

DOI 10.15507/2079-6900.23.202102.171–184

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.938.5

# Реализация гомотопических классов гомеоморфизмов тора простейшими структурно устойчивыми диффеоморфизмами

А. И. Морозов

ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

**Аннотация.** Согласно классификации Терстона, множество гомотопических классов, сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов ориентируемых поверхностей разбивается на четыре непересекающихся подмножества. Гомотопический класс из каждого подмножества характеризуется существованием в нем гомеоморфизма, называемого канонической формой Терстона, а именно: периодического гомеоморфизма, приводимого непериодического гомеоморфизма алгебраически конечного порядка, приводимого гомеоморфизма не являющегося гомеоморфизмом алгебраически конечного порядка, псевдоаносовского гомеоморфизма. Канонические формы Терстона не являются структурно устойчивыми диффеоморфизмами. Поэтому естественным образом встает задача построения простейших (в определенном смысле) структурно устойчивых диффеоморфизмов в каждом гомотопическом классе. В настоящей работе поставленная задача решена для гомеоморфизмов тора. В каждом гомотопическом классе аналитически построены структурно устойчивые представители, а именно градиентно-подобный диффеоморфизм, диффеоморфизм Морса-Смейла с ориентируемой гетерокликой и диффеоморфизм Аносова, являющийся частным случаем псевдоаносовского диффеоморфизма.

**Ключевые слова:** теория Нильсена-Терстона, гомотопический класс отображения, реализация диффеоморфизмов, алгебраические отображения

**Для цитирования:** Морозов А. И. Реализация гомотопических классов гомеоморфизмов тора простейшими структурно устойчивыми диффеоморфизмами // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 2. С. 171–184. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202102.171–184>

## 1. Гомотопическая теория гомеоморфизмов поверхностей

### 1.1. Группа классов отображений

Пусть  $X$  — топологическое пространство. Два непрерывных отображения  $\varphi_0, \varphi_1 : X \rightarrow X$  называются *гомотопными* (пишут  $\varphi_0 \sim \varphi_1$ ), если существует непрерывное отображение  $F : X \times [0, 1] \rightarrow X$  такое, что  $F(x, 0) = \varphi_0(x)$  и  $F(x, 1) = \varphi_1(x)$ . Отображение  $F$  называется *гомотопией* между  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$ . Для каждого фиксированного  $t \in [0, 1]$  мы полагаем  $F(x, t) = F_t(x)$ . Обозначим через  $[\varphi]$  *гомотопический класс* отображения  $\varphi$ , т. е.  $\varphi' \in [\varphi] \iff \varphi' \sim \varphi$ .

Множество гомотопических классов гомеоморфизмов пространства  $X$  образует группу  $\Gamma(X)$  с групповой операцией  $[\varphi_1] \circ [\varphi_2] = [\varphi_1 \circ \varphi_2]$ , которая называется *группой классов преобразований*. Таким образом,

$$\Gamma(X) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Homeo}(X) / \simeq,$$

где  $\text{Homeo}(X)$  — множество гомеоморфизмов из  $X$  в  $X$ , а отношение  $\simeq$  является отношением гомотопии отображений.



Гомотопия  $F_t : X \rightarrow X, t \in [0, 1]$  называется *изотопией*, если при любом  $t$  отображение  $F_t$  является гомеоморфизмом  $X$ .

## 1.2. Классификация Нильсена-Терстона

Согласно классификации Нильсена-Терстона, существует четыре типа гомотопических классов гомеоморфизмов поверхностей, которые определяются содержанием в классе гомеоморфизма одного из следующих типов:

- $T_1$ ) периодический гомеоморфизм;
- $T_2$ ) приводимый непериодический гомеоморфизм алгебраически конечного типа;
- $T_3$ ) приводимый гомеоморфизм, не являющийся гомеоморфизмом алгебраически конечного типа;
- $T_4$ ) псевдоаносовский гомеоморфизм.

Пусть  $S_{g,k}, g \geq 0, k \geq 0$  – связная компактная ориентируемая поверхность рода  $g$  с краем, состоящим из  $k$  компонент связности. Положим  $S_{g,0} = S_g$ . Везде далее отображения поверхностей предполагаются сохраняющими ориентацию.

Гомеоморфизм  $h : S_{g,k} \rightarrow S_{g,k}$  называется *периодическим гомеоморфизмом*, если существует  $m \in \mathbb{N}$ , такое, что  $h^m = id$ , где  $id$  – тождественное преобразование. Наименьшее из таких чисел  $m$  называется *периодом* периодического гомеоморфизма.

Гомеоморфизм  $h : S_g \rightarrow S_g, g \geq 1$  называется *приводимым* системой  $C$  непересекающихся между собой простых замкнутых кривых  $C_i, i = 1, \dots, l$ , негомотопных нулю и попарно не гомотопных друг другу, если система кривых  $C$  инвариантна относительно  $h$ . Если  $h : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  является приводимым, то система  $C$  состоит из одного элемента.

Приводимый непериодический гомеоморфизм  $h : S_g \rightarrow S_g, g \geq 1$  называется *гомеоморфизмом алгебраически конечного порядка*, если существует  $h$ -инвариантная окрестность  $\mathcal{C}$  кривых множества  $C$ , состоящая из объединения двумерных колец и такая, что для каждой компоненты связности  $S_{g_j, k_j}, j = 1, \dots, n$  множества  $S_g \setminus int \mathcal{C}$  существует число  $m_j \in \mathbb{N}$  такое, что  $h^{m_j}|_{S_{g_j, k_j}} : S_{g_j, k_j} \rightarrow S_{g_j, k_j}$  – периодический гомеоморфизм.

