Прикладная математика и механика

DOI 10.15507/2079-6900.23.202101.72–81
Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.9, 539.3, 532.542

Исследование динамической устойчивости изгибно-крутильных деформаций трубопровода

П. А. Вельмисов, Ю. А. Тамарова, Ю. В. Покладова

ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (г. Ульяновск, Российская Федерация)

Аннотация. Предложены нелинейные математические модели, описывающие динамику трубопровода с протекающей в нем жидкостью: а) модель изгибно-крутильных колебаний с двумя степенями свободы; б) модель, описывающая изгибно-крутильные колебания с учетом нелинейности изгибающего момента и центробежной силы; в) модель, учитывающая совместные продольные, изгибные (поперечные) и крутильные колебания. Все предложенные модели описываются нелинейными дифференциальными уравнениями с частными производными для неизвестных функций деформаций. Для описания динамики трубопровода используется нелинейная теория твеqрдого деформируемого тела, учитывающая поперечные, тангенциальные и продольные деформации трубопровода. Исследуется динамическая устойчивость изгибно-крутильных и продольно-изгибно-крутильных колебаний трубопровода. Принятые в работе определения устойчивости деформируемого тела соответствуют концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Задача об исследовании динамической устойчивости, а именно устойчивости по начальным данным, формулируется следующим образом: при каких значениях параметров, характеризующих систему «газ-тело», малым отклонениям тела от положения равновесия в начальный момент времени будут соответствовать малые отклонения и в любой момент времени. Для предложенных моделей построены положительно определенные функционалы типа Ляпунова, на основе которых исследуется динамическая устойчивость трубопровода. Получены достаточные условия устойчивости, налагающие ограничения на параметры механической системы.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, трубопровод, деформация, динамика, изгибно-крутильные колебания, устойчивость, функционалы Ляпунова

Для цитирования: Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А., Покладова А. В. Исследование динамической устойчивости изгибно-крутильных деформаций трубопровода // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 1. С. 72–81. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202101.72–81

1. Введение

Актуальной проблемой во многих отраслях техники является задача исследования динамики и устойчивости составных частей конструкций, устройств, приборов, установок различного назначения при аэрогидродинамическом воздействии. Такого рода задачи возникают на этапе проектирования в приборостроении, авиаракетостроении, машиностроении и т. д. Изучению и описанию колебаний трубопроводов, распространения волн в трубопроводах, содержащих газожидкостную среду, устойчивости упругих тел, взаимодействующих с потоком жидкости, посвящено большое количество теоретических и экспериментальных исследований, проведенных с середины прошлого века до сегодняшних дней и представленных, например, [1–14]. Среди публикаций авторов данной статьи по исследованию динамики и устойчивости упругих тел, взаимодействующих с потоком жидкости или газа, отметим статьи и монографии [15–19].

В данной статье исследуется устойчивость решений начально-краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными, описывающих динамику трубопровода с учетом кручения. Для описания динамики трубопровода с протекающей в нем жидкостью предложены модельные уравнения, описывающие изгибно-крутильные колебания с двумя степенями свободы, уравнения, описывающие изгибно-крутильные колебания с учетом нелинейности изгибающего момента и центробежной силы, а также уравнения, описывающие совместные продольные, изгибные и крутильные колебания. Для исследования устойчивости используется аналитический метод, который основан на построении положительно определенных функционалов типа Ляпунова для указанных математических моделей.

