Математика

DOI 10.15507/2079-6900.23.202102.147–158
Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.938.5

Классификация периодических преобразований ориентируемой поверхности рода два

Д. А. Баранов, О. В. Починка

ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»(г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

Аннотация. В настоящей работе найдены все допустимые классы топологической сопряженности периодических преобразований двумерной поверхности рода два. Доказано, что существует в точности семнадцать попарно топологически несопряженных сохраняющих ориентацию периодических преобразований кренделя. Также представлена реализация всех классов посредством поднятия полных характеристик отображений с модульной поверхности на поверхность рода два. Классификационные результаты базируются на теории Нильсена периодических преобразований поверхностей, согласно которой класс топологической сопряженности любого подобного гомеоморфизма полностью определяется его характеристикой. Полная характеристика несет информацию о роде модульной поверхности, ветвленно накрытой несущей поверхностью, периодах точек ветвления и поворотах вокруг них. Необходимые и достаточные условия допустимости полной характеристики описаны Нильсеном и для любой поверхности дают конечное число допустимых наборов. Для поверхностей небольшого рода можно составить полный список допустимых характеристик, что и сделано авторами работы для поверхности рода 2.

Ключевые слова: периодический гомеоморфизм поверхностей, теория Нильсена-Терстона, ориентируемая поверхность, топологическая сопряженность

Для цитирования: Баранов Д. А., Починка О. В. Классификация периодических преобразованиий ориентируемой поверхности рода два // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 2. С. 147–158. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202102.147–158

1. Введение

В работе [1] Я. Нильсеном были исследованы структура и свойства периодических преобразований поверхностей и найдены необходимые и достаточные условия их топологической сопряженности. Реализация всех классов топологической сопряженности периодических преобразований стандартными представителями – задача трудная и необозримая. Однако в случае двумерной сферы она была решена Б. Керькъярто [2], а в случае двумерного тора – Л. Брауэром [3]. В настоящей работе найдены все допустимые классы топологической сопряженности периодических преобразований двумерной поверхности рода 2. Введем необходимые определения и факты.

Пусть S – замкнутая ориентируемая поверхность и $f : S \to S$ – сохраняющий ориентацию гомеоморфизм. Гомеоморфизмы $f, f' : S \to S$ называются *топологически сопряженными*, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $h : S \to S$ такой, что $f' = h \circ f \circ h^{-1}$.

Гомеоморфизм f называется *периодическим*, если существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $f^n = id$. Наименьшее из таких n называется периодом f.

Ниже мы приводим результаты Я. Нильсена [1], более современное изложение этих результатов можно найти, например, в [4–6], мы следуем изложению в [7–8].

С каждым периодическим преобразованием f периода n связаны следующие объекты:

1. множество $\bar{B} \subset S$ *точек, периода меньшего* n, оно состоит из конечного числа орбит $\mathcal{O}_i$, $i = 1, \ldots, k$ периода n_i, являющегося делителем n; с каждой орбитой $\mathcal{O}_i \subset \bar{B}$ связано число $\delta_i \in \{1, \ldots, \lambda_i - 1\}$, взаимно простое с $\lambda_i = \dfrac{n}{n_i}$ такое, что в некоторой окрестности $D_{\bar{x}_i}$ точки $\bar{x}_i \in \mathcal{O}_i$ гомеоморфизм f^{n_i} топологически сопряжен (см. Рис. 1.1) с поворотом плоскости вокруг начала координат
$$z \to e^{\frac{2\pi\delta_i}{\lambda_i} i} z;$$
2. число $d_i \in \{1, \ldots, \lambda_i - 1\}$ такое, что $d_i\delta_i \equiv 1 \pmod{\lambda_i}$. Пара (n_i, d_i) называется *валентностью* орбиты $\mathcal{O}_i$;
3. группа $G = \{id, f, \ldots, f^{n-1}\}$, изоморфная $\mathbb{Z}_n = \{0, \ldots, n-1\}$ и действующая на S так, что *модульная поверхность* $\Sigma = S/G$ является замкнутой поверхностью, и *естественная проекция* $\pi : S \to \Sigma$ является n-листным накрытием всюду, кроме точек множества $\bar{B}$; $B = \pi(\bar{B})$, $x_i = \pi(\mathcal{O}_i)$;
4. гомоморфизм $\eta : H_1(\Sigma \setminus B) \to \mathbb{Z}_n$, индуцированный проекцией π.

