Математика

DOI 10.15507/2079-6900.23.202104.360–378
Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.392

Оптимальные по точности методы вычисления гиперсингулярных интегралов

И. В. Бойков, А. И. Бойкова

Пензенский государственный университет (г. Пенза, Российская Федерация)

Аннотация. Построены оптимальные по порядку квадратурные формулы вычисления одномерных и многомерных гиперсингулярных интегралов на классах функций $\Omega^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $\bar{\Omega}^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $\Omega = [-1, 1]^l$, $l = 1, 2, \ldots, M = Const$, γ – вещественное положительное число. Функции, принадлежащие классам $\Omega^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$ и $\bar{\Omega}^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$, имеют ограниченные производные до r-го порядка в области Ω и производные до s-го порядка ($s = r + \lceil\gamma\rceil$) в области $\Omega\backslash\Gamma$, где $\Gamma = \partial\Omega$. Модули производных v-го порядка ($r < v \le s$) являются степенными функциями от $d(x, \Gamma)^{-1}(1 + |\ln d(x, \Gamma)|)$, где $d(x, \Gamma)$ – расстояние от точки x до Γ. Интерес к этим классам функций обусловлен тем, что к ним принадлежат решения сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений и многие физические поля, в частности, гравитационные и электромагнитные поля. В работе даны определения оптимальных по точности методов вычисления гиперсингулярных интегралов. Построены оптимальные по порядку по точности квадратурные формулы вычисления одномерных и многомерных гиперсингулярных интегралов на классах функций $\Omega^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$ и $\bar{\Omega}^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$.

Ключевые слова: гиперсингулярный интеграл, квадратурная формула, оптимальный метод

Для цитирования: Бойков И. В., Бойкова А. И. Оптимальные по точности методы вычисления гиперсингулярных интегралов // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 4. С. 360–378. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202104.360–378

1. Введение

В настоящее время наблюдается активное развитие приближенных методов вычисления сингулярных интегралов (СИ) и гиперсингулярных интегралов (ГИ).

Это, в первую очередь, обусловлено той ролью, которую играют сингулярные интегральные уравнения (СИУ) и гиперсингулярные интегральные уравнения (ГИУ) при решении задач аэродинамики [1–4], электродинамики [5], ядерной физики [6], геофизики [7]. Особенно широкое применение сингулярные и гиперсингулярные интегральные уравнения находят в задачах анализа и синтеза антенн. Поскольку решения СИУ и ГИУ в аналитическом виде известны только для узкого класса уравнений [8; 9], то возникает задача разработки приближенных методов их решения и, следовательно, задача приближенного вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов.

Приближенному вычислению СИ и ГИ посвящено множество работ, обзоры которых имеются в книгах [10–16] и статьях [17–29].

Отметим, что большинство работ посвящено одномерным ГИ. В этих работах предложены различные вычислительные алгоритмы. В связи с этим возникает необходимость в построении методов, позволяющих сравнивать эти алгоритмы. Одним из таких методов является сравнение алгоритмов по оптимальности (по точности, сложности, памяти и т. д.).

Подробное изложение вопросов построения оптимальных, асимптотически оптимальных, оптимальных по порядку (по точности и сложности) алгоритмов вычисления сингулярных, полисингулярных и многомерных сингулярных интегралов дано в [12]. Там же приведена достаточно подробная библиография работ, посвященных оптимальным методам вычисления сингулярных интегралов.

Оптимальные алгоритмы вычисления ГИ получили меньшее развитие. Ряд асимптотически оптимальных и оптимальных по порядку по точности алгоритмов вычисления гиперсингулярных, полигиперсингулярных и многомерных гиперсингулярных интегралов построен в монографии [13].

В данной работе построен ряд оптимальных по порядку по точности алгоритмов вычисления ГИ на весовых пространствах Соболева. Интерес к их построению обусловлен тем, что многие физические поля, в частности гравитационные [7], электромагнитые, описываются весовыми пространствами Соболева, а при построении различных трансформаций геофизических полей используются ГИ [7].

2. Определения гиперсингулярных интегралов

Ж. Адамар ввел [30–31] определение гиперсингулярных интегралов, рассматривая, в олномерном случае, интегралы вида

$$\int\limits_a^b \frac{A(x)\,dx}{(b-x)^{p+\alpha}}$$

при целом p и $0 < \alpha < 1$.

В данной работе используется определение ГИ в смысле главного значения Коши-Адамара.

Определение 2.1 [32]. *Интеграл*

$$\int\limits_a^b \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-c)^p}, \quad a < c < b,$$

определяется как предел:

$$\int\limits_a^b \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-c)^p} = \lim_{v\to 0}\left[\int\limits_a^{c-v} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-c)^p} + \int\limits_{c+v}^b \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-c)^p} + \frac{\xi(v)}{v^{p-1}}\right],$$

где $\xi(v)$ – функция, выбранная так, чтобы предел существовал.

Первое определение многомерных ГИ дано Адамаром в монографиях [30–31]. В данной статье используются следующие определения многомерных ГИ.

Рассмотрим ГИ

$$L\varphi \equiv \int\int\limits_G \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}},$$

где $t = (t_1, t_2) \in G \setminus \partial G$; p $(p > 2)-$ натуральное число.

Приведем две регуляризации интеграла $L\varphi$.

Пусть $R(t, \varepsilon) = \{z : |z - t| \leq \varepsilon\}$, где $\varepsilon < \rho(t, \partial G)$ и $\rho(t, \partial G)$ – расстояние от t до ∂G.

Определение 2.2 *Пусть p – натуральное число. Пусть* $|\dfrac{\partial^{|v|}\varphi(t_1, t_2)}{\partial t_1^{v_1} \partial t_2^{v_2}}| \leq$ $\leq M$, $|v| = v_1 + v_2$, $0 \leq |v_i| \leq p - 2$, $i = 1, 2$.

Под интегралом $L\varphi$ при $p \geq 3$ понимается предел

$$L\varphi = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int \int_{G \setminus R(t,\varepsilon)} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} - \sum_{k=1}^{p-2} \frac{B_k(\varepsilon)}{\varepsilon^k} - C(\varepsilon) \ln \varepsilon \right),$$

где $B_k(x)$, $C(x)$ – функции, удовлетворяющие условиям:

а) предел существует;

б) $B_k(x) \in W^k$;

в) $C(x)$ пригадлежит классу функций Дини-Липшица.

Замечание 2.1 *В работе* [13] *приведено эквивалентное и, в ряде случаев, более удобное определение.*

Определение 2.3 *Пусть $p, p > 2-$ нецелое число. Интеграл $L\varphi$ при $p = k + \alpha$, $k = 2, 3, \ldots$, $0 < \alpha < 1$, определяется как предел*

$$L\varphi = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int \int_{G \setminus R(t,\varepsilon)} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} - \frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon^{p-2}} \right),$$

где $B(\varepsilon)$ – удовлетворяет следующим условиям:

а) предел существует;

б) $B(\varepsilon) \in W^{p-2}$.

3. Классы функций

Через $H_\alpha(D, M)$, $H_{\alpha_1,\alpha_2}(D, M)$ обозначены гельдеровские классы функций.

Описания классов функций $W^{r,s}(D, M), D = [a, b; c, d], 0 < M < \infty$, $C_l^r(\Omega, 1), \Omega = [a_1, b_1; \cdots; a_l, b_l]$ приведены в [12–13].

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_l), v = (v_1, \ldots, v_l), |v| = v_1 + v_2 + \ldots + v_l, 0 \leq v_i \leq |v|, i = 1, 2, \ldots, l, D^v = \partial^{|v|} / \partial^{v_1} x_1 \ldots \partial^{v_l} x_l$.