2. Математические модели

1) Модель изгибно-крутильных колебаний с двумя степенями свободы имеет вид

$$m\ddot{w} + EJw'''' + \left(N(t) + m_*U^2(t)\right)w'' + 2m_*U(t)\dot{w}' + m_*\dot{U}(t)w' + \alpha_2\dot{w}'''' + \alpha_1\dot{w} + \\ + \alpha_0 w + g(w,\dot{w}) - m\sigma\ddot{\theta} = Q, \quad (2.1)$$

$$J_m\ddot{\theta} - GJ_k\theta'' - \beta_2\dot{\theta}'' + \beta_1\dot{\theta} + \beta_0\theta + h(\theta,\dot{\theta}) - m\sigma\ddot{w} = M. \quad (2.2)$$

Здесь $w(x,t)$, $\theta(x,t)$ – поперечная деформация и угол закручивания сечения с координатой x в момент времени t; EJ и GJ_k – изгибная и крутильная жесткости; $J_m = mr^2$ – массовый момент инерции сечения (r – радиус инерции); $m = m_0 + m_*$; m_0, m_* – погонные массы трубопровода и жидкости; $U(t)$ – скорость жидкости в трубопроводе; $N(t)$ – сжимающее (растягивающее) продольное усилие; σ – расстояние от центра тяжести до центра жесткости; α_2, β_2 – коэффициенты демпфирования (в поперечном и тангенциальном направлениях) материала трубопровода; α_1, β_1, α_0, β_0 – коэффициенты демпфирования и жесткости внешней связи; функции $g(w,\dot{w})$ и $h(\theta,\dot{\theta})$ учитывают нелинейные составляющие жесткости (упругости) и демпфирования (трения) внешних связей (например, упрочняющего слоя) в поперечном и тангенциальном направлениях; $Q(w,\dot{w},\theta,\dot{\theta})$ и $M(w,\dot{w},\theta,\dot{\theta})$ – поперечное воздействие и крутящий момент внешних воздействий. Штрих и точка сверху обозначают производные по координате x и времени t соответственно.

2) Модель изгибно-крутильных колебаний, учитывающая нелинейность изгибающего момента и центробежной силы, имеет вид

$$m\ddot{w} + \left[EJw''\left(1 - \frac{3}{2}w'^2\right)\right]'' + m_*U^2(t)w''\left(1 - \frac{3}{2}w'^2\right) + N(t)w'' + 2m_*U(t)\dot{w}' + \\ + m_*\dot{U}(t)w' + \alpha_2\dot{w}'''' + \alpha_1\dot{w} + \alpha_0 w + g(w,\dot{w}) - m\sigma\ddot{\theta} = Q, \quad (2.3)$$

$$J_m\ddot{\theta} - GJ_k\theta'' - \beta_2\dot{\theta}'' + \beta_1\dot{\theta} + \beta_0\theta + h(\theta,\dot{\theta}) - m\sigma\ddot{w} = M. \quad (2.4)$$

3) Модель, учитывающая совместные продольные, поперечные (изгибные) и крутильные деформации, имеет вид

$$-EF\left(u' + \frac{1}{2}w'^2\right)' + m\ddot{u} - \gamma_2\dot{u}'' + \gamma_1\dot{u} + \gamma_0 u + f(u,\dot{u}) = P, \quad (2.5)$$

$$-EF\left[w'\left(u'+\frac{1}{2}w'^2\right)\right]'+m\ddot{w}+EJw''''+\big(N(t)+m_*U^2(t)\big)\,w''+2m_*U(t)\dot{w}'+$$
$$+\;m_*\dot{U}(t)w'+\alpha_2\dot{w}''''+\alpha_1\dot{w}+\alpha_0 w+g(w,\dot{w})-m\sigma\ddot{\theta}=Q, \quad (2.6)$$
$$J_m\ddot{\theta}-GJ_k\theta''-\beta_2\dot{\theta}''+\beta_1\dot{\theta}+\beta_0\theta+h(\theta,\dot{\theta})-m\sigma\ddot{w}=M. \quad (2.7)$$

Здесь $u(x,t)$ – продольная деформация; P – продольное внешнее воздействие; функция $f(u,\dot{u})$ учитывает нелинейную составляющую жесткости и демпфирования внешних связей в продольном направлении; γ_2 – коэффициент демпфирования (в продольном направлении) материала трубопровода; γ_1, γ_0 – коэффициенты демпфирования и жесткости внешней связи.