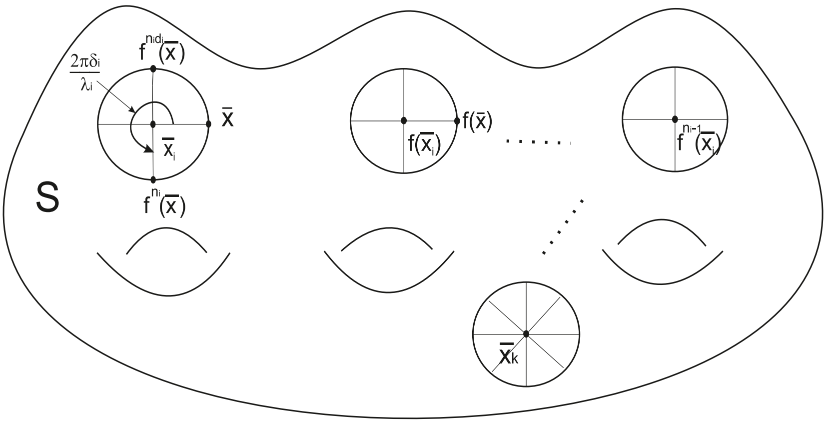

Рис. 1.1. Действие периодического гомеоморфизма в окрестности точки меньшего периода
Fig 1.1. Action of a periodic homeomorphism near a point of less period

П р е д л о ж е н и е 1.1 *Два периодических преобразования f, f' поверхности S топологически сопряжены тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые периоды и наборы валентностей орбит меньшего периода.*

С л е д с т в и е 1.1 *Два периодических преобразования f, f' поверхности S без точек меньшего периода топологически сопряжены тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые периоды.*

Таким образом, если p – род поверхности S, а g – род модульной поверхности Σ, то каждый периодический гомеоморфизм можно описать *полной характеристикой*

$$(n, p, g, n_1, ..., n_k, d_1, ..., d_k).$$

Если $B = \emptyset$, то $k = 0$ и полные характеристики имеют вид (n, p, g), а естественная проекция $\pi : S \to \Sigma$ является n-листным накрытием (без точек ветвления) модульной поверхности Σ рода g поверхностью S рода p.

Реализуемость некоторого набора чисел полной характеристикой какого-либо периодического гомеоморфизма определяется следующими соотношениями:

$$2p + \sum_{i=1}^{k} n_i - 2 = n(2g + k - 2), \tag{1.1}$$

$$\sum_{i=1}^{k} d_i n_i \equiv 0 \pmod n \tag{1.2}$$

Равенство (1.1) выражает связь эйлеровых характеристик поверхностей

$$\dot{S} = S \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \pi^{-1}(D_i), \; \dot{\Sigma} = \Sigma \setminus \bigcup_{i=1}^{k} D_i,$$

при условии, что поверхность $\dot{S}$ n-листно накрывает $\dot{\Sigma}$:

$$\chi(\dot{S}) = n\chi(\dot{\Sigma}).$$

Соотношение (1.2) следует из следующих соображений (см. Рис. 1.2). Положим $D_i = \pi(D_{\bar{x}_i})$ и обозначим через c_i границу диска D_i, ориентированную так, что при обходе вдоль границы диск остается слева. Тогда $\eta([c_i]) = n_i d_i$. С другой стороны цепь $\sum\limits_{i=1}^{k}[c_i]$ гомологична цепи $[c]$, где c – замкнутая кривая, которая ограничивает диск (Рис. 1.2) и, следовательно, удовлетворяет равенству $\eta([c]) = 0$.

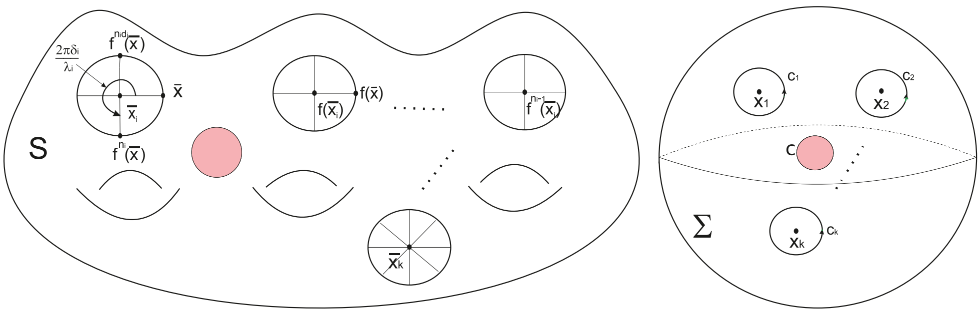

Рис. 1.2. Геометрический смысл соотношения (1.2)
Fig 1.2. Geometrical meaning of relation (1.2)