Определение 3.1 [33] *Пусть $\Omega = [-1, 1]^l$, $l = 1, 2, \ldots$. Функция $\varphi(x_1 \ldots, x_l)$ входит в класс $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$ при выполнении следующих условий:*

$$\max_{x \in \Omega} |D^v \varphi(x)| \leq M, \quad \text{при } \ 0 \leq |v| \leq r,$$

$$|D^v \varphi(x)| \leq M/(d(x, \Gamma))^{|v| - r - \zeta}, x \in \Omega \setminus \Gamma, \quad \text{при } \ r < |v| \leq s,$$

где $s = r + [\gamma] + 1$, $\gamma = [\gamma] + \mu$, $0 < \mu < 1$, $\zeta = 1 - \mu$ при γ – нецелом, $s = r + \gamma$ при γ – целом.

Здесь $d(x,\Gamma)=\min_{1\leq i\leq l}, \quad \min(|1+x_i|,|1-x_i|)$.

О п р е д е л е н и е 3.2 [34]. *Пусть* $\Omega=[-1,1]^l$, $l=1,2,\ldots;$ γ, r *и* u *– натуральные числа;* $s=r+\gamma$. *Класс* $\bar{Q}^u_{r\gamma}(\Omega,M)$ *состоит из функций* $\varphi(x)$, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_l)$, *для которых выполнены следующие условия:*

$$\max_{x\in\Omega}|D^v\varphi(x)|\leq M, \quad \textit{при} \;\; 0\leq|v|\leq r-1,$$

$$|D^v\varphi(x)|\leq M(1+|\ln^u d(x,\Gamma)|), \quad x\in\Omega\setminus\Gamma, \quad \textit{при} \;\; |v|=r,$$

$$|D^v\varphi(x)|\leq M(1+|\ln^{u-1} d(x,\Gamma)|)/(d(x,\Gamma))^{|v|-r}, \quad x\in\Omega\setminus\Gamma, \quad \textit{при} \;\; r<|v|\leq s.$$

О п р е д е л е н и е 3.3 [34]. *Пусть* $\Omega=[-1,1]^l$, $l=1,2,\ldots,u$ *– натуральное число;* $\gamma>0$, $\gamma-$ *нецелое число. Множество* $Q^u_{r,\gamma}(\Omega,M)$ *состоит из функций, для которых выполнены следующие условия:*

$$\max_{x\in\Omega}|D^v\varphi(x)|\leq M, \quad \textit{при} \;\; 0\leq|v|\leq r;$$

$$|D^v\varphi(x)|\leq M(1+|\ln^u d(x,\Gamma)|)/(d(x,\Gamma))^{|v|-r-\zeta}, \quad x\in\Omega\setminus\Gamma, \quad \textit{при} \;\; r<|v|\leq s,$$

где $s=r+[\gamma]+1$, $\gamma=[\gamma]+\mu$, $0<\mu<1$, $\zeta=1-\mu$.

З а м е ч а н и е 3.1 *Классы функций* $Q_{r,\gamma}(\Omega,M)$, $\bar{Q}^u_{r\gamma}(\Omega,M)$, $Q^u_{r,\gamma}(\Omega,M)$ *являются обобщением класса функций* $Q_r(\Omega,M)$, *введенного в* [35].

4. Определения оптимальных алгоритмов вычисления ГИ

В этом разделе приведем, следуя работам [13; 36], определения оптимальных, асимптотически оптимальных и оптимальных по порядку квадратурных и кубатурных формул вычисления ГИ.

Рассмотрим ГИ

$$L\varphi=\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}}, \quad (t_1,t_2)\in\Omega=[-1,1]^2, \quad p>2.$$

Интеграл $L\varphi$ будем вычислять по кубатурной формуле

$$L\varphi=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=0}^{\rho_1}\sum_{j=0}^{\rho_2}p_{klij}(t_1,t_2)\varphi^{(i,j)}(x_k,y_l)+R_{mn}(t_1,t_2;x_k,y_l;p_{klij};\varphi). \tag{4.1}$$

Кубатурные формулы (4.1) определены на классе функций Ψ.

Точность кубатурной формулы (4.1) определяется функционалом $R_{mn}(x_k,y_l;p_{klij};\varphi)=\sup\limits_{(t_1,t_2)\in\Omega}|R_{mn}(t_1,t_2;x_k,y_l;p_{klij};\varphi)|$.

Введем функционалы $R_{mn}[\Psi]=\sup\limits_{\varphi\in\Psi}R_{mn}(x_k,y_l;p_{klij};\varphi)$;

$\zeta_{mn}[\Psi]=\inf\limits_{x_k,y_l;p_{klij}}R_{mn}(x_k,y_l;p_{klij};\Psi)$, где нижняя грань берется по всем узлам $(x_k,y_l)\in\Omega$ и всем коэффициентам p_{klij}.

Кубатурная формула вида (4.1) с коэффициентами p^*_{klij} и узлами (x^*_k, y^*_l) называется оптимальной, асимптотически оптимальной, оптимальной по порядку, если $R_{mn}(x^*_k, y^*_l; p^*_{klij}; \Psi)/\zeta_{mn}[\Psi] = 1, \sim 1, \asymp 1$.

Наряду с кубатурной формулой (4.1) интеграл $L\varphi$ будем вычислять по формуле

$$L\varphi = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i_1=0}^{\rho_1} \sum_{j_2=0}^{\rho_2} p_{kij}(t_1, t_2)\varphi^{(i,j)}(M_k) + R_N(t_1, t_2; M_k; p_{kij}; \varphi). \tag{4.2}$$

Обозначим через Ψ класс функций, на котором построены кубатурные формулы (4.2).

Введем функционалы $R_N(M_k, p_{kij}, \varphi) = \sup\limits_{(t_1,t_2)\in\Omega} |R_N(t_1, t_2; M_k; p_{kij}; \varphi)|$; $R_N(M_k, p_{kij}, \Psi) = \sup\limits_{\varphi\in\Psi} R_N(M_k; p_{kij}; \varphi)$; $\zeta_N[\Psi] = \inf\limits_{M_k, p_{kij}} |R_N(M_k, p_{kij}, \Psi)|$.

Кубатурная формула вида (4.2) с коэффициентами p^*_{kij} и узлами (M^*_k) является оптимальной, асимптотически оптимальной, оптимальной по порядку, если $R_N(M^*, p^*_{kij}, \Psi)/\zeta_N[\Psi] = 1, \sim 1, \asymp 1$.

Замечание. Говорят, что $\alpha_n \sim \beta_n$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n/\beta_n = 1$. Аналогично, $\alpha_n \asymp \beta_n$, если $0 < A \le \alpha_n/\beta_n \le B < \infty$, A, B – константы.

Ниже используется следующее утверждение, цитируемое по работе [36].

Лемма 4.1 *(С. А. Смоляк). Пусть функционалы $L(f), L_1(f), \ldots, L_N(f)$ – линейные и Ω – выпуклое центрально-симметричное множество с центром симметрии Q в линейном метрическом пространстве. Пусть $sup_{f\in\Omega_0} L(f) < \infty$, где $\Omega_0 \equiv \{f; \quad f \in \Omega, \quad L_k(f) = 0, \quad k = 1, 2, ..., N\}$. Тогда существуют числа $D_1, \ldots, D_N$, такие что $sup_{f\in\Omega} |L(f) - \sum_{k=1}^{N} D_k L_k(f)| = R(T)$, т. е. среди наилучших методов есть линейный.*

Следствие 4.1 $R(T) = \sup_{f\in\Omega_0} Lf$.

5. Оптимальные по порядку методы вычисления ГИ в весовых пространствах Соболева

Будем рассматривать гиперсингулярные интегралы вида

$$F(\varphi) = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - t)^p}, \tag{5.1}$$

которые будем вычислять по формулам

$$F(\varphi) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=0}^{\rho} p_{k,l}(t)\varphi^{(l)}(t_k) + R_n(p_{k,l}, t_k, \varphi), \tag{5.2}$$

где $p_{k,l}, t_k$ – коэффициенты и узлы квадратурной формулы.