Гомеоморфизм  $h : S_g \rightarrow S_g$  называется *псевдоаносовским*, если на поверхности  $S_g$  существует пара  $h$ -инвариантных трансверсальных слоений  $\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u$  с множеством особенностей  $\mathcal{S}$  и трансверсальными мерами  $\psi^s, \psi^u$  такая, что:

- 1) каждая особенность из  $\mathcal{S}$  имеет отрицательный индекс;
- 2) существует число  $\lambda > 1$  такое, что  $\psi^s(h(\alpha)) = \lambda\psi^s(\alpha)(\psi^u(h(\alpha)) = \lambda^{-1}\psi^u(\alpha))$  для любой дуги  $\alpha$ , трансверсальной  $\mathcal{F}^s(\mathcal{F}^u)$ .

Хорошо известно описание представителя каждого класса каноническими формами Терстона. Однако они не являются структурно устойчивыми. Поэтому представляет интерес указание наиболее простых структурно устойчивых представителей в этих классах. Так, в каждом гомотопическом классе первого типа А. Н. Безденежных и В. З. Гринес построили градиентно-подобный диффеоморфизм и получили полную топологическую классификацию градиентно-подобных диффеоморфизмов, принадлежащих типу  $T_1$  (см. [1] и [2]). В работе [3] анонсировано существование в каждом гомотопическом классе из  $T_4$  структурно устойчивого диффеоморфизма, неблуждающее множество которого состоит из конечного числа источников орбит и единственного одномерного аттрактора. Более того, в недавней работе [4] найдены необходимые и достаточные условия топологической сопряженности двух таких диффеоморфизмов.

### 1.3. Группы классов отображений тора

Любой гомеоморфизм  $\varphi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  индуцирует изоморфизм фундаментальной группы  $\varphi_* : \pi_1(\mathbb{T}^2) \rightarrow \pi_1(\mathbb{T}^2)$ , которая изоморфна группе  $\mathbb{Z}^2$ . Тогда индуцированный изоморфизм  $\varphi_*$  однозначно определяется своим действием на образующих, которое задается матрицей

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

из множества  $GL(2, \mathbb{Z})$  унимодулярных матриц – целочисленных матриц с определителем  $\pm 1$ . Напомним, что алгебраическим автоморфизмом  $\hat{A} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ , определенным матрицей  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ , называется диффеоморфизм, заданный формулой

$$\hat{A}(x, y) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y).$$

**Предложение 1.1** ([5][Theorem 8.1], впервые доказано в [6–7]) Гомеоморфизмы  $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  гомотопны тогда и только тогда, когда  $A_{\varphi_1} = A_{\varphi_2}$ .

### 1.4. Классификация унимодулярных матриц

Матрица  $A \in GL(2, \mathbb{Z})$  называется гиперболической, если она не имеет собственных значений, по модулю равных единице.

Матрица  $A \in GL(2, \mathbb{Z})$  называется периодической, если существует  $n \in \mathbb{N}$  такое, что  $A^n = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Из леммы 3 работы С. Баттерсона [8] следует, что любая матрица из  $GL(2, \mathbb{Z})$  с собственными значениями, по модулю равными единице, подобна (при помощи матрицы из  $GL(2, \mathbb{Z})$ ) одной из следующих матриц:

$$B_{1,m} = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{2,m} = \begin{pmatrix} -1 & m \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad m \in \{0, 1, \dots\},$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

При этом матрицы  $B_{1,0}, B_{2,0}, B_3$ – $B_7$  являются периодическими, а матрицы  $B_{1,m}, B_{2,m}, m \neq 0$  периодическими не являются и называются матрицами вращений. Матрицы  $B_6, B_7$  реализуются меняющими ориентацию диффеоморфизмами поверхности, поэтому далее мы не будем их рассматривать.

## 2. Структурно устойчивые диффеоморфизмы поверхностей

Система  $f \in \text{Diff}^r(X), r \geq 0$ , где  $\text{Diff}^r(X)$  – множество диффеоморфизмов, заданных на пространстве  $X$ , называется  $E$ -устойчивой, если существует окрестность  $U(f)$  элемента  $f \in \text{Diff}^r(X)$  такая, что если  $f' \in U(f)$ , то  $f'$  и  $f$  принадлежат к одному и тому же классу эквивалентности  $E$ .

Понятие устойчивости диффеоморфизмов, ассоциированное с топологической сопряженностью, называется грубостью (по Андронову-Понтрягину) или структурной устойчивостью (по Пейшото).

Структурно устойчивые диффеоморфизмы с конечным неблуждающим множеством называются *диффеоморфизмами Морса-Смейла*. Среди них выделяют *градиентно-подобные диффеоморфизмы* как не имеющие гетероклинических точек. *Гетероклинической точкой* называется точка пересечения  $W_{\sigma_i}^s \cap W_{\sigma_j}^u$  инвариантных многообразий различных седловых точек  $\sigma_i, \sigma_j$ .

Для сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла  $f$ , заданных на ориентируемой поверхности  $M^2$ , введем понятие ориентируемой гетероклиники следующим образом.

Пусть  $\sigma_i, \sigma_j$  — седловые точки диффеоморфизма  $f$  такие, что  $W_{\sigma_i}^s \cap W_{\sigma_j}^u \neq \emptyset$ . Для любой гетероклинической точки  $x \in W_{\sigma_i}^s \cap W_{\sigma_j}^u$  определим упорядоченную пару векторов  $(\vec{v}_x^u, \vec{v}_x^s)$ , где:

- $\vec{v}_x^u$  — касательный вектор к неустойчивому многообразию точки  $\sigma_j$  в точке  $x$ ;
- $\vec{v}_x^s$  — касательный вектор к устойчивому многообразию точки  $\sigma_i$  в точке  $x$ .

