DOI 10.15507/2079-6900.23.202103.285–294
Оригинальная статья
ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.925

О сохранении устойчивости равновесия нелинейных осцилляторов при консервативных возмущениях

А. А. Косов

Институт динамики систем и теории управления им В. М. Матросова СО РАН (ИДСТУ СО РАН)(г. Иркутск, Российская Федерация)

Аннотация. Рассматривается задача Ю. Н. Бибикова о сохранении устойчивости положения равновесия двух взаимосвязанных нелинейных осцилляторов при действии малых в определенном смысле консервативных возмущающих сил. При разных способах сведения системы к гамильтоновой форме выявлены некоторые особенности для случая, когда возмущающие силы взаимодействия двух осцилляторов являются потенциальными. Получены условия сохранения устойчивости и неустойчивости равновесия двух осцилляторов для случая достаточно малых возмущающих сил. Задача о сохранении устойчивости равновесия при консервативных возмущениях рассмотрена также в более общей ситуации произвольного числа осцилляторов со степенными потенциалами с рациональными показателями степени, что приводит к случаю обобщенно однородного потенциала невозмущенной системы. На примере показана применимость предложенного подхода и в случае, когда порядок малости возмущающих сил совпадает с порядком малости невозмущенного гамильтониана.

Ключевые слова: нелинейные осцилляторы, гамильтонова система, устойчивость

Для цитирования: Косов А. А. О сохранении устойчивости равновесия нелинейных осцилляторов при консервативных возмущениях // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 3. С. 285–294. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202103.285–294

1. Постановка задачи

Рассматривается механическая система, состоящая из двух не связанных устойчивых нелинейных осцилляторов

$$m_i\ddot{x}_i + a_i x_i^{2n_i-1} = 0, \quad m_i > 0, \quad a_i > 0, \quad n_i > 1, \quad i = 1, 2. \tag{1.1}$$

Система (1.1) имеет устойчивое по Ляпунову положение равновесия $x_i = 0$, $i = 1, 2$, поскольку потенциальная энергия $\Pi_0 = \dfrac{a_1}{2n_1}\, x_1^{2n_1} + \dfrac{a_2}{2n_2}\, x_2^{2n_2}$ имеет в этой точке изолированный минимум. В работе [1] была поставлена задача о сохранении устойчивости положения равновесия при консервативных возмущениях.

Введем обозначения

$$y_1 = \frac{\dot{x}_1}{\lambda_1}, \quad y_2 = -\frac{\dot{x}_2}{\lambda_2}, \quad \lambda_i = \sqrt{\frac{a_i}{m_i}}, \quad H_0 = \frac{\lambda_1}{2n_1}\left(x_1^{2n_1} + n_1 y_1^2\right) - \frac{\lambda_2}{2n_2}\left(x_2^{2n_2} + n_2 y_2^2\right).$$

Тогда систему (1.1) можно переписать в гамильтоновой форме

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H_0}{\partial y_i}, \quad \dot{y}_i = -\frac{\partial H_0}{\partial x_i}. \tag{1.2}$$

Положение равновесия в начале координат системы (1.2) устойчиво, поскольку этим свойством обладает исходная система (1.1). Ю. Н. Бибиков рассматривает в работе [1] возмущенную гамильтонову систему

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad H = H_0(x,y) + H_1(x,y) \tag{1.3}$$

и задачу нахождения условий на возмущения, порождаемые функцией $H_1(x,y)$, при выполнении которых равновесие в начале координат системы (1.3) будет устойчиво по Ляпунову.

Обозначим наименьшее общее кратное чисел n_1 и n_2 через $N = \text{НОК}(n_1, n_2) = n_1 k_1 = n_2 k_2$, где k_1 и k_2 взаимно простые целые числа. Введем предположения [1] о свойствах функции $H_1(x,y)$.
(Условия ($\mathbf{B}$)):
$H_1 = H_1(x_1, x_2, y_1, y_2)$ аналитическая функция всех своих аргументов, разложение которой в ряд не содержит членов порядка ниже чем $N_B = 2N + |k_1 - k_2| + 1$, если x_i считать порядка k_i, а y_i – порядка N. Отметим, что в соответствии с работой [2] функция $H_0 = H_0(x_1, x_2, y_1, y_2)$ является обобщенно однородной класса (k_1, k_2, N, N) порядка $2N$, поскольку удовлетворяет тождеству

$$H_0\left(c^{k_1}x_1, c^{k_2}x_2, c^N y_1, c^N y_2\right) = c^{2N} H_0\left(x_1, x_2, y_1, y_2\right), \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

