подобных диффеоморфизмов с поверхностной динамикой, заданных на замкнутом ориентированном многообразии M^3 размерности три. Ранее было доказано, что многообразия, допускающие такие диффеоморфизмы, являются локально-тривиальными расслоениями над окружностью со слоем, диффеоморфным замкнутой ориентируемой поверхности рода g, а число некомпактных гетероклинических кривых таких многообразий – не менее $12g$. В настоящей работе выделяется класс диффеоморфизмов $GSDR(M^3) \subset GSD(M^3)$, имеющих минимальное число гетероклинических кривых для данного числа периодических точек, и доказывается, что несущее многообразие таких диффеоморфизмов является зейфертовым. Сепаратрисы периодических точек диффеоморфизмов из класса $GSDR(M^3)$ обладают регулярным асимптотическим поведением, в частности, их замыкания являются ручно вложенными. Кроме того, приводятся достаточные условия (не связанные с динамикой) того, что локально-тривиальное расслоение над окружностью является зейфертовым. В то же время в работе устанавливается, что для любого фиксированного $g \geq 1$, фиксированного числа периодических точек и любого целого $n \geq 12g$ существует многообразие M^3 и диффеоморфизм $f \in GSD(M^3)$, имеющий в точности n некомпактных гетероклинических кривых.

Ключевые слова: градиентно-подобный каскад, поверхностная динамика, топологическая классификация, некомпактная гетероклиническая кривая, Зейфертово многообразие

Для цитирования: Гринес В.З., Гуревич Е. Я., Яковлев Е. И. О топологии многообразий, допускающих градиентно-подобные каскады с поверхностной динамикой и росте числа некомпактных гетероклинических кривых // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 4. С. 379–393. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202104.379–393

1. Введение и формулировка результатов

Будем говорить, что Ω-устойчивый диффеоморфизм $f : M^3 \to M^3$ *имеет поверхностную динамику (является SD-диффеоморфизмом)*, если его неблуждающее множество Ω_f состоит из двух непересекающихся семейств Ω_+, Ω_- базисных множеств, таких что множества $\mathcal{A}_f = W^u_{\Omega_+}$ и $\mathcal{R}_f = W^s_{\Omega_-}$ не пересекаются и каждая компонента связности множеств $\mathcal{A}_f$ и $\mathcal{R}_f$ является локально плоской ориентируемой поверхностью S_g некоторого рода g[1]

[1]Пусть $\mathbb{S}_g$ — ориентируемая поверхность (замкнутое двумерное многообразие) рода g и $e : \mathbb{S}_g \to M^3$ — топологическое вложение. Поверхность $S_g = e(\mathbb{S}_g)$ называется *локально плоской*, если для каждой точки $p \in S_g$ существует окрестность $U_p \subset M^3$ и гомеоморфизм $h_p : U_p \to \mathbb{R}^3$, такие что множество $h_p(S_g \cap U_p)$ является координатной плоскостью в $\mathbb{R}^3$.

Впервые SD-диффеоморфизмы появились в работе [1]. Наиболее полные результаты, касающиеся SD-диффеоморфизмов с нерегулярной динамикой получены в [2]. В этой работе было доказано, что любой структурно-устойчивый диффеоморфизм, заданный на трехмерном замкнутом многообразии, неблуждающее множество которого состоит из двумерных базисных множеств, имеет поверхностную динамику. Более того, такой диффеоморфизм локально представляется как прямое произведение гиперболического автоморфизма тора и структурно устойчивого диффеоморфизма окружности.

Напомним, что диффеоморфизм $f : M^n \to M^n$ замкнутого многообразия M^n называется *градиентно-подобным*, если выполняются следующие условия:

1) неблуждающее множество Ω_f диффеоморфизма f состоит из конечного числа гиперболических периодических точек;

2) инвариантные многообразия периодических точек пересекаются трансверсально;

3) из условия $W^s_p \cup W^u_q \neq \emptyset$ следует, что $dim\, W^u_q > dim\, W^u_p$.

Если пересечение $W^s_p \cup W^u_q$ инвариантных многообразий различных седловых периодических точек p, q непусто, то оно называется *гетероклиническим пересечением.* При этом если гетероклиническое пересечение одномерно, то каждая его компонента связности называется *гетероклинической кривой.*

Будем говорить, что сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $f : M^n \to M^n$ является *градиентно-подобным диффеоморфизмом с поверхностной динамикой (принадлежит классу $GSD(M^3)$)*, если множество его седловых периодических точек распадается на два непересекающихся подмножества Σ_a, Σ_r, таких что множества $\mathcal{A}_{f^t} = W^u_{\Sigma_a} \cup \Omega^0$, $\mathcal{R}_{f^t} = W^s_{\Sigma_r} \cup \Omega^3$ не пересекаются и каждая компонента связности множеств $\mathcal{A}_f$ и $\mathcal{R}_f$ является локально плоской ориентируемой поверхностью.

В работе [3] показано, что для любого $f \in GSD(M^3)$ существует число $g_f \geq 0$ и сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $\tau_f : \mathbb{S}_{g_f} \to \mathbb{S}_{g_f}$ такие, что несущее многообразие M^3 диффеоморфно фактор-пространству $M^3_{g_f,\tau_f}$ прямого произведения $\mathbb{S}_{g_f} \times [0,1]/\sim$, по отношению эквивалентности $(z,1) \sim (\tau(z),0)$, $z \in \mathbb{S}_{g_f}$. Кроме того, число некомпактных гетероклинических кривых диффеоморфизма $f \in GSD(M^3_{g_f,\tau_f})$ больше или равно $12 g_f k_f$, где k_f — число компонент множества $\mathcal{A}_f(\mathcal{R}_f)$, и нижняя оценка достигается, например, для многообразий, диффеоморфных прямому произведению $\mathbb{S}_g \times \mathbb{S}^1$.

В работах [4–5], был введен класс градиентно-подобных потоков с поверхностной динамикой и получены достаточные условия того, чтобы несущее многообразие такого потока являлось зейфертовым многообразием. Аналогично этим работам мы введем понятие регулярного асимптотического поведения сепаратрис диффеоморфизма $f \in GSD(M^3)$ и доказываем следующие факты.

Теорема 1.1 *Пусть многообразие $M^3_{g,\tau}$ допускает диффеоморфизм из класса $GSD(M^3_{g,\tau})$ с регулярным асимптотическим поведением сепаратрис. Тогда диффеомофизм τ является периодическим, а многообразие $M^3_{g,\tau}$ – зейфертовым.*

Следующая теорема, доказательство которой приводится в этой работе, доказывает, что достижимо любое (наперед заданное) число некомпактных гетероклинических кривых.

Теорема 1.2 *Для любых фиксированных $g \geq 1, k \geq 1$ и любого $n \geq 12gk$ существует диффеоморфизм $\tau(n) : \mathbb{S}_g \to \mathbb{S}_g$ и GSD-диффеоморфизм на многообразии $M_{g,\tau(n)}$, число некомпактных гетероклинических кривых которого равно n при фиксированном числе периодических точек, равном $4k(1+g)$.*

2. SD-диффеоморфизмы с регулярным асимптотическим поведеним сепаратрис

В этом разделе вводится понятие регулярного асимптотического поведения сепаратрис. В начале приведем некоторые вспомогательные факты, касающиеся динамики градиентно-подобных SD-каскадов.