Функции $f(u,\dot{u})$, $g(w,\dot{w})$, $h(\theta,\dot{\theta})$ можно представить, например, в виде

$$\begin{aligned} f(u,\dot{u})&=\frac{df_0(u)}{du}+\sum_{k=1}^{\infty}f_{2k-1}(u)\dot{u}^{2k-1},\\ g(w,\dot{w})&=\frac{dg_0(w)}{dw}+\sum_{k=1}^{\infty}g_{2k-1}(w)\dot{w}^{2k-1},\\ h(\theta,\dot{\theta})&=\frac{dh_0(\theta)}{d\theta}+\sum_{k=1}^{\infty}h_{2k-1}(\theta)\dot{\theta}^{2k-1},\end{aligned} \quad (2.8)$$

при этом $f_k(u)$, $g_k(w)$, $h_k(\theta)$, $k=0\div\infty$, неотрицательны. В случае, когда зависимости (2.8) определяются экспериментальным путем, вместо рядов можно брать конечные суммы.

3. Исследование динамической устойчивости

Рассмотрим модель изгибно-крутильных колебаний (2.1)–(2.2). Введем в рассмотрение функционал

$$J(w,\theta)\equiv J(t)=\int_0^l\Big[H(\dot{w},\dot{\theta})+EJ(w'')^2+\alpha_0w^2+\beta_0\theta^2+GJ_k(\theta')^2-$$
$$-(N(t)+m_*U^2(t))(w')^2+2g_0(w)+2h_0(\theta)\Big]\,dx, \quad (3.1)$$

где $H(\dot{w},\dot{\theta})=m(\dot{w}^2-2\sigma\dot{w}\dot{\theta}+r^2\dot{\theta}^2)$ – квадратичная форма, являющаяся положительно определенной при $r>\sigma$. Для производной $\dfrac{dJ}{dt}$ этого функционала, согласно (2.1)– (2.2) получим

$$\frac{1}{2}\frac{dJ}{dt}=-\int_0^l\Bigg[\alpha_2(\dot{w}'')^2+\beta_2(\dot{\theta}')^2+\beta_1\dot{\theta}^2+\alpha_1\dot{w}^2+m_*\dot{U}(t)\dot{w}w'+$$
$$+\frac{1}{2}\Big(\dot{N}(t)+2m_*U(t)\dot{U}(t)\Big)(w')^2+\sum_{k=1}^{\infty}g_{2k-1}(w)\dot{w}^{2k}+\sum_{k=1}^{\infty}h_{2k-1}(\theta)\dot{\theta}^{2k}\Bigg]dx-$$
$$-\Big[\;EJ(w'''\dot{w}-w''\dot{w}')+\big(N(t)+m_*U^2(t)\big)\,\dot{w}w'+m_*U(t)\dot{w}^2+$$
$$+\alpha_2(\dot{w}'''\dot{w}-\dot{w}''\dot{w}')-GJ_k\theta'\dot{\theta}-\beta_2\dot{\theta}'\theta\Big]\Big|_0^l+\int_0^l(Q\dot{w}+M\dot{\theta})dx. \quad (3.2)$$

Предположим, что концы трубопровода $x = 0$, $x = l$ закреплены жестко или шарнирно ($w = w' = 0$ или $w = w'' = 0$), при этом на концах $\theta = 0$ или $\theta' = 0$, а внешние воздействия Q, M удовлетворяют условию

$$\int_0^l (M\dot{w} + Q\dot{\theta}) \le 0, \tag{3.3}$$

что имеет место, в частности, для свободных колебаний.

Справедливы неравенства [20]

$$\int_0^l w'^2 dx \le \mu_1 \int_0^l w''^2 dx, \quad \int_0^l w^2 dx \le \mu_2 \int_0^l w'^2 dx, \tag{3.4}$$

где μ_1, μ_2 – некоторые положительные константы.