Условия ($\mathbf{B}$) означают, что каждый моном в разложении функции $H_1 = H_1(x_1, x_2, y_1, y_2)$ в степенной ряд является обобщенно однородной функцией класса (k_1, k_2, N, N) порядка не ниже чем $N_B = 2N + |k_1 - k_2| + 1$, что выше порядка малости $2N$ исходного гамильтониана $H_0 = H_0(x_1, x_2, y_1, y_2)$. В случае различных степеней $n_1 \neq n_2$ в соответствии с условиями ($\mathbf{B}$) в окрестности положения равновесия возмущение гамильтониана $H_1 = H_1(x_1, x_2, y_1, y_2)$ должно иметь порядок малости существенно выше (на 2 и более единицы) по сравнению с $H_0 = H_0(x_1, x_2, y_1, y_2)$.

$$H_1 = \mathrm{o}\left(\left(|x_1|^{1/k_1} + |x_2|^{1/k_2} + |y_1|^{1/N} + |y_2|^{1/N}\right)^{N_B - 1}\right),$$

$$H_0 = \mathrm{O}\left(\left(|x_1|^{1/k_1} + |x_2|^{1/k_2} + |y_1|^{1/N} + |y_2|^{1/N}\right)^{2N}\right).$$

В работе [1] Ю. Н. Бибиковым были доказаны следующие утверждения.

Теорема 1.1 *Если $n_1 \neq n_2$, возмущение $H_1 = H_1(x_1, x_2, y_1, y_2)$ удовлетворяет условиям ($\mathbf{B}$), то равновесие $x = y = 0$ системы (1.3) устойчиво по Ляпунову.*

Теорема 1.2 *Если $n_1 = n_2$, возмущение $H_1 = H_1(x_1, x_2, y_1, y_2)$ удовлетворяет условиям ($\mathbf{B}$), то равновесие $x = y = 0$ системы (1.3) условно устойчиво по отношению к начальным возмущениям, удовлетворяющим условию $H(x_1, x_2, y_1, y_2) \neq 0$.*

Как отмечено Бибиковым, при $n_1 = n_2$ безусловная устойчивость при произвольных удовлетворяющих условию ($\mathbf{B}$) возмущениях *не гарантирована.*

Рассмотрим применимость данных теорем в случае потенциальных возмущений

$$m_i \ddot{x}_i + a_i x_i^{2n_i - 1} = F_i(x_1, x_2) = -\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2. \tag{1.4}$$

В гамильтоновой форме система (1.4) будет представлена следующим образом:

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial H_0}{\partial y_1}, \quad \dot{x}_2 = \frac{\partial H_0}{\partial y_2},$$

$$\dot{y}_1 = -\frac{\partial H_0}{\partial x_1} + \frac{1}{m_1\lambda_1} F_1(x_1, x_2), \quad \dot{y}_2 = -\frac{\partial H_0}{\partial x_2} - \frac{1}{m_2\lambda_2} F_2(x_1, x_2).$$

Следовательно, возмущение гамильтониана должно удовлетворять равенствам

$$-\frac{\partial H_1}{\partial x_1} = \frac{1}{m_1\lambda_1} F_1 = -\frac{1}{m_1\lambda_1}\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1}, \quad -\frac{\partial H_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{m_2\lambda_2} F_2 = \frac{1}{m_2\lambda_2}\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_2}.$$

Дифференцируя первое равенство по x_2, второе по x_1 и вычитая из первого второе, находим

$$\left(\frac{1}{m_1\lambda_1} + \frac{1}{m_2\lambda_2}\right)\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial x_1 \partial x_2} \equiv 0.$$

Отсюда находим $\Pi_1(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$ — есть сумма произвольных дважды дифференцируемых функций. Однако в этом случае система (1.4) описывает *несвязанные* осцилляторы!

$$m_i\ddot{x}_i + a_i x_i^{2n_i - 1} = F_i(x_1, x_2) = -\frac{\partial f_i(x_i)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2.$$

Таким образом, теоремы 1.1 и 1.2 неприменимы для анализа устойчивости положения равновесия взаимосвязанных нелинейных осцилляторов при потенциальных силах взаимодействия $F_i(x_1, x_2) = -\dfrac{\partial \Pi_1(x_1, x_2)}{\partial x_i}$.