В случае, когда модульная поверхность является сферой ($g = 0$), отображение η является эпиморфизмом и, следовательно, некоторая цепь $\sum\limits_{i=1}^{k} l_i[c_i]$ должна быть гомологична цепи $[b]$, где b – замкнутая кривая (см. Рис. 1.3) такая, что $\eta([b]) = 1$. Тогда к соотношению (1.2) добавляется следующее условие на наибольший общий делитель (GSD) чисел $d_1n_1, \ldots, d_kn_k$:

$$(GSD(d_1n_1, \ldots, d_kn_k), n) = 1. \tag{1.3}$$

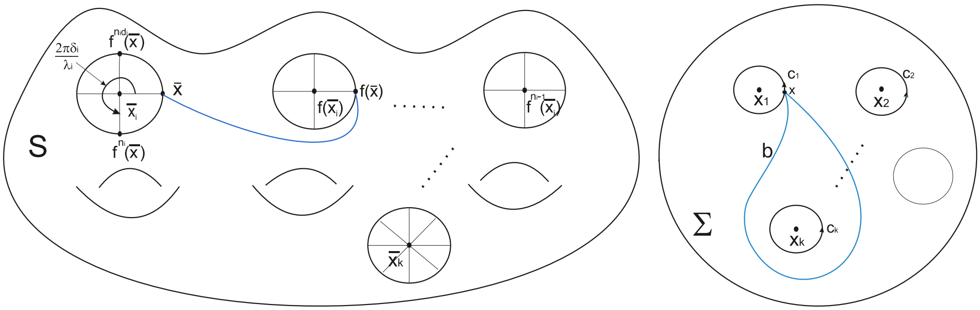

Рис. 1.3. Геометрический смысл соотношения (1.3)
Fig 1.3. Geometrical meaning of relation (1.3)

Основным результатом работы является доказательство следующих фактов.

Теорема 1.1 (классификация периодических гомеоморфизмов поверхности рода два) *Существует семнадцать классов топологической сопряженности периодических гомеоморфизмов тора со следующими полными характеристиками в каждом классе:*

1. f_1: $g = 0, n = 10, k = 3, n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 5,\ d_1 = 1,\ d_2 = 2,\ d_3 = 1$;
2. $f_2 = f_1^2$: $g = 0,\ n = 5,\ k = 3,\ n_1 = n_2 = n_3 = 1,\ d_1 = 1,\ d_2 = d_3 = 2$;
3. $f_3 = f_1^3$: $g = 0, n = 10,\ k = 3,\ n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 5,\ d_1 = 3,\ d_2 = 1,\ d_3 = 1$;
4. $f_4 = f_1^4$: $g = 0, n = 5, k = 3, n_1 = n_2 = n_3 = 1,\ d_1 = 2,\ d_2 = d_3 = 4$;
5. $f_5 = f_1^5$: $g = 0, n = 2,\ k = 6,\ n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = n_6 = 1,\ d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = d_6 = 1$;
6. $f_6 = f_1^6$: $g = 0, n = 5, k = 3, n_1 = n_2 = n_3 = 1,\ d_1 = 3,\ d_2 = d_3 = 1$;
7. $f_7 = f_1^7$: $g = 0, n = 10,\ k = 3,\ n_1 = 1,\ n_2 = 2,\ n_3 = 5,\ d_1 = 7,\ d_2 = 4,\ d_3 = 1$;
8. $f_8 = f_1^8$: $g = 0, n = 5,\ k = 3,\ n_1 = n_2 = n_3 = 1,\ d_1 = 4,\ d_2 = d_3 = 3$;
9. $f_9 = f_1^9$: $g = 0, n = 10,\ k = 3,\ n_1 = 1,\ n_2 = 2,\ n_3 = 5,\ d_1 = 9,\ d_2 = 3,\ d_3 = 1$;
10. f_{10}: $g = 0, n = 8, k = 3, n_1 = n_2 = 1, n_3 = 4,\ d_1 = 1,\ d_2 = 3,\ d_3 = 1$;
11. $f_{11} = f_{10}^2$: $g = 0, n = 4,\ k = 4,\ n_1 = 1, n_2 = n_3 = 2, n_4 = 1,\ d_1 = d_2 = d_3 = 1,\ d_4 = 3$;
12. $f_{12} = f_{10}^5$: $g = 0, n = 8, k = 3, n_1 = n_2 = 1, n_3 = 4,\ d_1 = 5,\ d_2 = 7,\ d_3 = 1$;
13. f_{13}: $g = 0, n = 6,\ k = 3,\ n_1 = n_2 = 1,\ n_3 = 2,\ d_1 = d_2 = 1,\ d_3 = 2$;
14. $f_{14} = f_{13}^2$: $g = 0, n = 3, k = 4, n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1,\ d_1 = d_2 = 1,\ d_3 = d_4 = 2$;

15. $f_{15} = f_{13}^3$*:* $g = 1, n = 2$*,* $k = 2$*,* $n_1 = n_2 = 1$*,* $d_1 = d_2 = 1$*;*

16. $f_{16} = f_{13}^5$*:* $g = 0, n = 6$*,* $k = 3$*,* $n_1 = n_2 = 1$*,* $n_3 = 2$*,* $d_1 = d_2 = 5$*,* $d_3 = 1$*;*

17. f_{17}*:* $g = 0, n = 6$*,* $k = 4$*,* $n_1 = n_2 = 2$*,* $n_3 = n_4 = 3$*,* $d_1 = 1$*,* $d_2 = 2$*,* $d_3 = d_4 = 1$*.*

2. Неравенства, связывающие полные характеристики периодических гомеоморфизмов

Из формулы (1.1) вытекает несколько полезных следствий.