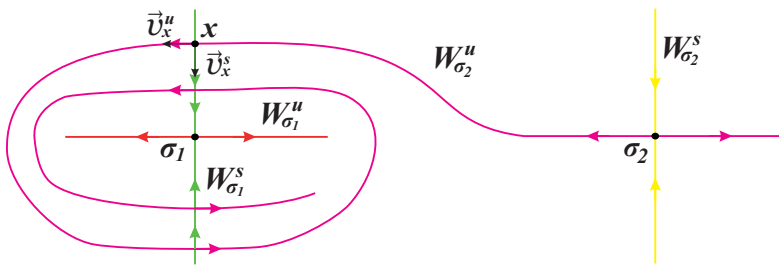


Рис. 2.1. Ориентируемое гетероклиническое пересечение  
 Fig 2.1. Orientable heteroclinic intersection

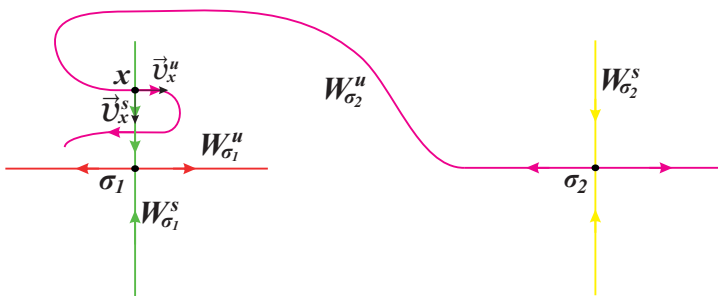


Рис. 2.2. Неориентируемое гетероклиническое пересечение  
 Fig 2.2. Non-orientable heteroclinic intersection

Гетероклиническое пересечение диффеоморфизма  $f$  называется *ориентируемым* (Рис. 2.1), если упорядоченные пары векторов  $(\vec{v}_x^u, \vec{v}_x^s)$  задают одинаковую ориентацию несущей поверхности  $M^2$ . В противном случае гетероклиническое пересечение называется *неориентируемым* (Рис. 2.2).

Примером структурно устойчивого диффеоморфизма с бесконечным множеством периодических точек является аносковский диффеоморфизм. Напомним, что диффеоморфизм  $f : M^n \rightarrow M^n$  называется *диффеоморфизмом Аносова*, если существует непрерывное разложение касательного расслоения  $T(M) = E^s \oplus E^u$  (подрасслоения  $E^s$  и  $E^u$  называют устойчивой и неустойчивой компонентами соответственно), инвариантное относительно  $f$ , и существуют константы  $c, c'$ , а также число  $\lambda \in (0, 1)$  такие, что для любого  $n > 0$

$$\| (df)^n(v) \| \leq c\lambda^n \| v \| \text{ для любого } v \in E^s,$$

$$\| (df)^n(v) \| \geq c'\lambda^{-n} \| v \| \text{ для любого } v \in E^u.$$

Простейшим аносовским диффеоморфизмом является алгебраический автоморфизм двумерного тора, заданный гиперболической матрицей.

### 3. Реализация классов гомеоморфизмов тора структурно устойчивыми диффеоморфизмами

#### 3.1. Схема реализации

**Гиперболические матрицы.** В силу результата Дж. Френкса [9], любой гомеоморфизм, индуцирующий гиперболическое действие в фундаментальной группе, имеет бесконечное множество периодических точек. Поэтому в гомотопическом классе такого гомеоморфизма не может быть диффеоморфизмов Морса-Смейла. Однако для гиперболических матриц существует естественная их реализация алгебраическим автоморфизмом тора, соответствующим данной матрице. Поскольку диффеоморфизм Аносова является частным случаем псевдоаносовского диффеоморфизма, то диффеоморфизм Аносова является представителем типа  $T_4$  на  $\mathbb{T}^2$ .

**Периодические матрицы.** В силу результата С. Баттерсона среди периодических матриц достаточно реализовать структурно устойчивым диффеоморфизмом матрицы  $B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  и  $B_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Все остальные матрицы с определителем 1 являются либо степенями этих двух, либо подобны им посредством унимодулярной матрицы. Ниже мы реализуем матрицы  $B_4$  и  $B_5$  градиентно-подобными диффеоморфизмами тора, которые являются представителями класса  $T_1$ .

**Непериодические и негиперболические матрицы.** Из результатов А. Н. Бездежных и В. З. Гринеса [1] известно, что любой градиентно-подобный диффеоморфизм имеет периодическое индуцированное действие. Поэтому матрицы  $B_{1,m} = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B_{2,m} = \begin{pmatrix} -1 & m \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $m \in \{0, 1, \dots\}$  не могут быть реализованы градиентно-подобными диффеоморфизмами при  $m \neq 0$ . Ниже реализуем матрицы  $B_{1,m}$  и  $B_{2,m}$  диффеоморфизмами Морса-Смейла с ориентируемым гетероклиническим пересечением, которые являются представителями класса  $T_2$ .

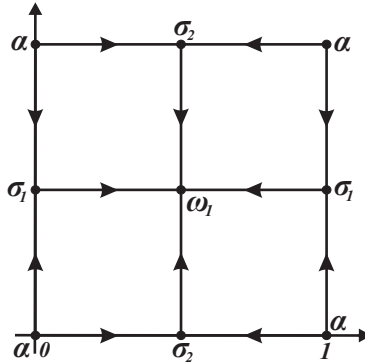
#### 3.2. Реализация матрицы $B_4$

Везде ниже для координат точек и отображений на двумерном торе используем координаты на плоскости по модулю 1, согласно накрывающему отображению

$$q(x, y) = (e^{i2\pi x}, e^{i2\pi y}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2.$$