Наряду с узлами $t_k, k = 1, \ldots, N$, введем узлы $t^1_k = -1 + (k/N)^v, t^2_k = 1 - (k/N)^v, k = 1, \ldots, N, v = (s + 1 - p)/(s + 1 - p - \gamma)$. Обозначим через $\{\xi_k\}, k = 1, \cdots, 3N + 1$, объединение узлов $t_k, k = 1, \ldots, N$, и $t^1_k = -1 + (k/N)^v, t^2_k = 1 - (k/N)^v, k = 0, 1, \ldots, N$.

Справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 5.1 *Пусть интеграл (5.1) вычисляется по кубатурной формуле (5.2), определенной на классе функций Ψ и использующей $n = (N(\rho+1))^2$ значений подынтегральной функции и ее производных. Тогда*

$$\zeta_n(\Psi) \geq An^{p-1} \inf_{\xi_k} \sup_{\varphi \in \Psi(\xi_k)} \int\limits_{\Omega} \varphi(t)dt. \tag{5.3}$$

Здесь нижняя грань берется по всевозможным сеткам узлов $(\xi_k) \in \Omega, k = 1, \cdots, N$; $\Psi(\xi_k), k = 1, \cdots, N$, означает множество функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих условиям: 1) функции $\varphi(t)$ – неотрицательные; 2) функции $\varphi(t)$ обращаются в нуль вместе с производными $\varphi^{(i)}(t)$, $(0 \leq i \leq \rho)$ в узлах ξ_k.

Доказательство проводится по аналогии с доказательствами, приведенными в монографии [13], и поэтому опускается.

Частными случаями теоремы 5.1 являются следующие утверждения.

Т е о р е м а 5.2 [13]. *Пусть $\varphi \in \Psi = W^r(1)$. Для квадратурных формул вида (5.2) справедлива оценка $\zeta_n[\Psi] \geq Cn^{-r-1+p}$.*

Т е о р е м а 5.3 *Пусть $\varphi \in \Psi = Q_{r,\gamma}([-1,1], M)$. Для квадратурных формул вида (5.2) справедлива оценка $\zeta_n[\Psi] \geq Cn^{-s-1+p}, s = r + \lceil\gamma\rceil$.*

Оптимальные по порядку по точности квадратурные формулы на классе $W^r([-1,1], M)$ построены в [13].

Построим оптимальную по порядку по точности квадратурную формулу на классе $Q_{r,\gamma}([-1,1], M)$.

Введем узлы $t_k = -1 + (k/N)^v, \tau = 1 - (k/N)^v, k = 0, 1, \ldots, N$, и сегменты $\Delta_k^1 = [t_k, t_{k+1}], \Delta_k^2 = [\tau_{k+1}, \tau_k], k = 0, 1, \ldots, N-1, v = (s-p+1)/(s-p+1-\gamma)$. Пусть $r \geq p-1$.

На сегменте $\Delta_k^i, k = 0, 1, \ldots, N-1, i = 1, 2$, построим интерполяционный полином Эрмита порядка s в случае $s \geq 2p$ или порядка $2p > s$ в противоположном случае. Будем считать, что $s \geq 2p$.

На сегменте Δ_k^i (ниже для определенности рассматривается сегмент Δ_k^1 и верхний индекс опускается) построим интерполяционный полином Эрмита $H(\varphi, \Delta_k)$, удовлетворяющий следующим условиям: $H^{(q)}(t_k) = \varphi^{(q)}(t_k), H^{(q)}(t_{k+1}) = \varphi^{(q)}(t_{k+1})$, $q = 0, 1, \ldots, p-1, H(t_{k,j}) = \varphi(t_{i,j}), t_{k,j} = t_k + (t_{k+1} - t_k)j/m_k, j = 1, 2, \ldots, m_k - 1, m_k = s - 2p$.

Будем вычислять интеграл (5.1) по квадратурной формуле

$$(H\varphi)(t) = \sum_{l=0}^{N-1} \int\limits_{\Delta_l^1} \frac{H(\varphi, \Delta_l^1)}{(\tau - t)^p} d\tau + \sum_{l=0}^{N-1} \int\limits_{\Delta_l^2} \frac{H(\varphi, \Delta_l^2)}{(\tau - t)^p} d\tau + R_N(\varphi). \tag{5.4}$$

Оценим погрешность формулы (5.4). Пусть $\psi(t, \Delta_k) = \varphi(t) - H(\varphi(t), \Delta_k), t \in \Delta_k$. Тогда

$$|R_N(\varphi)| \leq \sum_{k=0}^{N-1} |\int\limits_{\Delta_k^1} \frac{\psi(\tau, \Delta_k^1)}{(\tau - t)^p} d\tau| + \sum_{k=0}^{N-1} |\int\limits_{\Delta_k^2} \frac{\psi(\tau, \Delta_k^2)}{(\tau - t)^p} d\tau|. \tag{5.5}$$

Пусть $t = t_k^1$. Оценим интеграл

$$J_1 = |\int\limits_{\Delta_k^1} \frac{\psi(\tau, \Delta_k^1)}{(\tau - t_k^1)^p} d\tau|.$$

Воспользовавшись формулой Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. имеем

$$\psi(t, \Delta_k^1) = \frac{1}{(p-1)!} \int\limits_{t_k^1}^{t} \psi^{(p)}(\tau, \Delta_k^1)(t-\tau)^{p-1} d\tau$$

и $J_1 \leq C h_k \max_{t \in \Delta_k^1} |\psi^{(p)}(t, \Delta_k^1)|$, где $h_k = |t_{k+1}^1 - t_k^1|, k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Воспользовавшись неравенством А. А. Маркова [38], имеем

$$J_1 \leq C h_k^{(1-p)} \max_{t \in \Delta_k^1} |\psi(t, \Delta_k^1)|.$$

Рассмотрим отдельно два случая: 1) $k \neq 0$; 2)$k = 0$.

В первом случае $\max_{t \in \Delta_k^1} |\psi(t, \Delta_k^1)| \leq C \lambda_s \max_{t \in \Delta_k^1} |\varphi^{(s)}(t, \Delta_k^1)| h_k^s \leq C \lambda_s \left(\frac{N}{k}\right)^{v\gamma} h_k^s$, где λ_s- константа Лебега по узлам полинома Эрмита. Тогда

$$J_1 \leq C \left(\frac{N}{k}\right)^{v\gamma} h_k^{s+1-p} \leq \frac{1}{N^{s+1-p}}.$$

Во втором случае $\max_{t \in \Delta_k^1} |\psi(t, \Delta_k^1)| \leq C \lambda_s \max_{t \in \Delta_k^1} |\varphi^{(r)}(t, \Delta_k^1)| h_0^r$.

Пусть $\gamma-$ целое число.

Тогда

$$J_1 \leq C h_0^{r+1-p} \leq \frac{1}{N^{s+1-p}}.$$

При γ дробном получаем аналогичную оценку.

Следовательно, в обоих случаях

$$J_1 \leq \frac{1}{N^{s+1-p}}. \tag{5.6}$$

Рассмотрим теперь случай, когда $t \in \Delta_k^1, t \neq t_k^1, t_{k+1}^1$. Пусть $t \in [t_k^1, (t_k^1 + t_{k+1}^1)/2]$.