Предложение 2.1 *Для любого сохраняющего ориентацию гомеоморфизма* $f : S \to S$ *периода* n *без точек меньшего периода справедливо следующее равенство:*

$$p = n(g-1) + 1 \tag{2.1}$$

Доказательство. Воспользуемся формулой (1.1) $2p + \sum\limits_{i=1}^{k} n_i - 2 = n(2g+k-2)$. Поскольку нет точек меньшего периода, получается равенство $2p - 2 = n(2g-2)$. Из этого следует, что $p - 1 = n(g-1)$ и $p = n(g-1) + 1$.

Следствие 2.1 *На ориентируемой поверхности рода* 2 *не существует сохраняющего ориентацию гомеоморфизма* f *периода* n *без точек меньшего периода.*

Доказательство. Подставив $p = 2$ в равенство (2.1), получим $n(g-1) = 1$. Это равенство не может быть верным ни при каком $n > 1$. Тогда, в силу утверждения 2.1, не существует гомеоморфизма без точек меньшего периода.

Предложение 2.2 *Для любого сохраняющего ориентацию гомеоморфизма* $f : S \to S$ *периода* n *с непустым множеством точек меньшего периода справедливо следующее неравенство:*

$$p > n(g-1) + 1 \tag{2.2}$$

Доказательство. Воспользуемся формулой (1.1) $2p + \sum\limits_{i=1}^{k} n_i - 2 = n(2g+k-2)$. Поскольку n_i – делители n, не превосходящие n, то

$$0 < k \leqslant \sum_{i=1}^{k} n_i \leqslant \frac{nk}{2} < nk. \tag{2.3}$$

Для доказательства рассмотрим 3 случая.

1. $p = 0$. Тогда равенство (1.1) равносильно равенству $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i - 2 = n(2g+k-2)$. Воспользовавшись неравенством (2.3), получим $n(2g-2) < -2$. Отсюда следует, что $n(1-g) > 1$ или $1 - g > 0$. Следовательно, $g = 0$.

2. $p = 1$. Тогда равенство (1.1) равносильно равенству $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n(2g+k-2)$. Из (2.3) получим $n(2g+k-2) < nk$. Следовательно, $g - 1 < 0$ или $g = 0$.

3. $p > 1$. Из формул (1.1) и (2.3) получим, что $n(2g + k - 2) < 2p + nk - 2$. Откуда $n(g - 1) < p - 1$ или $p > n(g - 1) + 1$.

Таким образом, во всех случаях $p > n(g - 1) + 1$.

Следствие 2.2 *Для ориентируемой поверхности рода* 2 *род модульной поверхности* g *может быть равен* 0 *или* 1*.*

Доказательство. Подставив $p = 2$ в неравенство (2.2), получим $n(g-1) < 1$. Это неравенство для $n > 1$ выполняется только при $g = 0$ или при $g = 1$.

Предложение 2.3 *Для ориентируемой поверхности рода* 2 *число* k *орбит меньшего периода удовлетворяет следующим неравенствам:*

$$g = 1: \ 0 < \frac{2}{n-1} \leqslant k \leqslant \frac{4}{n} \leqslant 2 \tag{2.4}$$

$$g = 0: \ 2 < \frac{2+2n}{n-1} \leqslant k \leqslant 4 + \frac{4}{n} \leqslant 6 \tag{2.5}$$

Доказательство. Согласно следствию 2.2, $g = 0$ или $g = 1$. Рассмотрим эти два случая отдельно.

1. Если $g = 0$, то равенство (1.1) равносильно равенству

$$nk = \sum_{i=1}^{k} n_i + 2. \tag{2.6}$$

   Используя неравенство (2.3), запишем, что $2 + k \leqslant \ nk \leqslant \ 2 + \dfrac{nk}{2}$. Из левой части этого неравенства получим, что $k \geqslant \dfrac{2}{n-1} > 0$, а из правой части – что $k \leqslant \dfrac{4}{n} \leqslant 2$.