Непосредственный поиск периодических точек алгебраического автоморфизма  $\widehat{B}_4$  показывает, что существует в точности 3 периодических орбиты  $\mathcal{O}_1 = \{\alpha(0, 0)\}$ ,  $\mathcal{O}_2 = \{\sigma_1(0, \frac{1}{2}), \sigma_2(\frac{1}{2}, 0)\}$ ,  $\mathcal{O}_3 = \{\omega(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$ . Определим диффеоморфизм  $g : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  формулой (Рис. 3.1):

$$g(x, y) = \left( \frac{1}{4\pi} \sin(2\pi x) + x, \frac{1}{4\pi} \sin(2\pi y) + y \right).$$



**Рис. 3.1.** Фазовый портрет диффеоморфизма  $g$   
**Fig 3.1.** Phase portrait of the diffeomorphism  $g$

Непосредственно проверяется, что  $g_* = E$  и  $g\widehat{B}_4 = \widehat{B}_4g$ . Тогда градиентно-подобный диффеоморфизм  $f_4 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ , реализующий матрицу  $B_4$ , имеет вид  $f_4 = g\widehat{B}_4$  и действует по формуле

$$f_4(x, y) = \left( \frac{1}{4\pi} \sin(2\pi y) + y, -\frac{1}{4\pi} \sin(2\pi x) - x \right).$$

### 3.3. Реализация матрицы $B_5$

Непосредственный поиск периодических точек алгебраического автоморфизма  $\widehat{B}_5$  показывает, что существует в точности три периодические орбиты  $\mathcal{O}_1 = \{\alpha(0, 0)\}$ ,  $\mathcal{O}_2 = \{\omega_1(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), \omega_2(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})\}$ ,  $\mathcal{O}_3 = \{\sigma_1(\frac{1}{2}, 0), \sigma_2(0, \frac{1}{2}), \sigma_3(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$  (Рис. 3.2).

Разобьем единичный квадрат на треугольники  $\Delta_i, i \in \{1, \dots, 12\}$ , инвариантные относительно диффеоморфизма  $\widehat{B}_5$  (Рис. 3.3) и индуцируем динамику  $h_i = H_i g H_i^{-1} : \Delta_i \rightarrow \Delta_i$  отображения  $g$  на треугольнике  $\Delta$  с вершинами  $A(0, 0), B(\frac{1}{2}, 0), C(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  диффеоморфизмом  $H_i : \Delta \rightarrow \Delta_i$ . Для этого положим

$$H_1(x, y) = \left( x - \frac{y}{3}, \frac{2y}{3} \right).$$

Тогда отображение  $h_1 : \Delta_1 \rightarrow \Delta_1$  имеет вид (Рис. 3.4):

$$h_1(x, y) = \left( \frac{1}{4\pi} \sin \left( 2\pi \left( x + \frac{y}{2} \right) \right) + \left( x + \frac{y}{2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{4\pi} \sin(3\pi y) + \frac{3y}{2} \right), \frac{2}{3} \left( \frac{1}{4\pi} \sin(3\pi y) + \frac{3y}{2} \right) \right).$$

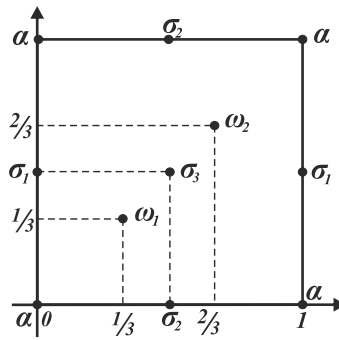


Рис. 3.2. Периодические точки диффеоморфизма  $\widehat{B}_5$   
 Fig 3.2. Periodic points of the diffeomorphism  $\widehat{B}_5$

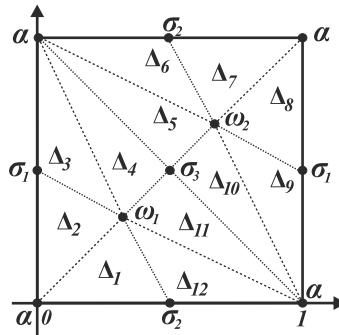


Рис. 3.3. Разбиение единичного квадрата на треугольники  $\Delta_i, i \in \{1, \dots, 12\}$   
 Fig 3.3. Partition of a unit square into triangles  $\Delta_i, i \in \{1, \dots, 12\}$

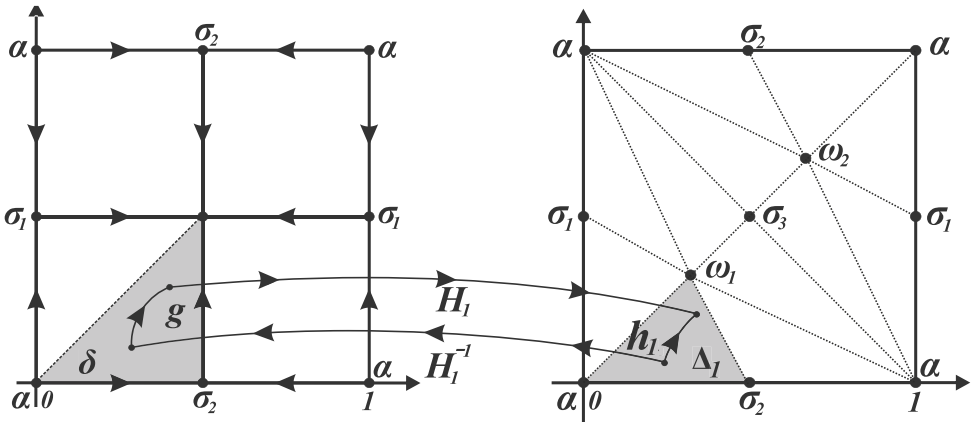


Рис. 3.4. Индуцирование динамики диффеоморфизма  $g$  на треугольник  $\Delta_1$ .  
 Fig 3.4. Induction of the dynamics of the diffeomorphism  $g$  onto the triangle  $\Delta_1$

Аналогично для треугольника  $\Delta_2$  с вершинами  $A(0, 0), B(0, \frac{1}{2}), C(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ . Определим