С учетом принятых предположений и неравенств (3.4), а также учитывая положительность коэффициентов демпфирования и жесткости, согласно (3.2) получим

$$\frac{1}{2}\frac{dJ}{dt} \le -\int_0^l L(\dot{w}, w')dx, \tag{3.5}$$

где $L(\dot{w}, w')$ – квадратичная форма, определяемая выражением

$$L(\dot{w}, w') = \left(\frac{\alpha_2}{\mu_1\mu_2} + \alpha_1\right)\dot{w}^2 + m\dot{U}(t)\dot{w}w' + \frac{1}{2}(\dot{N}(t) + 2m_*U(t)\dot{U}(t))w'^2. \tag{3.6}$$

Если выполняется условие

$$2\left(\frac{\alpha_2}{\mu_1\mu_2} + \alpha_1\right)\left[\dot{N}(t) + 2m_*U(t)\dot{U}(t)\right] \ge m^2\dot{U}^2(t), \tag{3.7}$$

то квадратичная форма $L(\dot{w}, w')$ является положительно определенной, и тогда $\dfrac{dJ}{dt} \le 0$, $J(t) \le J(0)$, откуда с учетом (3.1), (3.4) получим

$$\begin{gathered}\int_0^l \left[H(\dot{w},\dot{\theta}) + \left(\frac{EJ}{\mu_1} - N(t) - m_*U^2(t)\right)w'^2 + GJ_k\theta'^2 + \alpha_0 w^2 + \beta_0\theta^2 + \right.\\ \left. + 2g_0(w) + 2h_0(\theta)\right](x,t)dx \le J(t) \le J(0) = \int_0^l \left[H(\dot{w},\dot{\theta}) + EJw''^2 - \right.\\ \left. -(N + m_*U^2)w'^2 + GJ_k\theta'^2 + \alpha_0 w^2 + \beta_0\theta^2 + 2g_0(w) + 2h_0(\theta)\right](x,0)dx.\end{gathered} \tag{3.8}$$

Из неравенства (3.8) следует

Т е о р е м а 3.1 *Если $r > \sigma$, а также выполнены условия*

$$N + m_*U^2 \le \frac{EJ}{\mu_1}, \quad 2\left(\frac{\alpha_2}{\mu_1\mu_2} + \alpha_1\right)\frac{d}{dt}(N + m_*U^2) \ge m^2\left(\frac{dU}{dt}\right)^2, \tag{3.9}$$

то имеет место динамическая устойчивость изгибно-крутильных колебаний трубопровода.

З а м е ч а н и е 3.1 *Речь идет об устойчивости решений начально-краевых задач (устойчивости по Ляпунову) для функций $w(x,t)$, $\theta(x,t)$ и их производных $\dot{w}(x,t)$, $\dot{\theta}(x,t)$, $w'(x,t)$, $\theta'(x,t)$ (по отношению к возмущениям начальных данных $w(x,0)$, $\theta(x,0)$, $\dot{w}(x,0)$, $\dot{\theta}(x,0)$, $w'(x,0)$, $\theta'(x,0)$, $w''(x,0)$).*

Рассмотрим теперь модель, которая описывается уравнениями (2.5)–(2.7). Рассмотрим функционал

$$S(u,w,\theta) \equiv S(t) = \int\limits_0^l \left[EF\left(u' + \frac{1}{2}w'^2\right)^2 + H(\dot{w},\dot{\theta}) + EJ(w'')^2 + GJ_k(\theta')^2 + \right. \\ + m\dot{u}^2 - (N(t) + m_* U^2(t))w'^2 + \gamma_0 u^2 + \alpha_0 w^2 + \\ \left. + \beta_0\theta^2 + 2f_0(u) + 2g_0(w) + 2h_0(\theta) \right] dx. \quad (3.10)$$