2. Если $g = 1$, то равенство (1.1) равносильно равенству

$$nk = \sum_{i=1}^{k} n_i + 2 + 2n \tag{2.7}$$

   Используя неравенство (2.3), запишем, что $2 + k + 2n \leqslant \ nk \leqslant \ 2 + \dfrac{nk}{2} + 2n$. Из левой части этого неравенства получаем, что $k \geqslant \dfrac{2+2n}{n-1} > 2$, а из правой части что $k \leqslant 4 + \dfrac{4}{n} \leqslant 6$.

3. Классификация периодических гомеоморфизмов ориентируемой поверхности рода два

В этом разделе мы докажем теорему 1.1, а именно, покажем, что, если f – сохраняющий ориентацию гомеоморфизм f периода n, то допустимы 17 периодических наборов, перечисленных в теореме 1.1.

Доказательство. Из утверждения 2.2 следует, что род модульной поверхности g может быть 1 или 0. Рассмотрим оба случая.

1. $g = 1$. В данном случае из неравенства (2.4) следует, что $k = 1$ или $k = 2$. В случае $k = 1$ неравенство (2.4) выполняется при $n = 3$ или $n = 4$. Подставив эти данные в формулу (1.1), получим, что при $n = 3$, $n_1 = 1$ и $d_1 = 1$ или $d_1 = 2$, а при $n = 4$, $n_1 = 2$ и $d_1 = 1$. Все эти варианты невозможны, т. к. не выполняется соотношение (1.2). В случае $k = 2$ получим, что $n = 2$. Подставив данные в формулу (1.1), получаем, что $n_1 = n_2 = 1$ и $d_1 = d_2 = 1$ (набор значений 15).

2. $g = 0$. В данном случае из неравенства (2.5) следует, что $3 \leqslant k \leqslant 6$. Рассмотрим все случаи отдельно, начиная с $k = 6$.

   (a) $k = 6$. Из неравенства (2.5) получим, что $n = 2$, а из равенства (1.1) следует, что все $n_i = 1$ и все $d_i = 1$ (набор значений 5).

   (b) $k = 5$. Из неравенства (2.5) получим, что $n = 3$ или $n = 4$. В первом случае из (1.1) получается, что $\sum\limits_{i=1}^{5} n_i = 7$, чего не может быть, поскольку n_i – делители 7. При $n = 4$ получается, что $\sum\limits_{i=1}^{5} n_i = 10$, откуда все $n_i = 2$, но тогда не выполняется соотношение (1.3).

   (c) $k = 4$. Из неравенства (2.5) получим, что возможны любые $n \geqslant 3$. Рассмотрим отдельно случаи $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$, $n \geqslant 7$.

      i. $n = 3$. Из (1.1) следует, что $\sum\limits_{i=1}^{4} n_i = 4$. Следовательно, все $n_i = 1$, а из соотношения (1.2) получаем $d_1 = d_2 = 1$, $d_3 = d_4 = 2$ (набор значений 14).

      ii. $n = 4$. Из (1.1) следует, что $\sum\limits_{i=1}^{4} n_i = 6$. Следовательно, $n_1 = n_2 = 1$, $n_3 = n_4 = 2$, а из соотношения (1.2) получим $d_1 = 3$, $d_2 = d_3 = d_4 = 1$ (набор значений – 11).

      iii. $n = 5$. Из (1.1) следует, что $\sum\limits_{i=1}^{4} n_i = 8$, чего не может, т. к. единственный делитель 5 – это 1.

      iv. $n = 6$. Из (1.1) следует, что $\sum\limits_{i=1}^{4} n_i = 10$. Следовательно, $n_1 = n_2 = 2$, $n_3 = n_4 = 3$; либо $n_1 = 1$, $n_2 = n_3 = n_4 = 3$. Для второго набора ни при каких возможных d_i не выполняется соотношение (1.2). Для первого набора из соотношения (1.2) получим $d_1 = 2$, а $d_2 = d_3 = d_4 = 1$ (набор значений 17).

      v. $n \geqslant 7$. Из соотношения (1.1) следует, что $\sum\limits_{i=1}^{4} n_i = 2n-2$. Тогда $n_1 \geq \dfrac{n-1}{2}$. Учитывая, что $n_1 = \dfrac{n}{\lambda_1}$ и $n \geqslant 7$, получим, что $n_1 = \dfrac{n}{2}$. Аналогичные рассуждения приводят к тому, что $n_2 = \dfrac{n}{2}$, $n_3 = \dfrac{n}{2}$. Из этого следует, что $n_4 = \dfrac{n}{2} - 2$ и, соответственно, $\lambda_4 \leqslant 4$ при $n \geqslant 7$. Учитывая соотношение (1.3), получим, что $n_4 = \dfrac{n}{3}$ и $n = 12$. Таким образом, $n_1 = n_2 = n_3 = 6$, $n_4 = 4$, но для такого набора ни при каких возможных d_i не выполняется соотношение (1.2).