диффеорфизм  $H_2 : \Delta \rightarrow \Delta_2$  формулой:

$$H_2(x, y) = \left( \frac{2y}{3}, x - \frac{y}{3} \right).$$

Тогда диффеоморфизм  $h_2 : \Delta_2 \rightarrow \Delta_2$  имеет вид:

$$h_2(x, y) = \left( \frac{3}{2} \left( \frac{\sin(3\pi x)}{4\pi} + \frac{3x}{2} \right), \frac{1}{4\pi} \sin \left( 2\pi \left( \frac{x}{2} + y \right) \right) + \left( \frac{x}{2} + y \right) - \frac{1}{3} \left( \frac{\sin(3\pi x)}{4\pi} + \frac{3x}{2} \right) \right).$$

Заметим, что треугольники  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  инвариантны относительно действия диффеоморфизмов  $h_1$  и  $h_2$ , которые, в свою очередь, являются гладкими на области их действия. Составим отображение  $h_{1,2}$  из диффеоморфизмов  $h_1$  и  $h_2$ . Сужение отображения  $h_{1,2}$  на множества  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  является диффеоморфизмом, остается лишь проверить действие этого отображения на множестве пересечения треугольников  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ , а именно на множестве  $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x, x \in [0, \frac{1}{3}]\}$ . Чтобы отображение  $h_{1,2} : \Delta_1 \cup \Delta_2 \rightarrow \Delta_1 \cup \Delta_2$  было диффеоморфизмом, требуется, чтобы диффеоморфизмы  $h_1$  и  $h_2$  действовали одинаково на множестве  $I$ , а так же чтобы значения их частных производных совпадали на множестве  $I$ . Выполним проверку.

1) Проверим действие диффеоморфизмов  $h_1$  и  $h_2$  на множестве  $I$ :

$$h_1|_I(x, y) = h_2|_I(x, y) = \left( \frac{2}{3} \left( \frac{1}{4\pi} \sin(3\pi x) + \frac{3}{2}x \right), \frac{2}{3} \left( \frac{1}{4\pi} \sin(3\pi x) + \frac{3}{2}x \right) \right).$$

При подстановке  $y = x$  наблюдаем точное соответствие  $h_1|_I = h_2|_I$ .

2) Найдем частные производные для диффеоморфизма  $h_1$  и вычислим значения при условии  $y = x$ :  $h_1(x, y)'_x = (\frac{1}{2} \cos(3\pi x) + 1, 0)$ ,  $h_1(x, y)'_y = (0, \frac{1}{2} \cos(3\pi x) + 1)$ .

3) Найдем частные производные для функции  $h_2$  и вычислим значения при условии  $y = x$ :  $h_2(x, y)'_x = (\frac{1}{2} \cos(3\pi x) + 1, 0)$ ,  $h_2(x, y)'_y = (0, \frac{1}{2} \cos(3\pi x) + 1)$ .

Выполняется равенство соответствующих частных производных, следовательно  $h_{1,2}$  является диффеоморфизмом на множестве  $\Delta_1 \cup \Delta_2$ .

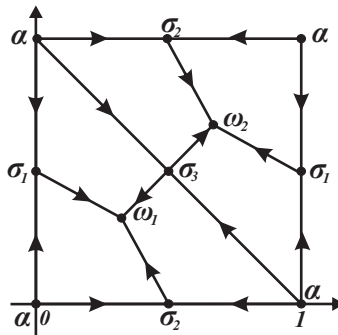


Рис. 3.5. Фазовый портрет диффеоморфизма  $h$

Fig 3.5. Phase portrait of the diffeomorphism  $h$

Продолжая построение описанным выше образом на каждом треугольнике фазового портрета получим диффеоморфизмы  $h_i, i \in \{1, \dots, 12\}$ . Приведенная выше



проверка показывает, что диффеоморфизм  $h$ , составленный из диффеоморфизмов  $h_i, i \in \{1, \dots, 12\}$  является, гладким отображением единичного квадрата на себя, а его фазовый портрет соответствует Рис. 3.5.

Непосредственно проверяется, что  $h_* = E$  и  $h\widehat{B}_5 = \widehat{B}_5h$ . Тогда градиентно-подобный диффеоморфизм  $f_5 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ , реализующий матрицу  $B_5$ , имеет вид  $f_5 = h\widehat{B}_5$  и действует по формуле

$$f_5(x, y) = h(-y, x + y).$$

### 3.4. Реализация матриц $B_{1,m}, B_{2,m}$

Пусть  $\hat{f} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  – диффеоморфизм тора совпадающий с диффеоморфизмом  $\hat{f}_1$  из п. 3.2.

Индукцированный изоморфизм  $\hat{f}_* : H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}) \rightarrow H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})$  диффеоморфизма  $\hat{f}$  задается матрицей  $B_{\hat{f}} = B_{1,m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, m = 0$ .

Обозначим через  $V_1, V_2$  компоненты связности пространства  $\mathbb{T}^2 \setminus (cl(W_{\sigma_2}^u) \cup cl(W_{\sigma_1}^s))$ , каждая из которых гомеоморфна кольцу. Пусть  $\gamma_1 \subset V_1$  – простая замкнутая не гомотопная нулю кривая на множестве  $V_1$  такая, что  $\gamma_1 \subset int(V_1)$ , а  $\mathcal{N}(\gamma_1) = \mathcal{N}_1$  – ее трубчатая окрестность, также гомотопная кольцу. Не уменьшая общности, будем считать, что окрестность  $\mathcal{N}_1$  является фундаментальной областью диффеоморфизма  $\hat{f}$  (см. Рис. 3.6). Пусть  $\bar{\mathcal{N}}_1 = \mathbb{S}^1 \times [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$  и  $\bar{\gamma}_1 = \mathbb{S}^1 \times \{1\}$  подмножества кольца  $\mathbb{S}^1 \times [0, 2]$ . Обозначим через  $\rho : \mathbb{S}^1 \times [0, 2] \rightarrow V_1$  – естественную проекцию, такую, что  $\rho(\bar{\mathcal{N}}_1) = \mathcal{N}_1$ ,  $\varepsilon > 0$  и  $\gamma_1 = \rho(\bar{\gamma}_1)$ .