Напомним, что инвариантное множество A называется *аттрактором* диффеоморфизма f, если существует замкнутая окрестность (которая называется захватывающей окрестностью) $V \subset M^3$, такая что $f(V) \subset int\, V$ и $A = \bigcap\limits_{n>0} f^n(V)$. Множество R называется *репеллером* диффеоморфизма f если оно является аттрактором для f^{-t}.

Следующее утверждение доказано в [3] (см. теоремы 1–4 и следствие 2), [6] (см. лемма 1, теорема 1).

П р е д л о ж е н и е 2.1 *Пусть $f^t \in GSD(M^3)$. Тогда существуют целые $k_{f^t}, g_{f^t} \geq 0$ и сохраняющий ориентацию диффеоморфизм τ_{f^t} ориентируемой поверхности $\mathbb{S}_{g_{f^t}}$ рода g_{f^t}, такие что:*

1) множества $\mathcal{A}_{f^t}, \mathcal{R}_{f^t}$ состоят из одного и того же числа k_{f^t} компонент связности, каждая из которых гомеоморфна $\mathbb{S}_{g_{f^t}}$.

2) каждая компонентна связности $\mathcal{A}_{f^t}(\mathcal{R}_{f^t})$ является аттрактором (репеллером);

3) замыкание каждой компоненты связности множества $M^3 \setminus (\mathcal{A}_{f^t} \cup \mathcal{R}_{f^t})$ гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}_{g_{f^t}} \times [0,1]$;

4) многообразие M^3 диффеоморфно фактор-пространству $M_{g_{f^t}, \tau_{f^t}} = \mathbb{S}_{g_{f^t}} \times [0,1]/\sim$ по отношению эквивалентности $(z,1) \sim (\tau_{f^t}(z), 0)$; 5) диффеоморфизм f имеет не менее $12 g_f k_f$ некомпактных гетероклинических кривых, не менее $8 g_f$ из которых принадлежит множеству $\mathcal{A}_f \cup \mathcal{R}_f$.

Обозначим через Ω^i_f множество всех периодических точек диффеоморфизма f, размерность неустойчивого многообразия которых равна $i \in \{0,1,2,3\}$.

Пусть V — компонента связности множества $M^3 \setminus (\mathcal{A}_{f^t} \cup \mathcal{R}_{f^t})$. Тогда в силу предложения 2.1 существуют компоненты связности A, R множеств $\mathcal{A}_f, \mathcal{R}_f$ соответственно, такие что $\partial V = A \cup R$. Положим $\Omega_A = \Omega_f \cap A, \Omega^i_A = \Omega^i_f \cap A,\ i \in \{0,1,2\}$, $\Omega_R = \Omega_{f^t} \cap R, \Omega^j_R = \Omega^j_f \cap R,\ j \in \{1,2,3\}$. Тогда верны следующие равенства:

$$A = \bigcup_{p \in \Omega_A} W^u_p, R = \bigcup_{p \in \Omega_R} W^s_p.$$

Из [7] (теорема 2.3) и [3] (леммы 1, 2) вытекает справедливость следующего утверждения.

П р е д л о ж е н и е 2.2 *Пусть $\sigma^1 \in \Omega^1_A$, $\omega \in \Omega^0_A$. Тогда*

1) $W^u_{\sigma^1} \subset A$ и существуют точки $\omega_+, \omega_- \in \Omega^0_A$ (возможно, $\omega_+ = \omega_-$), такие что $cl\, W^u_{\sigma^1} \setminus W^u_{\sigma^1} = \omega_+ \cup \omega_-$.;

2) существуют точки $\sigma^2_+, \sigma^2_- \in \Omega^2_A$ (возможно, $\sigma^2_+ = \sigma^2_-$), такие что множество $W^s_{\sigma^1} \cap (W^u_{\sigma^2_+} \cup W^u_{\sigma^2_-})$ состоит в точности из двух различных гетероклинических траекторий;

3) существует точка $\sigma^1_* \in \Omega^1_R$, такая что $\omega \subset cl\, W^u_{\sigma^1_*}$.

Аналогичное утверждение верно для точек $\sigma^2 \in \Omega^2_R$ и $\alpha \in \Omega^3_R$ с формальной заменой символов $A, 0, 1, 2, s, u$ на $R, 3, 2, 1, u, s$ соответственно.

Обозначим через Γ_A (Γ_R) объединение всех периодических точек, одномерных сепаратрис и гетероклинических кривых диффеоморфизма f^t, принадлежащих множеству $A(R)$. Множество Γ_A – носитель графа, вершинами которого являются периодические точки, а ребрами – сепаратрисы и гетероклинические кривые. Обозначим $E(\Gamma_A)$ множество ребер этого графа.

Обозначим через f_A (f_R) ограничение диффеоморфизма f на $A(R)$ и через f_A (f_R) – ограничение диффеоморфизма f на $A(R)$.

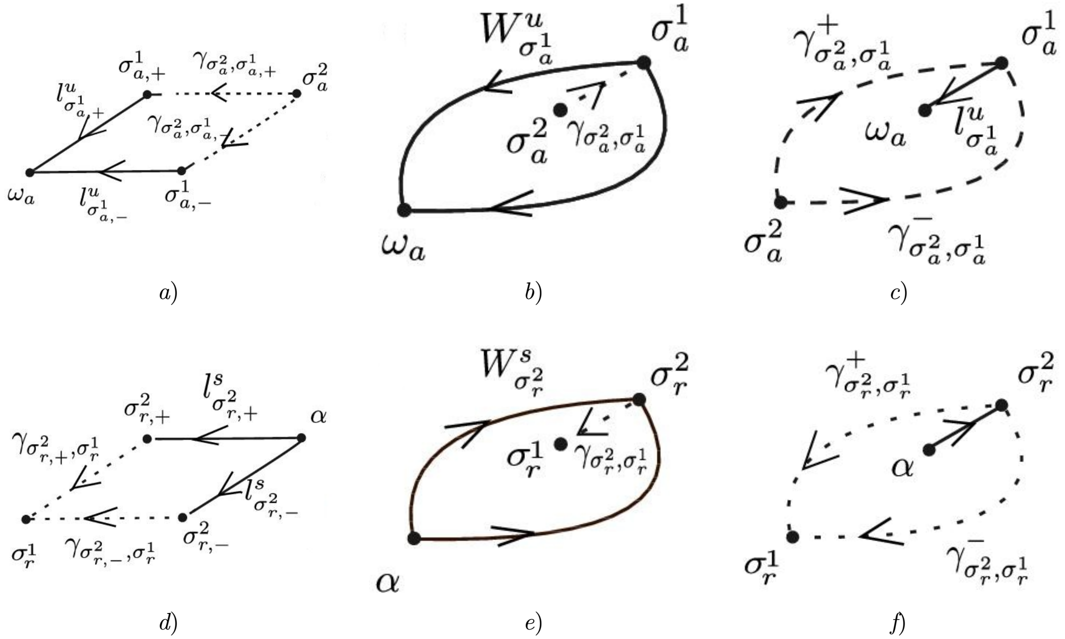


Рис. 2.1. Двумерные ячейки GSD-диффеоморфизмов:
a)–c) ячейки, принадлежащие аттрактору A;
d)–f) ячейки, принадлежащие репеллеру R
Fig 2.1. Two-dimensional cells of GSD-diffeomorphisms
a)–c) cells belonging to an attractor A; d)–f) cells belonging to a repeller R