(d) $k = 3$. В данном случае из неравенства (2.5) следует, что $n \geqslant 5$. Рассмотрим отдельно случаи $n = 5$, $n = 6$, $n = 7$, $n = 8$, $n = 9$, $n = 10$, $n \geqslant 11$.

i. $n = 5$. Из соотношения (1.1) следует, что $\sum\limits_{i=1}^{3} n_i = 3$ и, следовательно, все $n_i = 1$. Из соотношения (1.2) получаем четыре возможных набора для d_i (наборы значений 2, 4, 6, 8).

ii. $n = 6$. Из соотношения (1.1) следует, что $\sum\limits_{i=1}^{3} n_i = 4$. Откуда $n_1 = n_2 = 1$, $n_3 = 2$. Из соотношения (1.2) получим два возможных набора для d_i (наборы значений 13 и 16).

iii. $n = 7$. Из соотношения (1.1) следует, что $\sum\limits_{i=1}^{3} n_i = 5$, чего не может быть, поскольку n_i – делители 7.

iv. $n = 8$. Из соотношения (1.1) следует, что $\sum\limits_{i=1}^{3} n_i = 6$. Следовательно, $n_1 = n_2 = 1$, $n_3 = 4$; либо $n_1 = n_2 = n_3 = 2$. Для первого набора из соотношения (1.2) получим наборы значений 10 и 12. Для второго набора ни при каких возможных d_i не выполняется соотношение (1.2).

v. $n = 9$. Из соотношения (1.1) следует, что $\sum\limits_{i=1}^{3} n_i = 7$. Следовательно, $n_1 = 1, n_2 = n_3 = 3$, но ни при каких возможных d_i не выполняется соотношение (1.2).

vi. $n = 10$. Из соотношения (1.1) следует, что $\sum\limits_{i=1}^{3} n_i = 8$. Следовательно, $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 5$. Из соотношения (1.2) получим наборы значений 1, 3, 7, 9.

vii. $n \geqslant 11$. Из соотношения (1.1) следует, что $\sum\limits_{i=1}^{3} n_i = n-2$ и, следовательно, $n_1 \geq \dfrac{n-2}{3}$. Учитывая, что $n_1 = \dfrac{n}{\lambda_1}$ и $n \geqslant 11$, получаем, что $n_1 = \dfrac{n}{2}$ либо $n_1 = \dfrac{n}{3}$. Аналогичные рассуждения приводят к тому, что $\lambda_2 \leqslant 3$ для $n_1 = \frac{n}{2}$ и $\lambda_2 \leqslant 2$ для $n_1 = \dfrac{n}{3}$ и это сводится к тому, что $n_3 = \dfrac{n-12}{6}$ в обоих вариантах. В данном случае получается, что n и все n_i – четные числа, поэтому не выполняется соотношение (1.3) ни для каких d_i.

4. Реализация периодических гомеоморфизмов поверхности рода 2 через модульную поверхность

Согласно теореме 1.1, все периодические гомеоморфизмы являются степенями гомеоморфизмов f_1, f_{10}, f_{13}, f_{17}. Ниже приведены иллюстрации, демонстрирующие поднятие этих гомеоморфизмов с модульной поверхности.

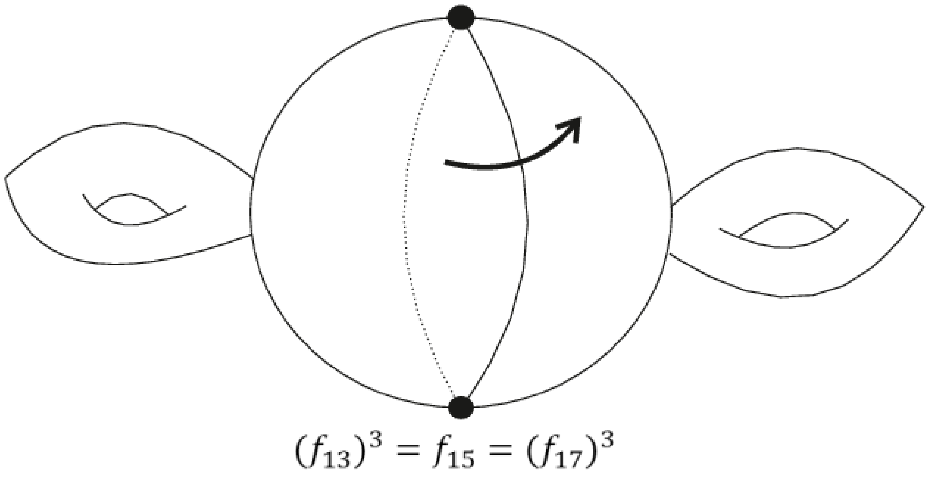

Рис. 4.1. Периодический гомеоморфизм $f_{13}^3 = f_{15} = f_{17}^3$
Fig 4.1. Periodic homeomorphism $f_{13}^3 = f_{15} = f_{17}^3$