Следовательно, поставленную Ю. Н. Бибиковым задачу получения условий сохранения устойчивости нелинейных осцилляторов при консервативных (в т. ч. потенциальных) силах взаимодействия необходимо рассматривать заново. Аналогичная задача представляет интерес в отношении сохранения неустойчивости, которая проявляется в случае, когда хотя бы один из коэффициентов отрицателен $a_i < 0$.

Необходимо отметить, что устойчивость положения равновесия гамильтоновой системы с двумя степенями свободы типа (1.3) в случае, когда одно из чисел n_1, n_2 равно 1, исследовалась в работах [3; 4; 5]. При этом, как указывалось в [6; 7], в первоначальные формулировки результатов и доказательства потребовалось вносить коррективы. Случай, когда оба числа n_1, n_2 больше 1, впервые изучался в [1].

2. Условия сохранения устойчивости (неустойчивости)

Введем обозначения

$$z_1 = m_1\dot{x}_1, \quad z_2 = m_2\dot{x}_2, \quad h_0 = \frac{a_1}{2n_1} x_1^{2n_1} + \frac{a_2}{2n_2} x_2^{2n_2} + \frac{1}{2m_1} z_1^2 + \frac{1}{2m_2} z_2^2.$$

Тогда систему (1.1) можно переписать в гамильтоновой форме

$$\dot{x}_i = \frac{\partial h_0}{\partial z_i}, \quad \dot{z}_i = -\frac{\partial h_0}{\partial x_i}. \tag{2.1}$$

Положение равновесия в начале координат системы (2.1) устойчиво, поскольку функция $h_0(x, z)$ положительно определенная (в отличие от $H_0(x, y)$, которая знакопеременна) и поскольку этим же свойством обладает исходная система (1.1).

Отметим, что функция $h_0 = h_0(x_1, x_2, z_1, z_2)$ является обобщенно однородной класса (k_1, k_2, N, N) порядка $2N$, поскольку удовлетворяет тождеству

$$h_0\left(c^{k_1}x_1, c^{k_2}x_2, c^N z_1, c^N z_2\right) = c^{2N}h_0\left(x_1, x_2, z_1, z_2\right), \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим возмущенную систему (2.1)

$$\dot{x}_i = \frac{\partial h}{\partial z_i}, \quad \dot{z}_i = -\frac{\partial h}{\partial x_i}, \quad h(x,z) = h_0(x,z) + h_1(x,z). \tag{2.2}$$

В частности, в случае, когда силы взаимодействия осцилляторов в системе (1.4) потенциальны $F_i(x_1, x_2) = -\dfrac{\partial \Pi_1}{\partial x_i}$, возмущающий гамильтониан имеет вид $h_1(x,z) = \Pi_1(x)$.

Введем предположения о свойствах функции $h_1(x,z)$ (условия (**A**)): Функция $h_1 = h_1(x_1, x_2, z_1, z_2)$ является дважды дифференцируемой и удовлетворяет в малой окрестности положения равновесия оценке

$$h_1 = \mathrm{o}\left(\left(|x_1|^{1/k_1} + |x_2|^{1/k_2} + |y_1|^{1/N} + |y_2|^{1/N}\right)^{2N}\right).$$

Условия (**A**) будут очевидно выполнены, если $h_1 = h_1(x_1, x_2, z_1, z_2)$ есть аналитическая функция всех своих аргументов, разложение которой в ряд не содержит членов порядка ниже, чем $N_A = 2N + 1$, если x_i считать порядка k_i, а z_i считать порядка N.

Таким образом, для функций одних и тех же аргументов условия (**B**) являются более жесткими, чем условия (**A**). В случае различных степеней $n_1 \neq n_2$ порядок малости возмущения в условиях (**B**) на $|k_1 - k_2|$, т. е. минимум на единицу выше, чем в условиях (**A**).

Условия сохранения устойчивости взаимодействующих осцилляторов при консервативных возмущениях даются следующим утверждением.