Компоненту связности множества $A \setminus \Gamma_A$ ($R \setminus \Gamma_R$) будем называть *двумерной ячейкой* отображения f_A (f_R). Из предложения 2.2 следует, что все двумерные ячейки имеют один из шести типов, приведенных на Рис. 2.1, где l^u_p (l^s_p) обозначает одномерную неустойчивую (устойчивую) сепаратрису седловой периодической точки p, а $\gamma_{p,q}$ обозначает гетероклиническую кривую, лежащую в пересечении двумерных инвариантных многообразий седловых периодических точек p, q. Детальное описание двумерных ячеек приведено в аналогичной ситуации для потоков в [4] (предложение 3).

Определение 2.1 *Будем говорить, что сепаратрисы диффеоморфизма $f \subset GSD(M^3)$ обладают регулярным асимптотическим поведением, если для любой тройки $A \subset \mathcal{A}_{f^t}, R \subset \mathcal{R}_{f^t}, V \subset M^3 \setminus (\mathcal{A}_{f^t} \cup \mathcal{R}_{f^t})$, такой что $\partial V = A \cup R$ выполняются следующие условия:*

1) для любых различных точек $\sigma^1_{r,1}, \sigma^1_{r,2} \in \Omega^1_R$ замыкание сепаратрис $l^u_{\sigma^1_{r,1}}$, $l^u_{\sigma^1_{r,2}} \subset V$ содержат различные точки $\omega_1, \omega_2 \subset \Omega^0_A$ и являются локально плоскими дугами[2]*;*

2) для любых двух различных точек $\sigma^2_{a,1}, \sigma^2_{a,2} \in \Omega^2_A$ замыкания сепаратрис $l^s_{\sigma^2_{a,1}}, l^s_{\sigma^2_{a,2}} \subset V$ содержат различные точки $\alpha_1, \alpha_2 \subset \Omega^3_R$ и являются локально плоскими дугами;

3) для любой точки $\sigma^1_a \subset \Omega^1_A$ существует в точности одна точка $\sigma^2_r \subset \Omega^2_R$, такая что пересечение $W^s_{\sigma^1_a} \cap W^u_{\sigma^2_r} \cap V$ непусто; для любой точки $\sigma^2_r \subset \Omega^2_R$ существует в точности одна точка $\sigma^1_a \subset \Omega^1_A$, такая что пересечение $W^s_{\sigma^1_a} \cap W^u_{\sigma^2_r} \cap V$ непусто;

4) для любых точек $\sigma^1_a \in \Omega^1_A, \sigma^2_r \in \Omega^2_R$ пересечение $W^s_{\sigma^1_a} \cap W^u_{\sigma^2_r} \cap V$ либо пусто, либо состоит в точности из одной гетероклинический кривой.

Обозначим через $GSDR(M^3)$ класс диффеоморфизмов из $GSD(M^3)$, таких что все сепаратрисы любого диффеоморфизма $f \in GSDR(M^3)$ обладают регулярным асимптотическим поведением.

Для любого $f \in GSDR(M^3)$ будем называть компоненту связности множества $M^3 \setminus \bigcup\limits_{p \in \Sigma} (cl\, W^u_p \cup cl\, W^s_p)$ *трехмерной ячейкой* диффеоморфизма f.

Из [7] (теорема 2.3) и определения класса $GSDR(M^3)$ непосредственно вытекает следующее предложение.

Предложение 2.3 *Пусть $f \subset GSDR(M^3)$. Тогда для любой трехмерной ячейки C^3 диффеоморфизма f найдутся множества A, R и двумерные ячейки $c^2_a \subset A, c^2_r \subset R$, такие что пересечение границы ∂C^3 ячейки C^3 с множеством $A(R)$ является замыканием ячейки $c^2_a(c^2_r)$. Более того, замыкание $cl\, C^3$ ячейки C^3 гомеоморфно прямому произведению $cl\, c^2_a \times [0,1]$ (и $cl\, c^2_r \times [0,1]$).*

Типы трехмерных ячеек приведены на Рис. 2.2.

Для каждой тройки компонент связности $A \subset \mathcal{A}_{f^t}, R \subset \mathcal{R}_{f^t}, V \subset M^3 \setminus (\mathcal{A}_{f^t} \cup \mathcal{R}_{f^t})$ такой, что $\partial V = A \cup R$, обозначим через $\mathcal{C}^2_A$, $\mathcal{C}^2_R$, $\mathcal{C}^3_V$ множества всех ячеек размерности два и три, принадлежащих множествам A, R, V, соответственно.

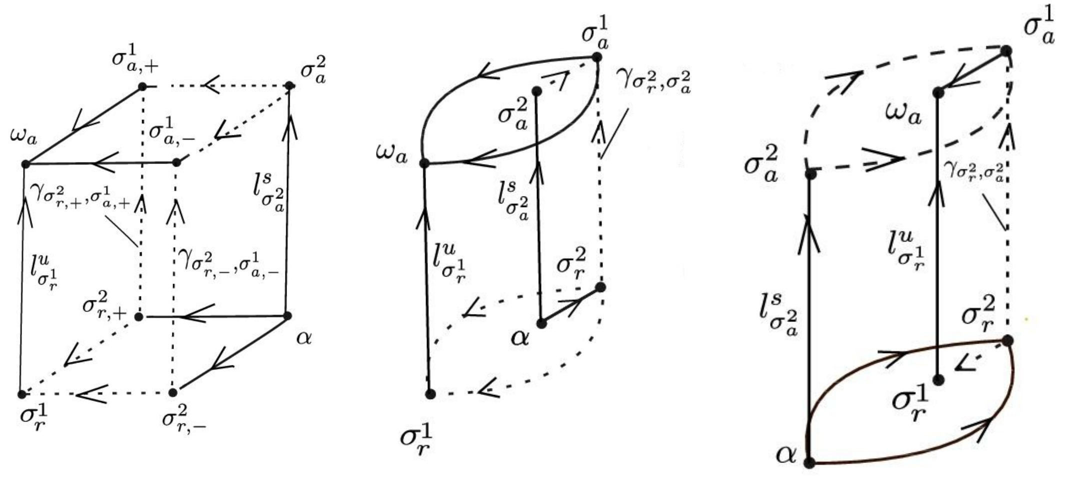
Пусть $A \subset \mathcal{A}_{f^t}$ — произвольная компонента связности. Обозначим через $V_1, \ldots, V_{2k_{f^t}}$ все попарно различные компоненты связности множества $M^3 \setminus (\mathcal{A}_{f^t} \cup \mathcal{R}_{f^t})$, предполагая, что индексы выбраны таким образом, что $cl(V_i) \cap cl(V_{i+1}) \neq \varnothing$ для любого $i \in \{1, \ldots, 2k_{f^t} - 1\}$ и $cl(V_{2k_{f^t}}) \cap cl(V_1) \supset A$.