Оценим модуль интеграла:

$$J_2(t) = \int\limits_{\Delta_k^1} \frac{\psi(\tau, \Delta_k^1)}{(\tau - t)^p} d\tau.$$

Интеграл J_2 можно представить в виде:

$$J_2(t) =$$

$$= \int\limits_{\Delta_k^1} \frac{1}{(\tau-t)^p} \left[\psi(\tau, \Delta_k^1) - \left[\psi(t, \Delta_k^1) + \frac{\psi'(t, \Delta_k^1)}{1!}(\tau - t) + \ldots + \frac{\psi^{(p-1)}(t, \Delta_k^1)}{(p-1)!}(\tau-t)^{p-1}\right]\right] d\tau +$$

$$+ \psi(t, \Delta_k^1) \int\limits_{\Delta_k^1} \frac{d\tau}{(\tau-t)^p} + \frac{\psi'(t, \Delta_k^1)}{1!} \int\limits_{\Delta_k^1} \frac{d\tau}{(\tau-t)^{p-1}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\psi^{(p-1)}(t, \Delta_k^1)}{(p-1)!} \int\limits_{\Delta_k^1} \frac{d\tau}{\tau - t} = J_2^*(t) + J_{2,0}(t) + J_{2,1}(t) + .. + J_{2,p-1}(t).$$

Оценим в отдельности каждое слагаемое.

Используя формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, имеем

$$J_2^*(t) \le \left| \int\limits_{\Delta_k^1} \frac{1}{(\tau-t)^p} \left[\frac{1}{(p-1)!} \int\limits_t^\tau \psi^{(p)}(v,\Delta_k^1)(\tau-v)^{p-1}dv \right] d\tau \right| \le$$

$$\le Ch_k \max_{v\in\Delta_k^1} |\psi^{(p)}(v,\Delta_k^1)| \le Ch_k^{1-p} \max_{v\in\Delta_k^2} |\psi(v,\Delta_k^1)| \le$$

$$\le Ch_k^{1-p}\left(\frac{N}{k}\right)^{v\gamma} h_k^s = Ch_k^{s+1-p}\left(\frac{N}{k}\right)^{v\gamma} \le C\frac{1}{N^{s+1-p}}.$$

Легко показать, что

$$J_{2,0} = \left| \psi(t,\Delta_k^1) \int\limits_{\Delta_k^1} \frac{d\tau}{(\tau-t)^p} \right| \le C|\psi(t,\Delta_k^1)| \left[\left| \frac{1}{(t_{k+1}^1-t)^{(p-1)}} \right| + \left| \frac{1}{(t_k^1-t)^{(p-1)}} \right| \right] \le$$

$$\le C|\psi_k(t,\Delta_k^1)| \frac{1}{(t-t_k^1)^{p-1}}.$$

Разложим функцию $\psi_k(t,\Delta_k^1)$ по степеням $t-t_k$:

$$\psi_k(t,\Delta_k) = \frac{1}{(p-1)!} \int\limits_{t_k}^t \psi_k^{(p)}(\tau,\Delta_k)(\tau-t_k)^{p-1}d\tau.$$

Отсюда

$$|J_{2,0}(t)| \le C \max_{t\in\Delta_k^1} |\psi^{(p)}(t,\Delta_k^1)h_k| \le Ch_k^{1-p} \max_{t\in\Delta_k^1} |\psi(t,\Delta_k^1)| \le$$

$$\le Ch_k^{1-p}h_k^s \frac{1}{(d(t,\Gamma))^\gamma} \le Ch_k^{s+1-p}\left(\frac{N}{k}\right)^{v\gamma} \le C\frac{1}{N^{s+1-p}}.$$

Аналогичным образом оцениваются функции $J_{2,1},..J_{2,p-1}$.

Таким образом, $|J_2(t)| \le CN^{-(s+1-p)}$, и из этого неравенства и неравенства (5.6) следует, что при $t\in\Delta_k^1$:

$$\left| \int\limits_{\Delta_k^1} \frac{\psi_k(\tau,\Delta_k^1)}{(\tau-t)^p} d\tau \right| \le \frac{C}{N^{s+1-p}}.$$

Аналогичным образом можно показать, что при $t\in\Delta_{k-1}^1$ и $t\in\Delta_{k+1}^1$:

$$\left| \int\limits_{\Delta_k^1} \frac{\psi_k(\tau,\Delta_k^1)}{(\tau-t)^p} d\tau \right| \le \frac{C}{N^{s+1-p}},$$

а при $t\in\Delta_l^i, l=0,1,..,N-1, l\ne k-1,k,k+1, i=1,2$:

$$\left|\int\limits_{\Delta_k^1}\frac{\psi_k(\tau,\Delta_k^1)}{(\tau-t)^p}d\tau\right|\le Ch_k^{s+1}\left(\frac{N}{k}\right)^{v\gamma}\frac{N^{vp}}{|k^v-l^v|^p}\le$$

$$\le C\frac{k^{(v-1)(s+1)-\gamma v-\gamma p}}{N^{v(s+1-\gamma-p)}}\frac{1}{|1-(\frac{l}{k})^v|^p}\le C\frac{1}{N^{s+1-p}}\frac{1}{|1-(\frac{l}{k})^v|^p}\frac{1}{k^p}.$$

Следовательно,

$$|R_N(\varphi)|\le\frac{C}{N^{s+1-p}}\max_{1\le k\le N-1}\frac{1}{k^p}\sum_{l=0}^{N-1}\frac{1}{|1-(\frac{l}{k})^v|^p}\le\frac{C}{N^{s-p+1}}.$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 5.4 *Среди квадратурных формул вида (5.2) на классе функций $\Psi=Q_{r,\gamma}(\Omega,M),\Omega=[-1,1]^l,l=2,3,\ldots,$ оптимальной по порядку по точности является формула (5.4) с погрешностью $|R_N[\Psi]|\asymp N^{-(s-p+1)}$.*

6. Оптимальные по порядку методы вычисления многомерных гиперсингулярных интегралов в весовых пространствах Соболева

Будем рассматривать многомерные гиперсингулярные интегралы вида

$$H\varphi=\int\limits_{-1}^{1}\cdots\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau_1,\ldots,\tau_l)d\tau_1\cdots d\tau_l}{((\tau_1-t_1)^2+\cdots+(\tau_l-t_l)^2)^{p/2}},\quad p>l. \tag{6.1}$$

Функция $\varphi(t_1,\ldots,t_l)$ удовлетворяет условиям, достаточным для существования гиперсингулярного интеграла (6.1).

Для вычисления интеграла (6.1) будем использовать кубатурные формулы

$$H\varphi=\sum_{k_1=1}^{N_1}\cdots\sum_{k_l=1}^{N_l}\sum_{i_1=0}^{\rho_1}\cdots\sum_{i_l=0}^{\rho_l}p_{k_1\cdots k_l i_1\cdots i_l}(t_1,\ldots,t_l)\varphi^{(i_1,\ldots,i_l)}(x_{1,k_1},\cdots,x_{l,k_l})+$$
$$+R_N(t_1,\ldots,t_l,x_{1,k_1},\cdots,x_{l,k_l};p_{k_1\cdots k_l i_1\cdots i_l};\varphi) \tag{6.2}$$

и

$$H\varphi=\sum_{k=1}^{N}p_k(t_1,\ldots,t_l)\varphi(\mu_k)+R_N(t_1,\ldots,t_l,\mu_k,p_k,\varphi). \tag{6.3}$$

Здесь $p_{k_1\cdots k_l i_1\cdots i_l}(t_1,\ldots,t_l)$ и $\{x_{1,k_1},\cdots,x_{l,k_l}\}$, $(-1\le x_{k_i}\le 1)$, $k_i=1,2,\ldots,N_i$, $i==1,2,\ldots,l-$ коэффициенты и узлы кубатурной формулы (6.2), а $p_k(t_1,\ldots,t_l)$ и $\mu_k(\mu_k\in\in\Omega=[-1,1]^l)$, $k=1,2,\ldots,N-$ коэффициенты и узлы кубатурной формулы (6.3).