Теорема 2.1 *Если $a_i > 0$, $i = 1, 2$ и возмущение $h_1 = h_1(x_1, x_2, z_1, z_2)$ удовлетворяет условиям* (**A**), *то положение равновесия $x = z = 0$ системы* (2.2) *устойчиво по Ляпунову.*

Условия сохранения неустойчивости взаимодействующих осцилляторов при консервативных возмущениях даются следующим утверждением.

Теорема 2.2 *Если хотя бы один из коэффициентов отрицателен $a_i < 0$, возмущение $h_1 = h_1(x_1, x_2, z_1, z_2)$ является аналитической функцией и удовлетворяет условиям* (**A**), *то положение равновесия $x = z = 0$ системы* (2.2) *неустойчиво по Ляпунову.*

Доказательства теорем 2.1 и 2.2 не приводятся, т. к. в следующем разделе доказаны более общие утверждения для произвольного числа нелинейных осцилляторов.

Отметим, что теорема 2.1 применима к системе (1.4) с потенциальными возмущениями, к которой, как было показано выше, неприменимы теоремы 1.1 и 1.2 Ю. Н. Бибикова [1]. Поскольку условия (**B**) являются более жесткими, чем условия (**A**), то создается впечатление, что утверждения теорем 1.1 и 1.2 представляют собой простое следствие теоремы 2.1. Однако это не так, теоремы 1.1 и 1.2 Ю. Н. Бибикова и теорема 2.1 являются независимыми результатами.

Дело в том, что переменные (x, y) и (x, z) связаны линейным соотношением $y_1 = \dfrac{z_1}{m_1\lambda_1}$, $y_2 = -\dfrac{z_2}{m_2\lambda_2}$, которое переводит гамильтонову невозмущенную систему (1.2) с гамильтонианом $H_0(x, y)$ в гамильтонову невозмущенную систему (2.1) с гамильтонианом $h_0(x, z)$, и эти системы имеют устойчивые равновесия в начале координат. Однако эта замена переменных не является канонической, поэтому не переводит возмущенную гамильтонову систему с гамильтонианом $H = H_0(x_1, x_2, y_1, y_2) + H_1(x_1, x_2, y_1, y_2)$ в возмущенную гамильтонову систему с гамильтонианом $h = h_0(x_1, x_2, z_1, z_2) + h_1(x_1, x_2, z_1, z_2)$, а переводит в некоторую негамильтонову систему. Поэтому из теоремы 2.1 не следуют теоремы 1.1 и 1.2, а из теорем 1.1 и 1.2 не следует теорема 2.1.

3. Обобщение на случай произвольного числа осцилляторов

Рассмотрим теперь механическую систему, состоящую из $n \geq 2$ не связанных устойчивых нелинейных осцилляторов

$$m_i\ddot{x}_i + a_i x_i^{b_i} = 0, \quad m_i > 0, \quad a_i > 0, \quad b_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.1}$$

Здесь $b_i = \dfrac{p_i}{q_i}$ — рациональные числа с нечетными числителями p_i и знаменателями q_i. Отметим, что в частном случае, когда $n = 2$, $q_i = 1$, $p_i = 2n_i - 1$, $i = 1, 2$, (3.1) переходит в систему (1.1). Система (3.1) имеет устойчивое по Ляпунову положение равновесия $x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, поскольку потенциальная энергия

$$\Pi_0 = \frac{a_1}{b_1+1}\, x_1^{b_1+1} + \frac{a_2}{b_2+1}\, x_2^{b_2+1} + \ldots + \frac{a_n}{b_n+1}\, x_n^{b_n+1}$$

имеет в этой точке изолированный минимум. Рассмотрим задачу о сохранении устойчивости положения равновесия при консервативных возмущениях.

Обозначим наименьшее общее кратное чисел $\dfrac{p_i+q_i}{2}$ через $N = \text{НОК}\left(\dfrac{p_i+q_i}{2}, i = 1, 2, \ldots, n\right)$. Тогда $2N = (p_i + q_i)k_i$, где k_i – натуральные числа, наибольший общий делитель которых равен 1.