Определим отображение  $D_{\bar{\gamma}_1} : \bar{\mathcal{N}}_1 \rightarrow \bar{\mathcal{N}}_1$ , являющееся вращением Дена на кольце  $\bar{\mathcal{N}}_1$  (см., например, [10]) по формуле

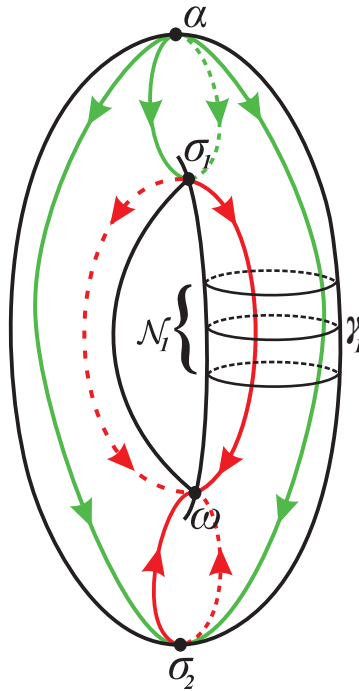
$$D_{\bar{\gamma}_1}(e^{i\theta}, t) = \left( e^{(i\theta + m \cdot \pi \cdot (\frac{t-1}{\varepsilon} + 1))}, t \right), t \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon].$$

Положим  $D_{\gamma_1} = \rho D_{\bar{\gamma}_1} \rho^{-1} : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_1$ . Продолжим отображение  $D_{\gamma_1} : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_1$  до отображения тора  $\hat{D}_{\gamma_1} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  полагая  $\hat{D}_{\gamma_1}|_{\mathbb{T}^2 \setminus \mathcal{N}_1} = id$ . Индукцированный изоморфизм  $\hat{D}_{\gamma_1*}$  отображения  $\hat{D}_{\gamma_1}$  действует на фундаментальной группе матрицей  $\hat{D}_{\gamma_1*} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Обозначим  $\hat{g} = \hat{D}_{\gamma_1*} \hat{f} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  композицию заданных отображений. Из [11] следует, что индуцированный изоморфизм  $\hat{g}_*$  определяется произведением матриц  $\hat{g}_* = \hat{D}_{\gamma_1*} \hat{f}_* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Покажем, что диффеоморфизм  $\hat{g}$  является сохраняющим ориентацию диффеоморфизмом Морса-Смейла с ориентируемыми гетероклиническими пересечениями.

Опишем поведение сепаратрис седловых точек диффеоморфизма  $\hat{g}$  на подмножестве  $V_1$ . Пусть  $l_{\sigma_1}^{u,1} = W_{\sigma_1}^u \cap V_1$  ( $l_{\sigma_2}^{s,1} = W_{\sigma_2}^s \cap V_1$ ) – неустойчивая (устойчивая) сепаратриса седловой точки  $\sigma_1$  ( $\sigma_2$ ) лежащая в множестве  $V_1$ . В соответствии с теоремой 5.5 работы [12] существует достаточно малая окрестность  $U_{\sigma_1}$  ( $U_{\sigma_2}$ ) точки  $\sigma_1$  ( $\sigma_2$ ) такая, что отображение  $\hat{g}|_{U_{\sigma_1}} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  ( $\hat{g}|_{U_{\sigma_2}} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ ) сопряжено линейному отображению  $\bar{g} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ :

$$\bar{g}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x, 2y \Big).$$

Пусть  $\bar{p}_1 : U_{\sigma_1} \rightarrow \mathbb{R}^2$  – естественная проекция, такая, что  $\bar{p}_1(l_{\sigma_1}^{u,1}) \subset Oy^+$ . Обозначим через  $F_1$  фундаментальную область отображения  $\bar{g}$ , такую, что  $\hat{g}^{n_1}(\bar{p}_1^{-1}(F_1)) =$



**Рис. 3.6.** Фазовый портрет диффеоморфизма  $\hat{f}_1$  на торе  $\mathbb{T}^2$   
**Fig 3.6.** Phase portrait of the diffeomorphism  $\hat{f}_1$  on the torus  $\mathbb{T}^2$

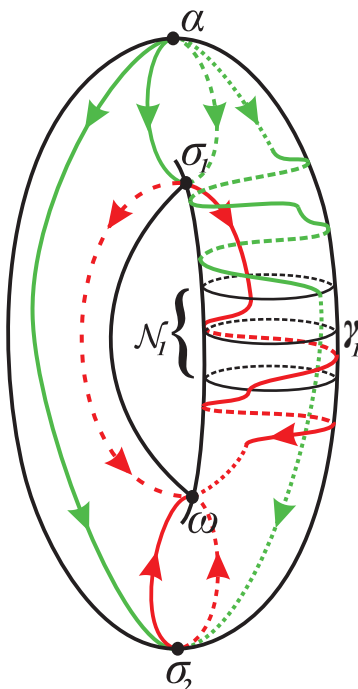
$\mathcal{N}_1$  и положим  $\tilde{l}_{\sigma_1}^{u,1} = \bar{l}_{\sigma_1}^{u,1} \cap F_1$ ,  $\hat{l}_{\sigma_1}^{u,1} = \bar{p}_1^{-1}(\tilde{l}_{\sigma_1}^{u,1})$ . Тогда в силу того, что  $\omega \in cl(l_{\sigma_1}^{u,1})$ , существует такое  $n_1 \in \mathbb{Z}$ , что  $\hat{g}^{n_1}(\hat{l}_{\sigma_1}^{u,1}) \cap \mathcal{N}_1 \neq \emptyset$ . Не уменьшая общности, будем считать, что  $n_1 \in \mathbb{N}$ .