Пусть $\varphi(t_1,\ldots,t_l)\in W^{\rho_1,\ldots,\rho_l}$.

Через $\varphi^{(i_1,\ldots,i_l)}(t_1,\ldots,t_l)$ обозначены частные производные

$$\varphi^{(i_1,\ldots,i_l)}(t_1,\ldots,t_l)=\partial^{i_1+\ldots+i_l}\varphi(t_1,\ldots,t_l)/\partial t_1^{i_1},\ldots,\partial t_l^{i_l},0\le i_j\le\rho_j,j=1,\ldots,l.$$

В формуле (6.2) положим $N_1=N_2=\cdots=N_l=N$ и $\rho_1=\rho_2=\cdots=\rho_l=\rho$, $l=2$.

Т е о р е м а 6.1 [37]. *Пусть интеграл (6.1) определен на классе функций* Ψ *и вычисляется по кубатурной формуле (6.2), использующей* $n = ((N+1)(\rho+1))^2$ *значений подынтегральной функции и ее производных. Тогда*

$$\zeta_n(\Psi) \geq An^{(p-2)/2} \inf_{\xi_k,\kappa_l} \sup_{\varphi\in\Psi(\xi_k,\kappa_l)} \int\int_{\Omega} \varphi(t_1,t_2)dt_1dt_2.$$

Здесь нижняя грань берется по всевозможным сеткам узлов $\{\xi_k,\kappa_l\}, k,l = 0,1,\cdots,2N+1$, таким что $(\xi_k,\kappa_l) \in \Omega, k,l = 0,1,\cdots,2N + 1$; $\Psi(\xi_k,\kappa_l), k,l = 0,1,\cdots,2N+1$, означает множество функций $\varphi(t_1,t_2) \in \Psi$, удовлетворяющих условиям: 1) функции $\varphi(t_1,t_2) \geq 0$; 2) функции $\varphi(t_1,t_2)$ обращаются в нуль вместе с производными $\varphi^{(i,j)}(t_1,t_2)$, $(0 \leq i \leq \rho_1,\ 0 \leq j \leq \rho_2)$ в узлах $(x_{1,k_1}, x_{2,k_2}), k_i = 0,\dots,N, i = 1,2$.

В доказательстве теоремы 6.1 не был использовался тот факт, что сетка узлов в формуле (6.2) является прямоугольной. Повторяя доказательство теоремы 6.1, приходим к

Т е о р е м а 6.2 *Пусть гиперсингулярный интеграл (6.1) определен на классе функций* Ψ *и вычисляется по формуле (6.3). Тогда*

$$\zeta_N(\Psi) \geq cN^{(p-2)/2} \inf_{\mu_k} \sup_{\varphi\in\Psi(\mu_k)} \int\int_{\Omega} \varphi(\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_1d\sigma_2.$$

Здесь нижняя грань берется по всевозможным сеткам узлов $\{\mu_k\}, k,l = 0,1,\cdots,2N+2$, таким что $(\mu_k) \in \Omega, k = 0,1,\cdots,2N+1$; $\Psi(\mu_k)$ означает множество функций $\varphi(\sigma_1,\sigma_2)$, входящих в класс функций Ψ и удовлетворяющих условиям: 1) функции $\varphi(\sigma_1,\sigma_2) \geq 0$; 2) функции $\varphi(\sigma_1,\sigma_2)$ обращаются в нуль вместе с производными $\varphi(i,j)(\sigma_1,\sigma_2)$ порядков $(0 \leq i,j \leq \rho)$ в узлах (μ_k).

Оценки функционалов вида $\inf\limits_{\xi_k,\kappa_l} \sup\limits_{\varphi\in\Psi(\xi_k,\kappa_l)} \int\int\limits_{\Omega} \varphi(\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_1d\sigma_2$ известны для многих классов функций Ψ.

Известна основанная на лемме Смоляка связь между функционалами $\inf\limits_{\xi_k,\kappa_l} \sup\limits_{\varphi\in\Psi(\xi_k,\kappa_l)} \int\int\limits_{\Omega} \varphi(\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_1d\sigma_2$ и оценками точности наилучших кубатурных формул вычисления интегралов вида $\int\int\limits_{\Omega} \varphi(\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_1d\sigma_2$.

Используя эти результаты, приходим к следующим оценкам.

Т е о р е м а 6.3 *Пусть* $\Psi \in W^{r,r}(1)$. *Для всевозможных кубатурных формул вида (6.2) справедлива оценка* $\zeta_N[\Psi] \geq An^{-(r+2-p)/2}$, *где* $n-$ *число узлов кубатурной формулы (6.2).*

Т е о р е м а 6.4 *Пусть* $\Psi = C_2^r(1)$. *Для всевозможных кубатурных формул вида (6.2) справедлива оценка* $\zeta_N[\Psi] \geq An^{-(r+2-p)/2}$, *где* $n-$ *число узлов кубатурной формулы (6.2).*

Результаты [34; 39; 40] позволяют оценить снизу функционалы $\zeta_N[\Psi]$ на ряде классов функций.

Будем рассматривать интегралы (6.1) и кубатурные формулы (6.2) и (6.3) при $l \geq 2$.

Т е о р е м а 6.5 *Пусть $\Psi = Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $\Omega = [-1,1]^l$, $l = 2,3,\ldots$. Пусть интеграл (6.1) вычисляется по кубатурной формуле (6.2). Тогда*

$$\zeta_n(Q_{r,\gamma}(\Omega, M)) \geq An^{(p-l)/l} \begin{cases} n^{-(s+1-\gamma)/(l-1)}, \ v > l/(l-1), \\ n^{-s/l}, \ v < l/(l-1), \\ \dfrac{(\ln n)^{s+l-\gamma}}{n^{(s+1-\gamma)/(l-1)}} \ v = l/(l-1), \end{cases}$$

где $v = s/(s-\gamma)$, n – число узлов кубатурной формулы.

Т е о р е м а 6.6 *Пусть $\Psi = \bar{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $\Omega = [-1,1]^l$, $l = 2,3,\ldots$. Пусть интеграл (6.1) вычисляется по кубатурной формуле (6.2). Тогда*

$$\zeta_n(\bar{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega, M)) \geq An^{(p-l)/l} \begin{cases} \dfrac{\ln^{u-1} n}{n^{(r+1)/(l-1)}}, \ v > l/(l-1), \\ \dfrac{1}{n^{s/l}}, \ v < l/(l-1), \\ \dfrac{\ln^{(l+s)u/(r+l)}}{n^{s/l}}, \ v = l/(l-1), \dfrac{lu}{r+l} \geq 1 + \dfrac{l(u-1)}{s+l}, \\ \dfrac{\ln^{u+s/l}}{n^{s/l}}, \ v = l/(l-1), \dfrac{lu}{r+l} \leq 1 + \dfrac{l(u-1)}{s+l}, \end{cases}$$

где $v = (s+l)/(s+l-\gamma)$, $n-$ число узлов кубатурной формулы.

Т е о р е м а 6.7 *Пусть $\Psi = \bar{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $\Omega = [-1,1]^l$, $l = 2,3,\ldots$. Пусть интеграл (6.1) вычисляется по кубатурной формуле (6.2). Тогда*

$$\zeta_n(Q^u_{r,\gamma}(\Omega, M)) \geq An^{(p-l)/l} \begin{cases} \dfrac{\ln^{u-1} n}{n^{(r+1)/(l-1)}}, \ v > l/(l-1), \\ \dfrac{1}{n^{s/l}}, \ v < l/(l-1), \\ \dfrac{\ln^{(l+s)u/(r+l)}}{n^{s/l}}, \ v = l/(l-1), \dfrac{lu}{r+l} \geq 1 + \dfrac{l(u-1)}{s+l}, \\ \dfrac{\ln^{u+s/l}}{n^{s/l}}, \ v = l/(l-1), \dfrac{lu}{r+l} \leq 1 + \dfrac{l(u-1)}{s+l}, \end{cases}$$

где $v = (s+l)/(s+l-\gamma)$, n – число узлов кубатурной формулы.