Введем обозначения $z_i = m_i\dot{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$h_0 = \frac{a_1}{b_1+1}\, x_1^{b_1+1} + \frac{a_2}{b_2+1}\, x_2^{b_2+1} + \ldots + \frac{a_n}{b_n+1}\, x_n^{b_n+1} + \frac{1}{2m_1}\, z_1^2 + \ldots + \frac{1}{2m_n}\, z_n^2.$$

Тогда систему (3.1) можно переписать в гамильтоновой форме

$$\dot{x}_i = \frac{\partial h_0}{\partial z_i}, \quad \dot{z}_i = -\frac{\partial h_0}{\partial x_i}. \tag{3.2}$$

Положение равновесия в начале координат системы (3.2) устойчиво, поскольку функция $h_0(x, z)$ – положительно определенная.

Отметим, что функция $h_0 = h_0\left(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_n\right)$ является обобщенно однородной класса $(k_1q_1, \ldots, k_nq_n, N, \ldots, N)$ порядка $2N$, поскольку удовлетворяет тождеству

$$h_0\left(c^{k_1q_1}x_1, \ldots, c^{k_nq_n}x_n, c^N z_1, \ldots, c^N z_n\right) = c^{2N}h_0(x, z), \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим возмущенную систему (3.2)

$$\dot{x}_i = \frac{\partial h}{\partial z_i}, \quad \dot{z}_i = -\frac{\partial h}{\partial x_i}, \quad h(x, z) = h_0(x, z) + h_1(x, z). \tag{3.3}$$

В частности, в случае, когда силы взаимодействия осцилляторов в системе (3.3) потенциальны, возмущающий гамильтониан имеет вид $h_1(x,z) = \Pi_1(x)$.

Введем предположения о свойствах функции $h_1(x,z)$ (условия (**A**)): функция $h_1 = h_1(x,z)$ является дважды дифференцируемой и удовлетворяет в малой окрестности положения равновесия оценке

$$h_1 = o\left(\left(|x_1|^{1/k_1 q_1} + \ldots + |x_n|^{1/k_n q_n} + |y_1|^{1/N} + \ldots + |y_n|^{1/N}\right)^{2N}\right). \tag{3.4}$$

Условия (A) будут очевидно выполнены, если $h_1 = h_1(x,z)$ есть аналитическая функция всех своих аргументов, разложение которой в ряд не содержит членов порядка ниже чем $N_A = 2N+1$, если x_i считать порядка $k_i q_i$, а z_i – порядка N. Условия сохранения устойчивости взаимодействующих осцилляторов при консервативных возмущениях описываются следующим утверждением.

Т е о р е м а 3.1 *Если $a_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и возмущение $h_1 = h_1(x,z)$ удовлетворяет условиям* (**A**)*, то положение равновесия $x = z = 0$ системы* (3.3) *устойчиво по Ляпунову.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Гамильтонова система (3.3) имеет первый интеграл $h = h_0(x,z) + h_1(x,z) = const$. Для производной в силу системы (3.3) имеет место равенство $\dfrac{dh}{dt}\Big|_{(3.3)} = 0$. Функция $h_0(x,z)$ является положительно определенной, поэтому по свойствам обобщенно однородных функций [2] справедлива оценка

$$h_0(x,z) \geq M\left(|x_1|^{1/k_1 q_1} + \ldots + |x_n|^{1/k_n q_n} + |y_1|^{1/N} + \ldots + |y_n|^{1/N}\right)^{2N},$$

где $M > 0$ есть некоторая постоянная. По условию (A) для функции $h_1(x,z)$ справедлива оценка (3.4), поэтому в некоторой окрестности нулевого решения справедлива оценка для суммы

$$h = h_0 + h_1 \geq \frac{M}{2}\left(|x_1|^{1/k_1} + |x_2|^{1/k_2} + |y_1|^{1/N} + |y_2|^{1/N}\right)^{2N}.$$

Справедливость утверждения теоремы 3.1 теперь вытекает из теоремы Ляпунова об устойчивости с учетом положительной определенности функции $h = h_0(x,z) + h_1(x,z)$. Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Условия сохранения неустойчивости взаимодействующих осцилляторов при консервативных возмущениях даются следующим утверждением.