Из предложения 2.3 следует, что для любой двумерной ячейки $c^2 \subset A$ потока f^t существует последовательность трехмерных ячеек $C^3_1, \ldots, C^3_{2k_{f^t}}$, такая что $cl(C^3_1) \cap A = cl(c^2)$, $C^3_i \subset V_i$, $i \in \{1, \ldots, 2k_{f^t}\}$, пересечения $cl(C^3_i) \cap cl(C^3_{i+1}) \setminus A$, $i \in \{1, \ldots, 2k_{f^t} - 1\}$, $cl(C^3_{2k_{f^t}}) \cap A$ непусты и каждое из них состоит из замыкания двумерной ячейки. Эта последовательность индуцирует взаимно-однозначное отображение

$$\mu_A : \mathcal{C}^2_A \to \mathcal{C}^2_A,$$

ставящее в соответствие каждой ячейке $c^2 \in \mathcal{C}^2_A$ ячейку $\tilde{c}^2$, принадлежащую пересечению $cl(C^3_{2k_{f^t}}) \cap A$.

[2]Замкнутая кривая $l \subset M^3$ называется локально-плоской, если для любой ее точки $x \in l$ существует окрестность $U_x \subset M^3$ и гомеоморфизм $\chi : U_x \to \mathbb{R}^3$, такие что $\chi(U_x \cap l) = Ox_1$, если $x \in int\, l$, и $\chi(U_x \cap l) = \{(x_1, x_2, x_3) \in Ox_1 | \ x_1 \geq 0\}$, если $x \in \partial l$. Примеры градиентно-подобных каскадов, замыкания одномерных сепаратрис которых не являются локально-плоскими дугами (в одной из граничных точек), приведены в работе [9].



a) *b)* *c)*

Рис. 2.2. Трехмерные ячейки $GSDR$-диффеоморфизмов, в границу которых входят: a) три устойчивые, три неустойчивые одномерные сепаратрисы и шесть гетероклинических кривых; b) две устойчивые, три неустойчивые одномерные сепаратрисы и три гетероклинические кривые; c) три устойчивые, две неустойчивые одномерные сепаратрисы и три гетероклинические кривые

Fig 2.2. Three-dimensional cells of $GSDR$-diffeomorphisms with boundary containing: a) three stable, three unstable one-dimensional separatrices and six heteroclinic curves; b) two stable, three unstable one-dimensional separatrices and three heteroclinic curves; c) three stable, two unstable one-dimensional separatrices and three heteroclinic curves

Напомним, что гомеоморфизм $\tau\colon \mathbb{S}_g \to \mathbb{S}_g$ называется *периодическим гомеоморфизмом периода* $r > 1$, если $\tau^r(x) = x$ для любой точки $x \in \mathbb{S}_g$, и $\tau^l \neq Id$, если $l \in (0, r)$. Число $\mu_x > 0$, такое что $\tau^{\mu_x}(x) = x$ и $\tau^l(x) \neq x$ для любого $l \in (0, \mu_x)$, называется периодом точки x. В силу [8] множество $X_\tau \subset S_g$, период которых меньше, чем r, конечно.

Следующая лемма доказывается аналогично леммам 1–2 работы [4].

Лемма 2.1 *Существует сохраняющий ориентацию периодический гомеоморфизм $\tau : A \to A$, такой что: 1) $\tau(\Omega^i_A) = \Omega^i_A$, $i \in \{0, 1, 2\}$;*
2) $\tau(cl\, c^2) = cl\, \mu_A(c^2)$ для любой ячейки $c^2 \in \mathcal{C}^2_A$.

Пусть ν, μ — взаимно простые числа, $0 \leq \nu < \mu$, и $\theta : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}^2$ — поворот диска $\mathbb{B}^2$ на угол $2\pi\dfrac{\nu}{\mu}$. Обозначим через $N^3 = \mathbb{B}^2 \times [0,1]/\!\sim$ фактор-пространство по отношению эквивалентности $(x, 1) \sim (\theta(x), 0)$, $x \in \mathbb{B}^2$.

Напомним, что многообразие M^3 называется *зейфертовым многообразием*, если M^3 расслоено на окружности и любой слой имеет окрестность в M^3, послойно гомеоморфную N^3.

2.1. Доказательство теоремы 1.1

Зейфертовость многообразия M^3 доказывается аналогично доказательству теоремы 1 работы [4]. Приведем идею доказательства. Выберем произвольно компоненту связности $A \subset A_f$ и ячейку $c^2 \subset A_f$. Пусть $C^3_1, \ldots, C^3_{2k_{f^t}}$ — последовательность трехмерных ячеек, такая что $cl(C^3_1) \cap A = cl(c^2)$, $C^3_i \subset V_i$, $i \in \{1, \ldots, 2k_{f^t}\}$, пересечения $cl(C^3_i) \cap cl(C^3_{i+1}) \setminus A$, $i \in \{1, \ldots, 2k_{f^t} - 1\}$, $cl(C^3_{2k_f}) \cap A$ непусты, и каждое из них состоит из замыкания двумерной ячейки. Обозначим через Q_{c^2} объединение всех замыканий трехмерных ячеек $C^3_1, \ldots, C^3_{2k_f}$. Поскольку замыкание каждой трехмерной ячейки гомеоморфно прямому произведению диска (или объединению диска и компактной кривой) на отрезок, то множество Q_{c^2} можно расслоить на дуги, трансверсальные к A и такие, что каждая дуга из этого расслоения соединяет некоторую точку $x \in A$ с точкой $\tau(x)$. Это расслоение продолжается непрерывным образом до расслоения $\mathcal{F}_A$ всего многообразия M^3. Поскольку гомеоморфизм τ – периодический, то полученное в результате расслоение будет расслоением на окружности, удовлетворяющим определению зейфертова многообразия.

Уточнение свойств склеивающего диффеоморфизма

Из существования расслоения, построенного в доказательстве теоремы 1.1, вытекает следующее утверждение.

Предложение 2.4 *Многообразие M^3, допускающее диффеоморфизм $f \in GSDR(M^3)$, гомеоморфно многообразию $M^3_{g,\tau}$, где τ — периодический гомеоморфизм, удовлетворяющий заключению леммы 2.1.*

Доказательство. Пусть $x \in \mathbb{S}_g$ — произвольная точка; $M^3_{g,\tau}$ — фактор-пространство многообразия $\mathbb{S}_g \times [0, 1]$ по отношению эквивалентности $(x, 1) \sim (\tau(x), 0)$ и $p : \mathbb{S}_g \times [0, 1] \to M^3_{g,\tau}$ — естественная проекция. Пусть m — период гомеоморфизма τ. Тогда найдется целое положительное $i \leq m$, такое что $x = \tau^i(x)$ и $x \neq \tau^k(x)$ для любого $k \in (0, i)$. Поэтому множество $p(\{x\} \times [0, 1] \cup \tau(x) \times [0, 1] \cup \cdots \cup \tau^{i-1}(x) \times [0, 1])$ является простой замкнутой дугой в $M^3_{g,\tau}$. Обозначим через l_x эту дугу и через $F = \{l_x, x \in \mathbb{S}_g\}$ расслоение $M^3_{g,\tau}$ на окружности, порождаемое всеми такими дугами.