В работе [37] построены оптимальные по порядку кубатурные формулы вычисления интегралов вида (6.1) на классах функций $W^{r,r}(\Omega, 1)$ и $C_2^r(\Omega, 1), \Omega = [-1,1]^2$.

Пусть $\Delta_{kl} = [v_k, v_{k+1}; v_l, v_{l+1}]$, $k, l = 0, 1, \ldots, N-1$, $v_k = -1 + 2k/N$, $k = 0, 1, \ldots, N$. интерполяционный полином $P_{r,r}(\varphi, \Delta_{k,l})$ степени r по каждой переменной строится в области $\Delta_{k,l}$ по $r+1$ равноотстоящему узлу по переменным $\sigma_i, i = 1, 2$, причем вершины квадрата $\Delta_{k,l}$ входят в число узлов интерполяции.

Пусть $(t_1, t_2) \in \Delta_{ij}$, $i, j = 0, 1, \ldots, N-1$. Интеграл (6.1) будем вычислять по кубатурной формуле

$$H\varphi = \sum_{k=0}^{N-1} {\sum_{l=0}^{N-1}}' \int\int_{\Delta_{kl}} \frac{P_{rr}(\varphi, \Delta_{kl}) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} +$$

$$+\int\int\limits_{\Delta^*_{ij}} \frac{P_{rr}(\varphi,\Delta^*_{ij})d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}}+R_N(\varphi), \tag{6.4}$$

где $\Delta^*_{ij}=[v_{i-1},v_{i+2};v_{j-1},v_{j+2}]$; $\sum\sum'$ означает суммирование по k и l, таким что мера пересечения квадратов Δ_{kl} с квадратом Δ^*_{ij} равна нулю.

Теорема 6.8 [37]. *Пусть $\Psi=C_2^r(1)$. Среди всевозможных кубатурных формул вида (6.2) оптимальной по порядку на классе функций $\Psi=C_2^r(1)$ является формула (6.4) с погрешностью*

$$R_N[\Psi]\asymp\frac{1}{n^{(r+2-p)/2}},$$

где n – число узлов кубатурной формулы.

Построим оптимальную по порядку кубатурную формулу для вычисления интеграла (6.1) на классе функций $Q_{r,\gamma}(\Omega,M)$, $\Omega=[-1;1]^l, l=2,3,....$

Через Δ^0 обозначим множество точек t $(t=(t_1,..,t_l))$, для которых выполняются неравенства:

$$0\le d(t,\Gamma)\le\left(\frac{1}{N}\right)^v.$$

Через $\Delta^k, k=1,2,..,N-1$ обозначим множество точек, для которых выполняются неравенства:

$$\left(\frac{k}{N}\right)^v\le d(t,\Gamma)\le\left(\frac{k+1}{N}\right)^v.$$

Здесь $v=(s+1-p)/(s+1-p-\gamma)$.

Покроем куб Ω областями $\Delta^k, k=0,1,..,N-1$.

Каждую область $\Delta^k, k=0,1,..,N-1$, покроем кубами и параллелепипедами с гранями, параллельными координатным плоскостям, и с ребрами, длины которых не меньше h_k и не больше $2h_k$, где $h_k=(\frac{k+1}{N})^v-(\frac{k}{N})^v$.

Полученные в результате области обозначим через $\Delta^k_{i_1,..,i_l}, k=0,1,..,N-1$.

В каждой области $\Delta^k_{i_1,..,i_l}$ функцию $\varphi(t)$ будем аппроксимировать интерполяционным полиномом Эрмита $P_{s,..s}(\varphi,\Delta^k_{i_1,..,i_l})$, где $P_{s,..s}[\varphi]=P_s^{t_1}[P_s^{t_2}...[P_s^{t_l}[\varphi(t)]]...]$. Здесь через $P_s^t[f,[a,b]]$ обозначен интерполяционный полином порядка s, интерполирующий функцию $f(t)$ на сегменте $[a,b]$ по $s+1$ равноотстоящему узлу, в число которых входят точки a и b. В вершинах областей $\Delta^k_{i_1,..,i_l}$ значение полинома Эрмита $P_{s,..s}(\varphi,\Delta^k_{i_1,..,i_l})$ и его частных производных $l=2,3,\dots,(p-1)$ порядка совпадает со значениями функции φ и ее частных производных.

Интегралу (6.1) поставим в соответствие кубатурную формулу:

$$H\varphi=\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i_1,..,i_l}\int_{\Delta^k_{i_1,...,i_l}}..\int\frac{P_{s,..s}(\varphi,\Delta^k_{i_1,..,i_l})d\tau_1,..,d\tau_l}{((\tau_1-t_l)^2+..+(\tau_l-t_l)^2)^{\frac{p}{2}}}+R_N(\varphi). \tag{6.5}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 6.9 *Пусть $\Psi=Q_{r,\gamma}(\Omega,M)$, $\Omega=[-1,1]^l$. Среди квадратурных формул вида (6.2) оптимальной по порядку по точности на классе функций Ψ является формула (6.5). Ее погрешность равна*

$$R_N[\Psi] \asymp n^{(p-l)/l} \begin{cases} n^{-(s+1-\gamma)/(l-1)}, \ v > l/(l-1), \\ \dfrac{(lnn)^{s+l-\gamma}}{n^{(s+1-\gamma)/(l-1)}}, \ v = l/(l-1), \\ n^{-s/l}, \ v < l/(l-1). \end{cases}$$

7. Заключение

В работе посторoены оптимальные по порядку (по точности) алгоритмы вычисления ГИ на весовых пространствах Соболева. В качестве весовой берется степенная функция расстояния от точки до границы области. К пространствам Соболева с подобными весовыми функциями принадлежат решения слабосингулярных, сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений. Этими пространствами описывается ряд физический полей, в частности гравитационных, электромагнитных, акустических. Необходимость вычисления гиперсингулярных интегралов на весовых пространствах Соболева обусловлена необходимостью вычислять трансформации этих полей для выделения их особенностей.

Предложенные в работе методы построения оптимальных по порядку квадратурных и кубатурных формул вычисления ГИ могут быть распространены на другие виды особых интегралов.

Список литературы

1. Некрасов А. И. Теория крыла в нестационарном потоке. – М.: Изд-во АН СССР, 1947. С. 3–65.
2. Бисплингхофф Р., Эшли Х., Халфмен Р. Аэроупругость. – М.: Иностр. лит., 1958. 283 с.
3. Эшли Х., Лэндал М. Аэродинамика крыльев и корпусов летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1969. 129 с.
4. Вайникко Г. М., Лифанов Л. Н., Полтавский И. К. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. М : Янус-К, 2001. 508 с.
5. Назарчук З. Т. Численное исследование дифракций на цилиндрических структурах. Киев: Наукова думка, 1989. 256 с.
6. Марчук Г. И., Лебедев В. И. Численные методы в теории переноса нейтронов. М.: Атомиздат. 1971. 496 с.
7. Бойков И. В., Бойкова А. И. Приближенные методы решения прямых и обратных задач гравиразведки. Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та. 2013. 510 с.
8. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
9. Бойков И. В., Бойкова А. И. Аналитические методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. Математика. 2017. Т. 42, № 2. С. 63–78. DOI: https://doi.org/10.21685/2072-3040-2017-2-6

10. Иванов В. В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. Киев.: Наукова думка, 1968. 288 с.

11. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн. М.: ТОО «Янус». 1995. 520 с.