Т е о р е м а 3.2 *Если хотя бы один из коэффициентов отрицателен $a_i < 0$, все знаменатели $q_i = 1$, $i = 1, \ldots, n$, и возмущение $h_1 = h_1(x,z)$ является аналитической функцией и удовлетворяет условиям (A), то положение равновесия $x = z = 0$ системы* (3.3) *неустойчиво по Ляпунову.*

Справедливость этого утверждения вытекает из теоремы В. В. Козлова о неустойчивости [8] с учетом полуквазиоднородности функции $h = h_0(x,z) + h_1(x,z)$.

Покажем на примере, что условия сохранения устойчивости могут быть получены и в случае, когда порядок малости потенциальных возмущений совпадает с порядком малости невозмущенного потенциала.

П р и м е р 3.1 Рассмотрим систему, состоящую из двух осцилляторов

$$m_i \ddot{x}_i + a_i x_i^{(4-q)/q} = -\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_i}, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad i = 1, 2. \tag{3.5}$$

Здесь $\Pi_1 = k\left(x_1^{1/q} - x_2^{1/q}\right)^4$, $k < 0$, $q = 1$ или $q = 3$ При $k = 0$ осцилляторы не связаны между собой и положение равновесия каждого из них устойчиво. Найдем максимальное значение $k_1 < 0$ такое, что при всех $k \in (k_1, 0)$ устойчивость положения равновесия $x = 0$ системы (3.5) сохраняется.

Положим $u_i = x_i^{1/q}$, тогда потенциальная энергия будет однородной формой четвертой степени $\Pi(u_1, u_2) = q\dfrac{a_1}{4}\, u_1^4 + q\dfrac{a_2}{4}\, u_2^4 + k(u_1 - u_2)^4$. Для получения области, в которой сохраняется устойчивость надо установить, при каких $k < 0$ эта форма 4-й степени остается положительно определенной.

Эту форму запишем в виде $\Pi(u_1, u_2) = u_2^2 F_4(v)$, $v = \dfrac{u_1}{u_2}$, где $F_4(v)$ есть полином 4-й степени

$$F_4(v) = q\frac{a_1}{4}\, v^4 + q\frac{a_2}{4} + k(v - 1)^4.$$

Форма $\Pi(u_1, u_2)$ положительно определена тогда и только тогда, когда у полинома $F_4(v)$ нет вещественных корней. Дискриминант полинома $F_4(v)$ есть полином 3-й степени относительно k

$$D_4 = 4q^3(a_1 + a_2)^3 k^3 + 3q^4 a_1 a_2 (a_1^2 - 7a_1 a_2 + a_2^2) k^2 + \frac{3}{4}\, q^5 a_1^2 a_2^2 (a_1 + a_2) k + \frac{1}{16}\, q^6 a_1^3 a_2^3.$$

Обозначим наибольший отрицательный корень полинома D_4 через k_0. Свободный член этого полинома положителен, поэтому на интервале $k \in (k_0, 0)$ будет $D_4 > 0$. Значит, для этого интервала все 4 корня полинома $F_4(v)$ различны и либо все вещественные, либо все комплексные. Если у полинома $F_4(v)$ четыре различных вещественных корня, то у его производной

$$F_3(v) = \frac{d}{dv}\, F_4(v) = q a_1 v^3 + 4k(v - 1)^3$$

должно быть 3 различных вещественных корня. Но дискриминант полинома $F_3(v)$ есть $D_3 = -432 q^2 a_1^2 k^2 < 0$. Следовательно, у полинома $F_3(v)$ только один вещественный корень. Это значит, что у полинома $F_4(v)$ все 4 корня комплексные и форма $\Pi(u_1, u_2)$ является положительно определенной при всех $k \in (k_0, 0)$. Таким образом установлено, что устойчивость сохраняется в интервале $k \in (k_1, 0)$, где $k_1 = k_0$ есть наибольший отрицательный корень полинома D_4.

Отметим, что в случае $q = 1$ потенциальная энергия для системы (3.5) является однородной формой четвертой степени от исходных координат, которая при любом $k < k_0$ может принимать отрицательные значения. Поэтому применима теорема В. В.Козлова [8], из которой следует неустойчивость равновесия. В случае же $q = 3$ применить эту теорему формально невозможно, поскольку потенциальная энергия не является полиномом.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-08-00746).