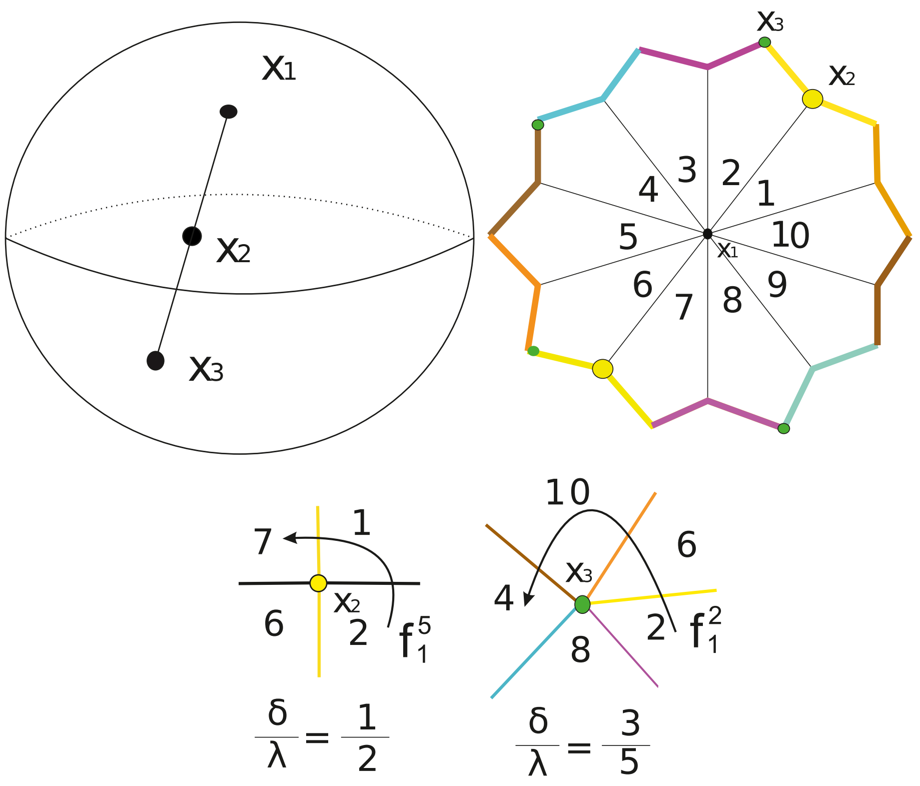

Рис. 4.2. Периодический гомеоморфизм f_1
Fig 4.2. Periodic homeomorphism f_1

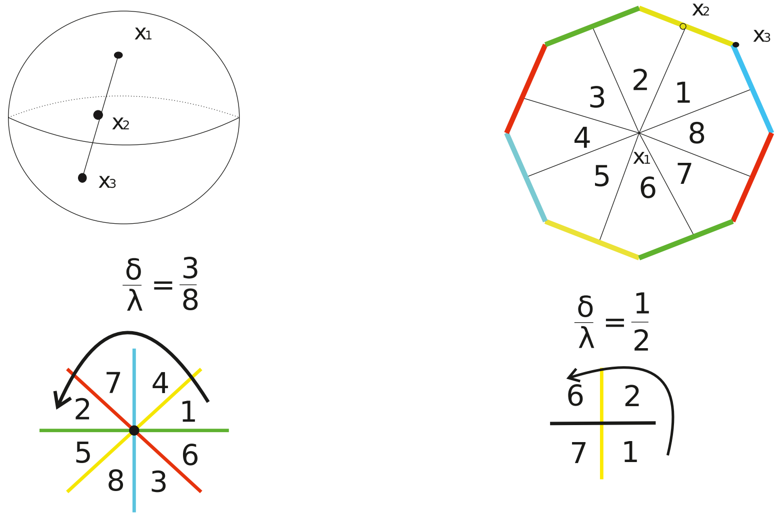

Рис. 4.3. Периодический гомеоморфизм f_{10}
Fig 4.3. Periodic homeomorphism f_{10}

Благодарности. Классификационные результаты подготовлены в ходе проведения исследования (№ 21-04-004) в рамках Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)» в 2021–2022 гг. Реализация периодических гомеоморфизмов поддержана международной лабораторией динамических систем и приложений НИУ ВШЭ (№ 075-15-2019-1931).

Список литературы

1. Nielsen J. Die struktur periodischer transformationen von flachen. Medd. Danske Vid. Selsk. 1937. pp. 15.

2. Kerekjarto B. Topologische charakterisierung der linearen abbildungen. Acta Scient. Math. Szeged. 1934. Vol. 6. pp. 235–262.