12. Бойков И. В. Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Ч. 1. Сингулярные интегралы. Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2005. 360 с.

13. Бойков И. В. Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Ч. 2. Гиперсингулярные интегралы. Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2009. 252 с.

14. Хубежты Ш. С. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и некоторые их применения : монография., Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2011. 236 с.

15. Frank S. Numerical Methods Based on Sinc and Analytic Functions. New York: Springer-Verlag, 1993. 565 p.

16. Frank S. Handbook of sink numerical methods. Boca Raton: CRC Press, 2011. 482 p.

17. Boykov I. V., Ventsel E. S., Boykova A. I. Accuracy optimal methods for evaluating hypersingular integrals // Applied Numerical Mathematics, 2009. Vol. 59, No. 6, pp. 1366–1385.

18. Бойков И. В., Сёмов М. А. Об одном методе вычисления гиперсингулярных интегралов // Известия вузов. 2016. № 3. С. 3–17.

19. Саакян А. В. Решение задачи для краевой трещины с гиперсингулярным определяющим уравнением методом механических квадратур // Известия Национальной академии наук Армении. Механика. 2020. Т. 73, № 2. С. 44–57. DOI: http://doi.org/10.33018/73.2.4

20. Саакян А. В. Квадратурная формула для гиперсингулярного интеграла, содержащего весовую функцию многочленов Якоби с комплексными показателями // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2020. № 2. С. 94–100. DOI: http://doi.org/10.18522/1026-2237-2020-2-94-100

21. De Bonis M. C., Occorsio D. Numerical methods for hypersingular integrals on the real line // Dolomites Research Notes on Approximation. 2017. Vol. 10. pp. 97–117.

22. Hu C., He X., Lu T. Euler-Maclaurin expansions and approximations of hypersingular integrals // Discrete. Continuous Dynamical Systems – B. 2015. Vol. 20, No. 5. pp. 1355–1375. DOI: http://doi.org/10.3934/dcdsb.2015.20.1355

23. Lee Cheuk-Yu, Wang Hui, Qin, Qing-Hua. Efficient hypersingular line and surface integrals direct evaluation by complex variable differentiation method // Applied Mathematics and Computation. 2018. Vol. 316, No. C. pp. 256–281. DOI: http://doi.org/10.1016/j.amc.2017.08.027

24. Korsunsky A. M. On the use of interpolative quadratures for hypersingular integrals in fracture mechanics // Procceding of the Royal Society. A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2002. pp. 2721–2733.

25. Kolm P., Rokhlin V. Numerical quadratures for singular and hypersingular integrals // Computers and Mathematics with Applications. 2001. Vol. 41. pp. 327–352.

26. Плиева Л. Ю. Квадратурные формулы интерполяционного типа для гиперсингулярных интегралов на отрезке интегрирования // Сибирский журнал вычислительной математики. 2016. Т. 19, № 4. С. 419–428.

27. Obaiys S. J., Ibrahim R. W., Ahmad A. F. Hypersingular Integrals in Integral Equations and Inequalities: Fundamental Review Study // Differential and Integral Inequalities / ed. by D. A. Themistocles. M. Rassias: Springer, 2019. pp. 687–717.

28. Zhang X., Wu J., Yu D. Superconvergence of the composite Simpson's rule for a certain finite-part integral and its applications // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2009. Vol. 223, Issue 2. pp. 598–613.

29. Бойков И. В., Айкашев П. В. Приближенные методы вычисления гиперсингулярных интегралов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2021. № 1. С. 66–84. DOI: http://doi.org/10.21685/2072-3040-2021-1-6

30. Hadamard J. Lecons sur la Propagation des Ondes et les Equations de l'Hydrodynamique. Herman-Paris, 1903. 320 p. (reprinted by Chelsea-New York, 1949).

31. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. 351 с.

32. Чикин Л. А. Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений // Уч. записки Казан. гос ун-та. 1953. Т. 113, кн. 10. С. 57–105.

33. Бойков И. В. Аппроксимация некоторых классов функций локальными сплайнами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1998. Т. 38, № 1. С. 25–33

34. Бойков И. В. Оптимальные методы приближения функций и вычисления интегралов. Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2007. 236 с.

35. Бабенко К. И. О некоторых задачах теории приближений и численного анализа / К. И. Бабенко Успехи математических наук. 1985. Т. 40, № 1. С. 3–28.

36. Бахвалов Н. С. О свойствах оптимальных методов решения задач математической физики // Вычислит. матем. и матем. физика. 1970. Т. II, № 3. С. 555–568.

37. Бойков И. В., Захарова Ю. Ф. Оптимальные методы вычисления многомерных гиперсингулярных интегралов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2012. Т. 21, № 1. С. 3–21.

38. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М.; Л.: ГИФМЛ, 1949. 688 с.

39. Бойков И. В. Оптимальные кубатурные формулы вычисления многомерных интегралов на классе $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$ // Журнал вычисл. матем. и матем.физики, 1990. Т. 29, № 8. С. 1123–1132.

40. Бойков И. В. Оптимальные по порядку кубатурные формулы вычисления многомерных интегралов в весовых пространствах Соболева // Сибирский математический журнал. 2016. № 3. С. 543–561.

Поступила 15.09.2021; доработана после рецензирования 10.11.2021; принята к публикации 16.11.2021

Информация об авторах:

Бойков Илья Владимирович, заведующий кафедрой высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет (440000, Россия, г. Пенза, ул. Красная, д. 40), доктор физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6980-933X, boikov@pnzgu.ru

Бойкова Алла Ильинична, доцент кафедры высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет (440000, Россия, г. Пенза, ул. Красная, д. 40), кандидат физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0436-0460, allaboikova@mail.ru

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Original article

MSC2020 65D32

Optimal with respect to accuracy methods for evaluating hypersingular integrals

I. V. Boykov, A. I. Boykova

Penza State University (Penza, Russian Federation)

Abstract. In this paper we constructed optimal with respect to order quadrature formulas for evaluating one- and multidimensional hypersingular integrals on classes of functions $\Omega^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $\bar{\Omega}^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $\Omega = [-1, 1]^l$, $l = 1, 2, \ldots, M = Const$, and γ is a real positive number. The functions that belong to classes $\Omega^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$ and $\bar{\Omega}^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$ have bounded derivatives up to the rth order in domain Ω and derivatives up to the sth order ($s = r + \lceil\gamma\rceil$) in domain $\Omega\backslash\Gamma$, $\Gamma = \partial\Omega$. Moduli of derivatives of the vth order ($r < v \leq s$) are power functions of $d(x, \Gamma)^{-1}(1 + |\ln d(x, \Gamma)|)$, where $d(x, \Gamma)$ is a distance between point x and Γ. The interest in these classes of functions is due to the fact that solutions of singular and hypersingular integral equations are their members. Moreover various physical fields, in particular gravitational and electromagnetic fields belong to these classes as well. We give definitions of optimal with respect to accuracy methods for solving hypersingular integrals. We constructed optimal with respect to order of accuracy quadrature formulas for evaluating one- and multidimensional hypersingular integrals on classes of functions $\Omega^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$ and $\bar{\Omega}^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$.

Key Words: hypersingular integrals, quadrature formulas, optimal methods

For citation: *I. V. Boykov, A. I. Boykova.* Optimal with respect to accuracy methods for evaluating hypersingular integrals. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 23:4(2021), 360–378. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202104.360–378

References

1. A. I. Neckrasov, *Wave theory in unsteady flow*, Moscow. USSR Science Academy Publ., 1947 (In Russ.).

2. R. Bisplinghoff, H. Ashley, R. Halfman, *Aeroelasticity*, Inostrannaya Literatura Publ., Moscow, 1958 (In Russ.), 283 p.