Пусть A — компонента связности множества $\mathcal{A}_f$, $h : A \to \mathbb{S}_g$ — произвольный гомеоморфизм и $\mathcal{F}_A$ — расслоение многообразия M^3 на окружности, построенное при доказательстве теоремы 1.1.

Продолжим гомеоморфизм h до гомеоморфизма $H : M^3 \to M^3_{g,\tau}$, используя слои слоений $\mathcal{F}_A, F$.

Обозначим через λ_z слой слоения $\mathcal{F}_A$, проходящий через точку $z \in A$. Выберем произвольно ориентацию на слоях l_x, λ_z. Поскольку многообразия $M^3 \to M^3_{g,\tau}$ ориентируемы, то эта ориентация однозначно продоложается до ориентации каждого слоя слоений $F, \mathcal{F}_A$.

Пусть $w \in \lambda_x$ — такая точка, что существует дуга $\hat{\lambda}_{z,w} \subset \lambda_z$, соединяющая точки x, w и такая, что движение вдоль этой дуги от z к w совпадает с ориентацией дуги λ_z, причем $\hat{\lambda}_{z,w} \cap A = z$. Обозначим через $|\hat{\lambda}_{z,w}|$ длину дуги $\hat{\lambda}_{z,w}$ и через $l_x, y \in l_x, \hat{l}_{x,y}, |\hat{l}_{x,y}|$ аналогичные объекты для дуги $l_x \in F$.

Искомый гомеоморизм H определим, положив $H(w) = y$, где $y \in l_{h(z)}$ — такая точка, что $\dfrac{|\hat{\lambda}_{z,w}|}{|\hat{\lambda}_{z,\tau(z)}|} = \dfrac{|\hat{l}_{h(z),y}|}{|\hat{l}_{h(z),\tau(h(z))}|}$.

В силу предложения 2.4 зейфертовость многообразия M^3 будет также следовать из доказываемого в следующем разделе факта, что многообразия $M^3_{g,\tau}$ с периодическим гомеоморфизмом склейки является зейфертовым.

3. Достаточные условия зейфертовости для $M^3_{g,\tau}$

Положим $I = [0,1]$ и $E_1 = \mathbb{S}_g \times I$. Напомним, что $M^3_{g,\tau}$ обозначает фактор-пространство $E_1/\sim$ по отношению эквивалентности $(x,1) \sim (\tau(x),0)$.

Лемма 3.1 *Если τ — периодический гомеоморфизм периода m, то пространство $M^3_{g,\tau}$ является многообразием Зейферта. При этом определена и точна последовательность*

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathbb{S}_g) \times \mathbb{Z} \xrightarrow{p_*} \pi_1(M^3_{g,\tau}) \longrightarrow \mathbb{Z}_m \longrightarrow 1. \tag{3.1}$$

Кроме того, $\pi_k(M^3_{g,\tau}) = 0$ для всех $k > 2$, $\pi_2(M^3_{g,\tau}) \cong \mathbb{Z}$ при $g = 0$ и $\pi_2(M^3_{g,\tau}) = 0$ в остальных случаях.

Доказательство. Фактор-пространство $T = \mathbb{R}/m\mathbb{Z}$ представляет собой гладкое многообразие, диффеоморфное окружности S^1. Для любого числа $t \in \mathbb{R}$ символом $[t]$ будем обозначать смежный класс $t + m\mathbb{Z}$.

Положим $E = \mathbb{S}_g \times T$. Тогда E – замкнутое гладкое 3-многообразие. Определим гомеоморфизм $F : E \to E$ формулой $F(x,[t]) = (\tau(x),[t-1])$. Имеем $F^m = id$ и $F^k \neq id$ для $k = 1,\dots,m-1$. Следовательно, $G = \{id, F, F^2, \dots, F^{m-1}\}$ – циклическая группа автоморфизмов многообразия E. При этом справедливы следующие утверждения.

(A) Факторотображение $p : E \to B$ на топологическое фактор-пространство $B = E/G$ является регулярным накрытием с группой накрывающих преобразований G. Поэтому B можно снабдить структурой гладкого 3-многообразия, относительно которой p – гладкое отображение. Многообразие B замкнуто.

(B) Различные множества семейства $\{p(x \times T) | x \in \mathbb{S}_g\}$ образуют одномерное слоение $\mathfrak{F}$ на B.

(C) Каждый слой слоения $\mathfrak{F}$ гомеоморфен окружности S^1.

(D) Многообразия B и $M^3_{g,\tau}$ гомеоморфны.

По теореме Эпстейна [10] из (A)–(C) следует, что B – многообразие Зейферта. Согласно (D) это верно и для $M^3_{g,\tau}$.

В силу (A) и (D) определена и точна последовательность (3.1). Кроме того, $\pi_k(M^3_{g,\tau}) \cong \pi_k(B) \cong \pi_k(E) \cong \pi_k(\mathbb{S}_g) \times \pi_k(T) \cong \pi_k(\mathbb{S}_g)$ для всех $k > 1$.

Подробное обоснование утверждений (A)–(D)

(A). Группа G конечна. Для любых $k \in \{1,\dots,m-1\}$ и $(x,[t]) \in E$ имеем $F^k(x,[t]) = (\tau^k(x),[t-k]) \neq (x,[t])$. Согласно утверждению 6 из гл. 2, п. 6 книги [11] в такой ситуации G – вполне разрывная группа гомеоморфизмов многообразия E. Наконец, из связности многообразия E следует связность фактор-пространства $B = E/G$. По теореме 7 из [11] (гл. 2, п. 6) тогда $p : E \to B$ – регулярное накрытие с группой накрывающих преобразований G.

Накрытие $p : E \to B$ индуцирует на B структуру гладкого многообразия, относительно которой оно является гладким отображением. Из компактности E и равенства $\partial E = \emptyset$ следует, что $B = p(E)$ – замкнутое многообразие.

(B). Очевидно, орбиты действия группы G на E либо не пересекаются, либо совпадают. Кроме того, они образуют покрытие многообразия E. Отсюда следует, что семейство $\mathfrak{F}$ представляет собой разбиение многообразия B.

Пусть $x \in \mathbb{S}_g$ и $t \in [0, m]$. Выберем карту (U, φ) многообразия $\mathbb{S}_g$, такую что $x \in U$ и $\varphi(U) = (0,1)^2$. Положим $W = \{(y,[s]) | y \in U, s \in (t-1/2, t+1/2)\}$ и $\psi(y,[s]) = (\varphi(x), s-t+1/2)$ для всех $(y,[s]) \in W$. Тогда (W, ψ) – расслоенная карта для тривиального слоения $\mathfrak{F}_0 = \{x \times T | x \in \mathbb{S}_g\}$ на E. Имеем $W \cap F^k(W) = \emptyset$ для всех $k = 1, \ldots, m-1$. Поэтому сужение $p|_W : W \to p(W)$ является диффеоморфизмом. Но тогда пара $(p(W), \psi \circ (p|_W)^{-1})$ представляет собой карту многообразия B. По построению она расслоена относительно разбиения $\mathfrak{F}$. Поскольку множествами вида $p(W)$ можно покрыть все B, то этим доказано, что $\mathfrak{F}$ – гладкое слоение на B.