3. Brouwer L. E. J. Aufzahlung der periodisken transformationen. KNAW Proceedings, 21 II. 1919. pp. 1352–1356.

4. Fajuyigbe O. An extension theorem for periodic transformations of surface. I. Israel J. Math. 1979. Vol. 34. pp. 12–20. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02761821

5. Hirose S. On periodic maps over surfaces with large periods. Tohoku Math. J. 2010. Vol. 67, No. 10. pp. 45–53. DOI: https://doi.org/10.2748/tmj/1270041026

6. Hirose S., Kasahara Y. A uniqueness of periodic maps on surfaces. J. Math. Soc. Japan. 2016. Vol. 68, No. 4. pp. 1777–1787. DOI: http://dx.doi.org/10.2969/jmsj/06841777

7. Smith P. A. Abelian actions on 2-manifolds. Michigan Math. J. 1967. Vol. 14, No 3. pp. 257–275. DOI: https://doi.org/10.1307/mmj/1028999776

8. Yokoyama K. Classifcation of periodic maps on compact surfaces. I. Tokyo J. Math. 1983. Vol. 6, No. 1. pp. 75–94. DOI: https://doi.org/10.3836/tjm/1270214327

Поступила 25.03.2021; доработана после рецензирования 26.04.2021; принята к публикации 24.05.2021

Информация об авторах:

Баранов Денис Алексеевич, студент факультета информатики, математики и компьютерных наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6587-5305, denbaranov0066@gmail.com

Починка Ольга Витальевна, профессор кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), доктор физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4274-8215, olga-pochinka@yandex.ru

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Original article

MSC2020 37E30

Classification of periodic transformations of an orientable surface of genus two

D. A. Baranov, O. V. Pochinka

National Research University «Higher School of Economics» (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

Abstract. In this paper, we find all admissible topological conjugacy classes of periodic transformations of a two-dimensional surface of genus two. It is proved that there are exactly seventeen pairwise topologically non-conjugate orientation-preserving periodic pretzel transformations. The implementation of all classes by lifting the full characteristics of mappings from a modular surface to a surface of genus two is also presented. The classification results are based on Nielsen's theory of periodic surface transformations, according to which the topological conjugacy class of any such homeomorphism is completely determined by its characteristic. The complete characteristic carries information about the genus of the modular surface, the ramified bearing surface, the periods of the ramification points and the turns around them. The necessary and sufficient conditions for the admissibility of the complete characteristic are described by Nielsen and for any surface they give a finite number of admissible collections. For surfaces of a small genus, one can compile a complete list of admissible characteristics, which was done by the authors of the work for a surface of genus 2.

Key Words: periodic homeomorphisms of surfaces, Nielsen-Thurston theory, orientable surface, topological conjugacy

For citation: *D. A. Baranov, O. V. Pochinka.* Classification of periodic transformations of an orientable surface of genus two. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 23:2(2021), 147–158. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202102.147–158

References

1. J. Nielsen, "Die struktur periodischer transformationen von flachen", *Medd. Danske Vid. Selsk.*, 1937, 15.
2. B. von Kerekjarto, "Topologische charakterisierung der linearen abbildungen", *Acta Scient. Math. Szeged*, **6** (1934), 235–262.
3. L. E. J. Brouwer, "Aufzahlung der periodisken transformationen", *KNAW Proceedings, 21 II*, 1919, 1352–1356.
4. O. Fajuyigbe, "An extension theorem for periodic transformations of surface", *I. Israel J. Math.*, **34** (1979), 12–20. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02761821
5. S. Hirose, "On periodic maps over surfaces with large periods", *Tohoku Math. J.*, **67**:10 (2010), 45–53. DOI: https://doi.org/10.2748/tmj/1270041026
6. S. Hirose, Y. Kasahara, "A uniqueness of periodic maps on surfaces", *J. Math. Soc. Japan*, **68**:4 (2016), 1777–1787. DOI: http://dx.doi.org/10.2969/jmsj/06841777
7. P. A. Smith, "Abelian actions on 2-manifolds", *Michigan Math. J.*, **14**:3 (1967), 257–275. DOI: https://doi.org/10.1307/mmj/1028999776
8. K. Yokoyama, "Classification of periodic maps on compact surfaces", *I. Tokyo J. Math.*, **6**:1 (1983), 75-94. DOI: https://doi.org/10.3836/tjm/1270214327

Submitted 25.03.2021; Revised 26.04.2021; Accepted 24.05.2021

Information about the authors:

Denis A. Baranov, student of the Faculty of Informatics, Mathematics and Computer Science, Higher School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6587-5305, denbaranov0066@gmail.com

Olga V. Pochinka, Professor of the Department of Fundamental Mathematics, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), D. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4274-8215, olga-pochinka@yandex.ru.

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.