3. H. Ashlay, M. Landahl, *Aerodynamics of wings and bodies*, Mashinostroyeniye Publ., Moscow, 1969 (In Russ.), 129 p.

4. G. M. Vainikko, L. N. Lifanov, I. K. Poltavsky, *Numerical methods in hypersingular integral equarions and their applications*, Yanus-K,, Moscow, 2001 (In Russ.), 508 p.

5. Z. T. Nazarcyk, *Numerical study of diffracion on cylynder structures*, Naukova dumka Publ., Kiev, 1989 (In Russ.), 256 p.

6. G. I. Marchuk, V. I. Lebedev, *Numerical methods in neutron transfer theory*, Atomizdat Publ., Moscow, 1971 (In Russ.), 496 p.

7. I. V. Boykov, A. I. Boykova, *Approximate methods for solving direct and inverce gravitation problems*, Penza State University Publ., Penza, 2013 (In Russ.), 510 p.

8. F. D. Gakhov, *Boundary problems*, Nauka Publ., Moscow, 1977 (In Russ.), 640 p.

9. I. V. Boykov, A. I. Boykova, "Analytical methods for solving singular and hypersingular integral equations", *Izvestiya vuzov. Volga region. Mathematics*, 2017, no. 2, 63–78 (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.21685/2072-3040-2017-2-6

10. I. V. Ivanov, *Approximation theory and its application to numerical solution of singular integral equations*, Naukova dumka Publ., Kiev, 1968 (In Russ.), 288 p.

11. I. K. Lifanov, *Singular integral equations method and implementation in mathematical physics, aerodynamics, elasticity theory and wave diffraction*, Yanus Publ., Moscow, 1995 (In Russ.), 520 p.

12. I. V. Boykov, *Approximate methods for evaluating singular and hypersingular integrals. Part 1. Singular integrals*, Penza State University Publ., Penza, 2005 (In Russ.), 360 p.

13. I. V Boykov, *Approximate methods for evaluating singular and hypersingular integrals. Part 2. Hypersingular integrals*, Penza State University Publ., Penza, 2009 (In Russ.), 252 p.

14. Sh. C. Hubezhti, *Quadrature formulas for singular integrals and applications*, YUMI VNTS RAN I RSO-A Publ., Vladikavkaz, 2011 (In Russ.), 235 p.

15. S. Frank, *Numerical methods based on sinc and analytic functions*, Springer-Verlag, New York, 1993, 565 p.

16. S. Frank, *Handbook of sink numerical methods*, CRC Press, Boca Raton, 2011, 482 p.

17. I. V. Boykov, E. S. Ventsel, A. I. Boykova, "Accuracy optimal methods for evaluating hypersingular integrals", *Applied Numerical Mathematics*, **59**:6 (2009), 1366–1385.

18. I. V. Boykov, M. A. Semov, "One method of calculating hypersingular integrals", *Izvestiya vuzov*, 2016, no. 3, 3–17 (In Russ.).

19. A. V. Saakyan, "Solving the problem for a boundary crack with hypersingular equation by mechanical quadratures", *Armenia National Academy of Science Proceedings. Mechanics*, **73**:2 (2020), 44–57 (In Russ.).

20. A. V. Saakyan, "Quadrature formula for hypersingular integral containing weight function of Jacobi polynomials with complex exponentials", *Izvestiya vusov. Northen-Kavkaz. Natural Sciences*, 2020, no. 2, 94–100 (In Russ.). DOI: http://doi.org/10.18522/1026-2237-2020-2-94-100

21. M. C. De Bonis, D. Occorsio, "Numerical methods for hypersingular integrals on the real line", *Dolomites Research Notes on Approximation*, **10** (2017), 97–117.

22. C. Hu, X. He, T. Lu, "Euler-Maclaurin expansions and approximations of hypersingular integrals", *Discrete. Continuous Dynamical Systems – B*, **20**:5 (2015), 1355–1375. DOI: http://doi.org/10.3934/dcdsb.2015.20.1355

23. Cheuk-Yu Lee, Hui Wang, Qing-Hua Qin, "Efficient hypersingular line and surface integrals direct evaluation by complex variable differentiation method", *Applied Mathematics and Computation*, **316**:C (2018), 256–281. DOI: http://doi.org/10.1016/j.amc.2017.08.027

24. A. M. Korsunsky, "On the use of interpolative quadratures for hypersingular integrals in fracture mechanics", *Procceding of the Royal Society. A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2002, 2721–2733.

25. P. Kolm, V. Rokhlin, "Numerical quadratures for singular and hypersingular integrals", *Computers and Mathematics with Applications*, **41** (2001), 327–352.

26. L. Yu. Plieva, "Quadrature interpolation type formulas for hypersingular integrals in the interval of integration", *Siberian Journal of Numerical Mathematics*, **19**:4 (2016), 419–428 (In Russ.).

27. S. J. Obaiys, R. W. Ibrahim, A. F. Ahmad, "Hypersingular integrals in integral equations and inequalities: fundamental review study", *Differential and Integral Inequalities*, Springer, 2019, 687–717.

28. X. Zhang, J. Wu, D. Yu, "Superconvergence of the composite Simpson's rule for a certain finite-part integral and its applications", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **223**:2 (2009), 598–613.

29. I. V. Boykov, P. V. Aykashev, "Approximate methods for calculating hypersingular integrals", *Izvestiya vuzov. Volga region. Mathematics*, 2021, no. 1, 66–84 (In Russ.).

30. J. Hadamard, *Lecons sur la propagation des ondes et les equations de l'hydrodynamique*, Herman, Paris, 1903, 320 p.

31. J. Hadamard, *Cauchy problem for linear equations with partial derivatives of hyperbolic type*, Nauka Publ., Moscow, 1978 (In Russ.), 351 p.

32. L. A. Chikin, "Special cases for Riemann boundary problem and singular integrals", *Kazan State University Notes*, **113**:10 (1953), 57–105 (In Russ.).

33. I. V. Boykov, "Approximation of some function classes with local splines", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **38**:1 (1998), 25–33 (In Russ.).

34. I. V. Boykov, *Optimal methods for functions approximation and integrals calculation*, Penza State University Publ., Penza, 2007 (In Russ.), 236 p.

35. K. I. Babenko, "On some problems of approximation theory and numerical analysis", *Russian Mathematical Surveys*, **40**:1 (1985), 3–28 (In Russ.).

36. N. S. Bahvalov, "On some optimal methods for mathematical physics problems solutions", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **II**:3 (1970), 555–568 (In Russ.).

37. I. V. Boykov, Yu. F. Zakharova, "Optimal methods for evaluating multidimensional hypersingular integrals", *Izvestiya vuzov. Volga region. Mathematics*, **21**:1 (2012), 3–21 (In Russ.).

38. I. P. Natanson, *Constructive theory of functions*, GIFML Publ., Moscow, Leningrad, 1949 (In Russ.), 688 p.

39. I. V. Boykov, "Optimal cubature formulas for evaluating of multidimensional integrals on class $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **29**:8 (1990), 1123–1132 (In Russ.).

40. I. V. Boykov, "Optimal with respect to order cubature formulas for calculating multidimensional integrals in weighted Sobolev spaces", *Siberian Journal of Numerical Mathematics*, 2016, no. 3, 543–561 (In Russ.).

Submitted 15.09.2021; Revised 10.11.2021; Accepted 16.11.2021

Information about the authors:

Ilya V. Boykov, Head of Department of High and Applied Mathematics, Penza State University (40 Krasnaya St., Penza 440000, Russia), D. Sci. (Physics and Mathematics), https://orcid.org/0000-0002-6980-933X, boikov@pnzgu.ru

Alla I. Boykova, Department of High and Applied Mathematics, Penza State University (40 Krasnaya St., Penza 440000, Russia), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0436-0460, allaboikova@mail.ru

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: the authors declare no conflict of interest.