(C). Пусть $x \in \mathbb{S}_g$. По условию на гомеоморфизм $\tau : \mathbb{S}_g \to \mathbb{S}_g$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $\tau^n(x) = x$, $\tau^k(x) \neq x$ для $k = 1, \ldots, n-1$ и $m/n = l \in \mathbb{N}$. Положим $G(x) = \{id, F^n, F^{2n}, \ldots, F^{(l-1)n}\}$. Тогда элементы подгруппы $G(x) \subset G$ переводят слой $x \times T \in \mathfrak{F}_0$ в себя и только они.

Группа $G(x)$ действует на $x \times T$ посредством формулы $F^{kn}(x,[t]) = (x,[t-kn])$. Отсюда следует, что $(x \times T)/G(x) \approx S^1$. Однако $p(x \times T) = (x \times T)/G(x)$. Поэтому все слои слоения $\mathfrak{F}$ диффеоморфны окружности.

(D). Допуская некоторую погрешность, можно считать, что $E_1 \subset E$. Рассмотрим произвольную точку $u = (x,[t]) \in E$. Пусть $t \in [i, i+1]$, где $i \in \{0, \ldots, m-1\}$. Тогда $u_1 = F^j(u) \in E_1$ для $j = m - i$. При этом пересечение орбиты $G \cdot u$ с подмножеством $E_1 \subset E$ представляет собой класс эквивалентности $[u_1]$ (относительно отношения $\sim$) точки $u_1 \in E_1$. Последнее означает, что формула $h(G \cdot u) = [u_1]$ определяет биекцию $h : B \to M^3_{g,\tau}$.

Пусть $p_1 : E_1 \to M^3_{g,\tau}$ – фактор-отображение, $V \subset B$, $V_1 \subset M^3_{g,\tau}$ и $V_1 = h(V)$. Тогда $p^{-1}(V) = G \cdot (p_1^{-1}(V_1))$. Отсюда следует, что полный прообраз $p_1^{-1}(V_1)$ открыт в E_1 тогда и только тогда, когда в пространстве E открыт прообраз $p^{-1}(V)$. Таким образом, h – гомеоморфизм. В силу трехмерности многообразий B и $M^3_{g,\tau}$ из их гомеоморфности следует диффеоморфность [12].

4. Построение SD-диффеоморфизма с заданным числом гетероклинических кривых

4.1. Кручения Дэна

Пусть $c \in \mathbb{S}_g$ — простая гладкая замкнутая кривая. *Кручением Дэна вдоль кривой* c называется гомеоморфизм $\rho_c : S_g \to S_g$, определенный следующим образом. Рассмотрим окружность $\mathbb{S}^1$ как подмножество комплексной плоскости **C**. Пусть $h : S^1 \times [-1,1] \to S_g$ — диффеоморфизм такой, что $h(S^1 \times \{0\}) = c$, и $g : S^1 \times [-1,1] \to S^1 \times [-1,1]$ — гомеоморфизм такой, что $g(z,r) = (z,r)$ для $z \in S^1, r \in [-1,0]$, $g(z,r) = (ze^{2\pi ri}, r)$ для $r \in [0,1]$. Тогда

$$\rho_c(p) = \begin{cases} p, p \in S_g \setminus h(S^1 \times [-1,1]); \\ h(g(h^{-1}(p))), p \in h(S^1 \times [-1,1]). \end{cases}$$

Для гладких замкнутых кривых $c, c' \in \mathbb{S}_g$, пересекающихся трансверсально, обозначим через $N(c,c')$ число точек пересечения $c \cap c'$.

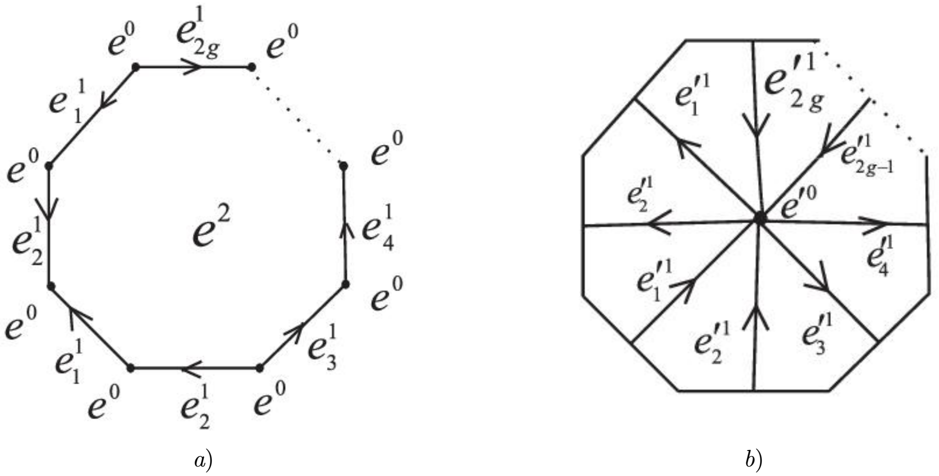


Рис. 4.1. Дуальные клеточные разбиения поверхности $\mathbb{S}_g$:
a) разбиение K; b) разбиение K'

Fig 4.1. Dual cellular partitions of a surface: a) partition K; b) partition K'

Пусть K, K' — дуальные клеточные разбиения поверхности $\mathbb{S}_g$, такие что одномерные клетки K совпадают с дугами $e^1_1, ..., e^1_{2g}$, а одномерные клетки K' совпадают с дугами ${e'}^1_1, ..., {e'}_{2g}$, изображенными на рисунке 4.1, a–b соответственно. Заметим, что оба семейства дуг являются образующими группы $H_1(S_g, Z)$.

Кручение Дэна $\rho_{e^1_1}$ вдоль кривой e^1_1 сохраняет гомологические классы $[e^1_j]$ при $j \in \{3, ..., 2g\}$ и действует в классах $[e^1_1], [e^1_2]$ следующим образом: $\rho_{e^1_1}([e^1_1]) = [e^1_1]$, $\rho_{e^1_1}([e^1_2]) = [e^1_1 \pm e^1_2]$. Это наблюдение непосредственно приводит к следующей лемме.

Лемма 4.1 *Справедливы равенства*

1) $N(e^1_1, \rho^m_{e^1_1}({e'}^1_2)) = 0$;

2) $N(e^1_1, \rho^m_{e^1_1}({e'}^1_1)) = 1$;

3) $N(e^1_2, \rho^m_{e^1_1}({e'}^1_2)) = 1$;

4) $N(e^1_2, \rho^m_{e^1_1}({e'}^1_1)) = m$;

5) $N(e^1_i, \rho^m_{e^1_1}(e^1_j)) = 1$ *если* $i = j$ *и* 0 *в противном случае,* $i, j \in \{3, 4, \dots, 2g\}$.