Список литературы

1. Бибиков Ю. Н. Об устойчивости в гамильтоновых системах с двумя степенями свободы // Математические заметки. 2014. Т. 95, вып. 2. С. 202–208. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm9115
2. Зубов В. И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л.: Машиностроение, 1974. 336 с.
3. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 478 с.
4. Moser J. K. Lectures on Hamiltonian Systems. Amer. Math. Soc. Providence, RI. 1968. 87 p.
5. Сокольский А. Г. Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при резонансе первого порядка // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41, вып. 1. С. 24–33.
6. Брюно А. Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнений // Тр. ММО. 1972. Т. 26, стр. 199–239.
7. Брюно А. Д. Об устойчивости в системе Гамильтона // Математические заметки. 1986. Т. 40, вып. 3. С. 385–392. https://doi.org/10.1007/BF01142477
8. Козлов В. В. Неустойчивость равновесия в потенциальном поле // Успехи математических наук. 1981. Т. 36, вып. 1. С. 209–210. DOI: https://doi.org/10.1070/RM1981v036n01ABEH002551

Поступила 18.05.2021; доработана после рецензирования 30.07.2021; принята к публикации 25.08.2021

Информация об авторе:

Косов Александр Аркадьевич, ведущий научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН (664033, Россия, г. Иркутск, ул. Лермонтова, д. 134), кандидат физико-математических наук, ORCID ID: http://orcid.org/0000-0003-1352-1828, kosov_idstu@mail.ru.

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Original article

MSC2020 34D20, 34H15, 70E50

On maintaining the stability of the equilibrium of nonlinear oscillators under conservative perturbations

A. A. Kosov

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (Irkutsk, Russian Federation)

Abstract. The problem of Yu.N. Bibikov on maintaining the stability of the equilibrium position of two interconnected nonlinear oscillators under the action of small, in a certain sense, conservative perturbing forces is considered. With different methods of reducing the system to the Hamiltonian form, some features are revealed for the case when the perturbing forces of the interaction of two oscillators are potential. The conditions for preserving the stability and instability of the equilibrium of two oscillators for the case of sufficiently small disturbing forces are obtained. The problem of maintaining the stability of the equilibrium under conservative perturbations is also considered in the more general situation of an arbitrary number of oscillators with power potentials with rational exponents, which leads to the case of a generalized homogeneous potential of an unperturbed system. The example given shows the applicability of the proposed approach in the case when the order of smallness of the perturbing forces coincides with the order of smallness of the unperturbed Hamiltonian.

Key Words: nonlinear oscillators, Hamiltonian system, stability

For citation: *A. A. Kosov.* On maintaining the stability of the equilibrium of nonlinear oscillators under conservative perturbations. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 23:3(2021), 285–294. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202103.285–294

References

1. Bibikov Yu. N., "On Stability in Hamiltonian Systems with Two Degrees of Freedom", *Mathematical Notes*, **95**:2 (2014), 176–181. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm9115
2. Zubov V. I., "Mathematical Methods for the Study of Automatic Control Systems", 1962, 327 p.
3. Arnold V. I., "Mathematical Methods of Classical Mechanics", 1978, 464 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4757-1693-1
4. Moser J. K., *Lectures on Hamiltonian Systems*, Amer. Math. Soc., Providence, RI., 1968, 87 c.
5. Sokol'skii A. G., "[On Stability of an Autonomous Hamilton System with Two Degrees of Freedom under First-Order Resonance]", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **41**:1 (1977), 24–33 (In Russ.).
6. Bryuno A. D., "Analytic form of differential equations", *Trans. Moscow Math. Soc*, **26** (1972), 199-239.
7. Bryuno A. D., "Stability in a Hamiltonian System", *Mathematical Notes*, **40**:3 (1986), 726–730. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01142477

8. Kozlov V. V., "Instability of Equilibrium in a Potential Field", *Russian Math. Surveys*, **36**:3 (1981), 238–239. DOI: https://doi.org/10.1070/RM1981v036n01ABEH002551

Submitted 18.05.2021; Revised 30.07.2021; Accepted 25.08.2021

Information about the author:

Alexander Kosov, Leading researcher, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (134, Lermontov Str., Irkutsk 664033, Russian Federation), Ph. D. (Mathematics and Physics), ORCID ID: http://orcid.org/0000-0003-1352-1828, kosov_idstu@mail.ru,

The author have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The author declare no conflict of interest.