Аналогично, введем проекцию  $\bar{p}_2 : U_{\sigma_2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , такую, что  $\bar{l}_{\sigma_2}^{s,1} = \bar{p}_2(l_{\sigma_2}^{s,1}) \subset Ox^+$ . Обозначим через  $F_2$  фундаментальную область отображения  $\bar{g}$  такую, что  $\hat{g}^{n_2}(\bar{p}_2^{-1}(F_2)) = \mathcal{N}_1$  и положим  $\tilde{l}_{\sigma_2}^{s,1} = \bar{l}_{\sigma_2}^{s,1} \cap F_2$ ,  $\hat{l}_{\sigma_2}^{s,1} = \bar{p}_2^{-1}(\tilde{l}_{\sigma_2}^{s,1})$ . Тогда, в силу того что  $\alpha \in cl(l_{\sigma_2}^{s,1})$ , существует такое  $n_2 \in \mathbb{Z}$ , что  $\hat{g}^{n_2}(\hat{l}_{\sigma_2}^{s,1}) \cap \mathcal{N}_1 \neq \emptyset$ . Не уменьшая общности будем считать, что  $-n_2 \in \mathbb{N}$ .

На подмножестве  $\bigcup_{k=-\infty}^{-1} \hat{g}^k(\mathcal{N}_1)$  часть  $\bigcup_{k=-\infty}^{n_1-1} \hat{g}^k(\hat{l}_{\sigma_1}^{u,1})$  сепаратрисы  $l_{\sigma_1}^{u,1}$  не изменяется под действием отображения  $\hat{D}_{\gamma_1} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ . В окрестности  $\mathcal{N}_1$  часть  $\hat{g}^{n_1}(\hat{l}_{\sigma_1}^{u,1})$  совершает  $m$  оборотов относительно кривой  $\gamma_1$ , а затем транслируется на множество  $\bigcup_{k=1}^{\infty} \hat{g}^k(\mathcal{N}_1)$  согласно действию диффеоморфизма  $\hat{f}$  (см. Рис. 3.7).

Аналогичным образом на подмножестве  $\bigcup_{k=-\infty}^0 \hat{g}^{-k}(\mathcal{N}_1)$  часть  $\bigcup_{k=-\infty}^{-n_2} \hat{g}^{-k}(\hat{l}_{\sigma_1}^{s,1})$  сепаратрисы  $l_{\sigma_1}^{s,1}$  не изменяется под действием отображения  $\hat{D}_{\gamma_1} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ . Поскольку  $\hat{g}^{-1}|_{\mathcal{N}_1} = \hat{f}^{-1} \hat{D}_{\gamma_1}^{-1} : \mathcal{N}_1 \rightarrow \hat{g}^{-1}(\mathcal{N}_1)$ , то в окрестности  $\hat{g}^{-1}(\mathcal{N}_1)$  часть  $\hat{g}^{n_2-1}(\hat{l}_{\sigma_1}^{s,1})$  сепаратрисы  $l_{\sigma_1}^{s,1}$  совершает  $m$  оборотов относительно кривой  $\gamma_1$ , а затем транслируется на множество  $\bigcup_{k=-n_2+1}^{\infty} \hat{g}^{-k}(\mathcal{N}_1)$  согласно действию отображения  $\hat{f}$  (см. Рис. 3.7).

Таким образом, построенный диффеоморфизм  $\hat{g} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  является диффео-



**Рис. 3.7.** Динамика диффеоморфизма  $\hat{g} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$   
**Fig 3.7.** Dynamics of the diffeomorphism  $\hat{g} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$

морфизмом Морса-Сейла с ориентируемыми гетероклиническими пересечениями и  $\hat{g}_* = B_{1,m}$ .

Поскольку  $\hat{g}_* = B_{1,m}$ , то  $\hat{g}_1$  не является периодическим диффеоморфизмом. Пусть  $\beta = cl(W_{\sigma_1}^s)$ , а  $C_\beta$  – окрестность кривой  $\beta$ , такая, что  $N_1 \subset C_\beta$ . Тогда диффеоморфизм  $\hat{g}|_{\mathbb{T}^2 \setminus C_\beta}$  является изотопным тождественному, а следовательно,  $\hat{g} \in T_2$ .

**Благодарности.** Исследование выполнено при поддержке фонда развития теоретической физики и математики базис «БАЗИС», номер контракта 19-7-1-15-1. Также автор благодарит О. В. Починку за постановку задачи и плодотворные обсуждения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безденежных А. Н., Гринес В. З. Динамические свойства и топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях // Методы качественной теории дифференц. уравнений. Межвуз. темат. сб. научн. тр. под ред. Е.А. Лентович-Андроновой. 1987. С. 24–32.
2. Безденежных А. Н., Гринес В. З. Реализация градиентноподобных диффеоморфизмов двумерных многообразий // Дифференциальные и интегральные уравнения. 1985. С. 33–37.
3. Жиров А. Ю., Плыкин Р. В. Соответствие между одномерными гиперболическими аттракторами диффеоморфизмов поверхностей и обобщенными псевдоано-

совскими диффеоморфизмами // Математические заметки. 1995. Т. 58, № 1. С. 149–152.