4.2. Доказательство теоремы 1.2

Для доказательства теоремы 1.2 будем использовать идею построения GSD-диффеоморфизма для данных g, k и τ, предложенную в работе [3], но уточним определение склеивающего диффеоморфизма τ, чтобы получить требуемое число n некомпактных гетероклинических кривых.

Пусть $g \geq 0, k \geq 1, n \geq 12gk$ — произвольные целые числа. Определим на поверхности $\mathbb{S}^2$ канонический градиентно-подобный диффеоморфизм φ_g с неблуждающим множеством, состоящим из минимального допустимого для этой поверхности числа точек,

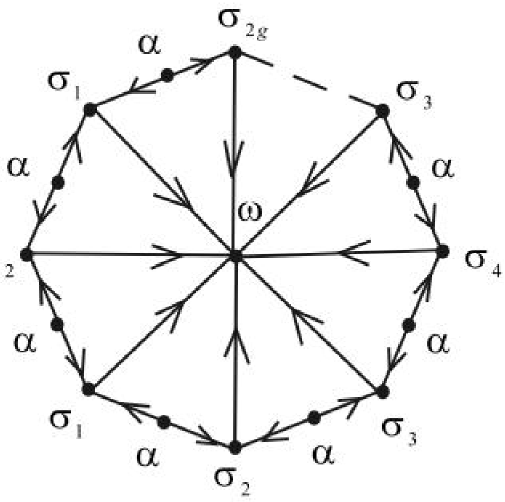


Рис. 4.2. Фазовый портрет диффеоморфизма φ_g на развертке поверхности рода g

Fig 4.2. Phase portait of the diffeomorphism φ_g on the upfolding of the surface of genus g

а именно, единственной стоковой неподвижной точки ω, единственной источниковой неподвижной точки α и $2g$ седловых неподвижных точек $\sigma_1, \ldots, \sigma_{2g}$. Фазовый портрет такого диффеоморфизма изображен на Рис. 4.2. Обозначим через $\psi_k : [0,1] \to [0,1]$ диффеоморфизм, являющийся сдвигом на единицу времени вдоль траекторий потока, задаваемого векторным полем

$$\dot{r} = \sin(2\pi kr), r \in [0,1].$$

Положим $e_i^1 = W^s_{\sigma_i}$, $e'^1_i = W^u_{\sigma_i}$, $i \in \{1, ..., 2g\}$. Множества $\Gamma^s = \{e_1^1, ..., e_{2g}^1\}$, $\Gamma^u = \{e'^1_1, ..., e'^1_{2g}\}$ совпадают с множествами всех одномерных клеток дуальных клеточных разбиений K, K' соответственно.

Положим $m = n - 12gk$, $\tau_m = \rho^m_{e_1^1}$, где $\rho_{e_1^1} : S_g \to S_g$ — кручение Дэна вдоль e_1^1. Положим $f_1 = \tau_m^{-1}\varphi_g\tau_m$.

Заметим, что

(*) дуги из множества Γ^u трансверсальны к дугам из множества $\tau_m(\Gamma^s)$;

(**) $\tau_m(\alpha) \notin (\Gamma^u \cup \omega)$ и $\omega \notin \tau_m(\Gamma^s \cup \alpha)$.

Выберем $r_0 \in (1 - \dfrac{1}{2k}, 1)$, положим $r_1 = \psi^{-1}(r_0)$, $r_2 = \psi^{-1}(r_1)$ $(r_0 < r_1 < r_2)$ и определим диффеоморфизм $F : \mathbb{S}_g \times [0;1] \to \mathbb{S}_g \times [0;1]$ формулой

$$F(z,r) = \begin{cases} (\varphi_g(z), \psi_k(r)), r \in [0; r_0]; \\ (\varphi_g^{[\frac{r_1 - r}{r_1 - r_0}]}(z), \psi(r)), r \in [r_0; r_1]; \\ (\tau_m^{-1}\varphi_g^{[\frac{r - r_1}{r_2 - r_1}]}\tau_m(z), \psi(r)), r \in [r_1; r_2]; \\ (f_1(z), \psi(r)), r \in [r_2; 1]. \end{cases}$$

Обозначим через $\pi_{\tau_m} : S_g \times [0,1] \to M_{g,\tau}$ естественную проекцию и через $\widetilde{F} : M_{g,\tau} \to M_{g,\tau}$ диффеоморфизм, такой что $\widetilde{F} = \pi_{\tau_m} F \pi_{\tau_m}^{-1}$. По построению неблуждающее множество диффеоморфизма $\widetilde{F}$ конечно, гиперболично и принадлежит поверхностям $\pi_{\tau_m}((S_g \times \{\frac{i}{2k}\})$, $i \in \{0, \dots, k\}$. Блуждающее множество диффеоморфизма F содержит:

- в точности $8gk$ некомпактных гетероклинических кривых, принадлежащих объединению поверхностей $\pi_\tau(S_g \times \{\frac{i}{2k}\})$, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$;
- в точности $4gk - 2g$ некомпактных гетероклинических кривых, лежащих в множестве $\pi_\tau((S_g \times [0, 1 - \frac{1}{2k}]) \setminus (S_g \times \{\frac{i}{2k}\}))$.

Для завершения доказательства теоремы покажем, что диффеоморфизм $\widetilde{F}$ является градиентно-подобным и его неблуждающее множество содержит в точности n некомпактых гетероклинических кривых. Для этого достаточно показать, что на множестве $S_g \times (1 - \frac{1}{2k}, 1)$ одномерные сепатрисы седловых неподвижных точек диффеоморфизма F не пересекаются с другими сепаратрисами, а двумерные инвариантные многообразия седловых неподвижных точек имеют трансверсальное пересечение, состоящее в точности из $m + 2g$ компонент связности.

Для этого заметим, что множество $D = S_g \times [r_1; r_2]$ является фундаментальной областью ограничения $F|_{S_g \times (1 - \frac{1}{2k}, 1)}$. Из определения диффеоморфизма F следует, что двумерные устойчивые сепаратрисы пересекают D по множеству $\Gamma^s \times [r_1; r_2]$, двумерные неустойчивые сепаратрисы – по множеству $\tau^{-1}(\Gamma^u) \times [r_1; r_2]$, одномерные устойчивые сепаратрисы – по $\alpha \times [r_1; r_2]$ и одномерные неустойчивые сепаратрисы – по $\tau^{-1}(\omega) \times [r_1; r_2]$. В силу (*) двумерные многообразия седловых неподвижных точек диффеоморфизма F пересекаются трансверсально в D и, следовательно, на множестве $S_g \times (1 - \frac{1}{2k}, 1)$. В силу леммы 4.1 число компонент связности этого пересечения равно $2g + m$. В силу (**) одномерные сепаратрисы не имеют пересечения с другими сепаратрисами в D, а следовательно, и в $S_g \times (1 - \frac{1}{2k}, 1)$.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, грант 21-11-00010.

Список литературы

1. Grines V., Medvedev V., Zhuzhoma E. On surface attractors and repellers in 3-manifolds // Math. Notes. 2005. Vol. 78, No 6. pp. 757–767. DOI: https://doi.org/10.1007/s11006-005-0181-1

2. Grines V., Pochinka O., Medvedev V., Levchenko Yu. The topological classification of structural stable 3-diffeomorphisms with two-dimensional basic sets // Nonlinearity. 2015. Vol. 28, No 11. pp. 4081–4102. DOI: https://doi.org/10.1088/0951-7715/28/11/4081

3. Grines V., Gurevich E., Pochinka O. On the number of non-compact heteroclinic curves of diffeomorphisms with a surface dynamics // Regular and Chaotic Dynamics. 2017. Vol. 22, No. 2. pp. 122–135. DOI: https://doi.org/10.1134/S156035471702002

4. Grines V., Gurevich E., Kevlia S. On gradient-like flows on seifert manifolds // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42, No. 5. pp. 901–910. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080221050061

5. Grines V., Gurevich E., Kurenkov E., Topological Classification of Gradient-Like Flows with Surface Dynamics on 3-Manifolds // Math. Notes. 2020 V. 107. No 1. P. 145-148.

6. Grines V., Gurevich E., Zhuzhoma E., Zinina S. Heteroclinic curves of Morse-Smale diffeomorphisms and separators in plasma magnetic field // Nelineynaya dynamika. 2014. Vol. 10, No. 4. pp. 427-438.

7. Smale S. Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 73, No. 6. pp. 747–817. DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1967-11798-1

8. Nielsen J. Die struktur periodischer transformationen von flachen. K?benhavn: Levin&Munksgaard, 1937. Vol. 15. 78 p.

9. Pixton D. Wild unstable manifold // Topology. 1977. Vol. 16. pp. 167–172.

10. Epstein D. B. A., Periodic flows on 3-manifolds // Ann. Math. 1972. Vol. 95. pp. 66–82.

11. Спеньер Э. Алгебраическая топология. М.: Мир, 1971. 693 с.

12. Whitehead J. H. C., Manifolds with transverse fields in Euclidean space // Ann. Math. 1961. Vol. 73. pp. 154–212.

Поступила 02.09.2021; доработана после рецензирования 28.10.2021; принята к публикации 16.11.2021

Информация об авторах:

Гринес Вячеслав Зигмундович, профессор кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), доктор физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4709-6858, vgrines@hse.ru

Гуревич Елена Яковлевна, доцент кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), кандидат физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1815-3120, egurevich@hse.ru

Яковлев Евгений Иванович, профессор кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), доктор физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6501-353X, eyakovlev@hse.ru

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Original article

MSC2020 37B35

On topology of manifolds admitting gradient-like calscades with surface dynamics and on growth of the number of non-compact heteroclinic curves

V. Z. Grines, E. Ya. Gurevich, E. I. Yakovlev

National Research University «Higher School of Economics» (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

Abstract. We consider a class $GSD(M^3)$ of gradient-like diffeomorphisms with surface dynamics given on closed oriented manifold M^3 of dimension three. Earlier it was proved that manifolds admitting such diffeomorphisms are mapping tori under closed orientable surface of genus g, and the number of non-compact heteroclinic curves of such diffeomorphisms is not less than $12g$. In this paper, we determine a class of diffeomorphisms $GSDR(M^3) \subset GSD(M^3)$ that have the minimum number of heteroclinic curves for a given number of periodic points, and prove that the supporting manifold of such diffeomorphisms is a Seifert manifold. The separatrices of periodic points of diffeomorphisms from the class $GSDR(M^3)$ have regular asymptotic behavior, in particular, their closures are locally flat. We provide sufficient conditions (independent on dynamics) for mapping torus to be Seifert. At the same time, the paper establishes that for any fixed $g\ geq1$, fixed number of periodic points, and any integer $n \geq 12g$, there exists a manifold M^3 and a diffeomorphism $f \in GSD(M^3)$ having exactly n non-compact heteroclinic curves.

Key Words: gradient-like diffeomorphism, surface dynamics, topological classification, non-compact heteroclinic curve, Seifert manifolds

For citation: *V. Z. Grines, E. Ya. Gurevich, E. I. Yakovlev.* On topology of manifolds admitting gradient-like calscades with surface dynamics and on growth of the number of non-compact heteroclinic curves. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 23:4(2021), 379–393. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202104.379–393

References

1. V. Grines, V. Medvedev, E. Zhuzhoma, "On surface attractors and repellers in 3-manifolds", *Math. Notes*, **78**:6 (2005), 757–767. DOI: https://doi.org/10.1007/s11006-005-0181-1

2. V. Grines, O. Pochinka, V. Medvedev, Yu. Levchenko, "The topological classification of structural stable 3-diffeomorphisms with two-dimensional basic sets", *Nonlinearity*, **28**:11 (2015), 4081–4102. DOI: https://doi.org/10.1088/0951-7715/28/11/4081

3. V. Grines, E. Gurevich, O. Pochinka, "On the number of non-compact heteroclinic curves of diffeomorphisms with a surface dynamics", *Regular and Chaotic Dynamics*, **22**:2 (2017), 122–135. DOI: https://doi.org/10.1134/S156035471702002

4. V. Grines, E. Gurevich, S. Kevlia, "On gradient-like flows on seifert manifolds", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **42**:5 (2021), 901–910. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080221050061

5. V. Grines, E. Gurevich, E. Kurenkov, “Topological classification of gradient-like flows with surface dynamics on 3-manifolds”, *Math. Notes*, **107**:1 (2020), 145–148. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434620010162

6. V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, T. V. Medvedev, “New relations for Morse-Smale systems with trivially embedded one-dimensional separatrices”, *Sbornik: Mathematics*, **194**:7 (2003), 979–1007. DOI: https://doi.org/10.1070/SM2003v194n07ABEH000751

7. V. Grines, E. Gurevich, E. Zhuzhoma, S. Zinina, “Heteroclinic curves of Morse-Smale diffeomorphisms and separators in plasma magnetic field”, *Nelineynaya dynamika*, **10**:4 (2014), 427–438.

8. S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817. DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1967-11798-1

9. J. Nielsen, *Die struktur periodischer transformationen von flachen*, **15**, Levin & Munksgaard, 1937, 78 p.

10. D. Pixton, “Wild unstable manifold”, *Topology*, **16** (1977), 167–172.

11. Epstein D. B. A., “Periodic flows on 3-manifolds”, *Ann. Math.*, **95** (1972), 66–82.

12. E. Spanier, *Algebraic Topology*, Mir Publ., Moscow, 1971 (In Russ.), 693 p.

13. J. H. C. Whitehead, “Manifolds with transverse fields in Euclidean space”, *Ann. Math.*, **73** (1961), 154–212.

Submitted 02.09.2021; Revised 28.10.2021; Accepted 16.11.2021

Information about the authors:

Vyacheslav Z. Grines, Professor of the Department of Fundamental Mathematics, National Research University «High School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), D. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4709-6858, vgrines@yandex.ru

Elena Ya. Gurevich, Associate Professor of the Department of Fundamental Mathematics, National Research University «High School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1815-3120, egurevich@hse.ru

Evgenii Iv. Yakovlev, Professor of the Department of Fundamental Mathematics, National Research University «High School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), D. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6501-353X, eyakovlev@hse.ru.hse.ru

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: the authors declare no conflict of interest.