4. Гринес В. З., Куренков Е. Д. Диффеоморфизмы двумерных многообразий с одномерными просторно расположенными базисными множествами // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2020. Т. 84, № 5. С. 40–97. DOI: <https://doi.org/10.4213/im8923>
5. Farb B., Margalit D. A primer on mapping class groups (pms-49). Princeton: Princeton University Press, 2011. 489 p.
6. Nielsen J. et al. Untersuchungen zur topologie der geschlossenen zweiseitigen flachen. Acta Mathematica. 1927. Vol. 50. pp. 189–358. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02421324>
7. Baer R. Isotopie von kurven auf orientierbaren, geschlossenen flachen und ihr zusammenhang mit der topologischen deformation der flachen. Journal far die reine und angewandte Mathematik. 1928. Vol. 159. pp. 101–116.
8. Batterson S. The dynamics of Morse-Smale diffeomorphisms on the torus. Transactions of the American Mathematical Society. 1979. Vol. 256. pp. 395–403. DOI: <https://doi.org/10.2307/1998118>
9. Franks J. Anosov diffeomorphisms. Berkeley: University of California, 1968. 134 p.
10. Au T. K. K., Luo F., Yang T. Lectures on the mapping class group of a surface. Transformation Groups and Moduli Spaces of Curves. 2010. Vol. 16. pp. 21–61.
11. Rolfsen D. Knots and links. Providence: American Mathematical Soc., 2003. Vol. 346. 439 p.
12. Палис Ж., Ди М. В. Геометрическая теория динамических систем: Введение. М.: Мир, 1986. 304 с.

*Поступила 21.03.2021; доработана после рецензирования 23.04.2021;  
принята к публикации 26.05.2021*

*Информация об авторе:*

**Морозов Андрей Игоревич**, стажер-исследователь Международной лаборатории динамических систем и приложений, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3125-1825>, [andrefrostnn@gmail.com](mailto:andrefrostnn@gmail.com)

*Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов:* автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

MSC2020 37E30

# Realization of homotopy classes of torus homeomorphisms by the simplest structurally stable diffeomorphisms

A. I. Morozov

National Research University «Higher School of Economics» (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

**Abstract.** According to Thurston's classification, the set of homotopy classes of orientation-preserving homeomorphisms of orientable surfaces is split into four disjoint subsets. A homotopy class from each subset is characterized by the existence of a homeomorphism called Thurston's canonical form, namely: a periodic homeomorphism, a reducible nonperiodic homeomorphism of algebraically finite order, a reducible homeomorphism that is not a homeomorphism of an algebraically finite order, and a pseudo-Anosov homeomorphism. Thurston's canonical forms are not structurally stable diffeomorphisms. Therefore, the problem naturally arises of constructing the simplest (in a certain sense) structurally stable diffeomorphisms in each homotopy class. In this paper, the problem posed is solved for torus homeomorphisms. In each homotopy class, structurally stable representatives are analytically constructed, namely, a gradient-like diffeomorphism, a Morse-Smale diffeomorphism with an orientable heteroclinic, and an Anosov diffeomorphism, which is a particular case of a pseudo-Anosov diffeomorphism.

**Key Words:** Nielsen-Thurston theory, homotopic classes of mappings, realization of diffeomorphisms, algebraic mappings

**For citation:** A. I. Morozov. Realization of homotopy classes of torus homeomorphisms by the simplest structurally stable diffeomorphisms. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 23:2(2021), 171–184. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202102.171-184>

## REFERENCES

1. A. N. Bezdenezhnykh, V. Z. Grines, “[Dynamical Properties and Topological Classification of Gradient-Like Diffeomorphisms on Two-Dimensional Manifolds I.]”, *Sel. Math. Sov.*, **11**:1 (1992), 1-11.
2. A. N. Bezdenezhnykh, V. Z. Grines, “[Realization of Gradient-like diffeomorphisms of two-dimensional manifolds]”, *Sel. Math. Sov.*, 1992, 19-23.
3. A. Yu. Zhirov, R. V. Plikin, “[On the relationship between one-dimensional hyperbolic attractors of surface diffeomorphisms and generalized pseudo-Anosov diffeomorphisms]”, *Mathematical Notes*, **58**:1 (1995), 779-781.
4. V. Z. Grines, E. D. Kurenkov, “[Diffeomorphisms of 2-manifolds with one-dimensional sparsely situated basic sets]”, *Izvestiya: Mathematics*, **84**:5 (2020), 862–909 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.4213/im8923>
5. B. Farb, D. Margalit, *A primer on mapping class groups (pms-49)*, Princeton University Press, Princeton, 2011, 489 p.

6. J. Nielsen, “Untersuchungen zur topologie der geschlossenen zweiseitigen flachen”, *Acta Mathematica*, **50** (1927), 189–358. (In Ger.). DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02421324>
7. R. Baer, “Isotopie von kurven auf orientierbaren, geschlossenen flachen und ihr zusammenhang mit der topologischen deformation der flachen”, *Journal far die reine und angewandte Mathematik*, **159** (1928), 101–116 (In Ger.).
8. S. Batterson, “The dynamics of Morse-Smale diffeomorphisms on the torus”, *Transactions of the American Mathematical Society*, **256** (1979), 395–403. DOI: <https://doi.org/10.2307/1998118>
9. J. Franks, *Anosov diffeomorphisms, Global Analysis*, University of California Publ., Berkeley, 1968, 134 p.
10. T.K.K. Au, F. Luo, T. Yang, “Lectures on the Mapping Class Group of a surface”, *Transformation groups and moduli spaces of curves*, **16** (2010), 21–61.
11. D. Rolfsen, *Knots and links*, **346**, Mathematics Lecture Series, Providence, 2003, 439 p.
12. Zh. Palis, V.M. Di, *Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction*, Springer-Verlag, New York, 1982 DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5703-5>, 210 p.

*Submitted 21.03.2021; Revised 23.04.2021; Accepted 26.05.2021*

*Information about the author:*

**Andrei I. Morozov**, Research Assistant, International Laboratory of Dynamical Systems and Applications, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3125-1825>, [andrefrostnn@gmail.com](mailto:andrefrostnn@gmail.com)

*The author have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The author declare no conflict of interest.