Согласно уравнениям (2.5)–(2.7) имеем

$$\frac{1}{2}\frac{dS}{dt} = -\int\limits_0^l \left[\gamma_2(\dot{u}')^2 + \alpha_2(\dot{w}'')^2 + \beta_2(\dot{\theta}')^2 + \gamma_1\dot{u}^2 + \alpha_1\dot{w}^2 + \beta_1\dot{\theta}^2 + m_*\dot{U}(t)w'\dot{w} + \right. \\ + \frac{1}{2}(N(t) + m_* U^2(t))w'^2 + \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k-1}(u)\dot{u}^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} g_{2k-1}(w)\dot{w}^{2k} + \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} h_{2k-1}(\theta)\dot{\theta}^{2k} \right] dx - \left[EJ(w'''\dot{w} - w''\dot{w}') - EF\left(u' + \frac{1}{2}w'^2\right)(\dot{u} + w'\dot{w}) - \right. \\ - \gamma_2\dot{u}'\dot{u} + \alpha_2(\dot{w}'''\dot{w} - \dot{w}''\dot{w}') - \beta_2\dot{\theta}'\dot{\theta} + (N(t) + m_* U^2(t))w'\dot{w} + \\ \left. m_* U(t)\dot{w}^2 - GJ_k\theta'\dot{\theta} \right]\Bigg|_0^l + \int\limits_0^l (\dot{u}P + \dot{w}Q + \dot{\theta}M)dx. \quad (3.11)$$

Предположим, что

$$\int\limits_0^l (\dot{u}P + \dot{w}Q + \dot{\theta}M)dx \leq 0. \quad (3.12)$$

Тогда при шарнирном или жестком закреплении концов трубопровода, согласно (3.11), запишем

$$\frac{1}{2}\frac{dS}{dt} \leq \int\limits_0^l L(\dot{w}, w')dx, \quad (3.13)$$

откуда при выполнении условия (3.7) найдем

$$\frac{dS}{dt} \leq 0, \quad S(t) \leq S(0).$$

Тогда, учитывая (3.4), получим

$$\int\limits_0^l \left[EF\left(u' + \frac{1}{2}w'^2\right)^2 + m\dot{u}^2 + H(\dot{w},\dot{\theta}) + \left(\frac{EJ}{\mu_1} - N(t) - m_* U^2(t)\right) w'^2 + \right.$$
$$\left. + GJ_k(\theta')^2 + \gamma_0 u^2 + \alpha_0 w^2 + \beta_0 \theta^2 + 2f_0(u) + 2g_0(w) + 2h_0(\theta)\right](x,t)dx \leq$$
$$\leq S(t) \leq S(0) = \int\limits_0^l \left[EF\left(u' + \frac{1}{2}w'^2\right)^2 + m\dot{u}^2 + H(\dot{w},\dot{\theta}) + EJ(w'')^2 + GJ_k(\theta')^2 - \right.$$
$$\left. - (N(t) + m_* U^2(t))w'^2 + \gamma_0 u^2 + \alpha_0 w^2 + \beta_0 \theta^2 + 2f_0(u) + 2g_0(w) + 2h_0(\theta)\right](x,0)dx.$$

Из этого неравенства следует

Т е о р е м а 3.2 *Если выполнены условия (3.9) и $r > \sigma$, то имеет место устойчивость по Ляпунову решений начально-краевых задач для функций $u(x,t)$, $w(x,t)$, $\theta(x,t)$ и их производных $\dot{u}(x,t)$, $\dot{w}(x,t)$, $\dot{\theta}(x,t)$, $u'(x,t)$, $w'(x,t)$, $\theta'(x,t)$ (по отношению к возмущениям начальных данных $u(x,0)$, $w(x,0)$, $\theta(x,0)$), $\dot{u}(x,0)$, $\dot{w}(x,0)$, $\dot{\theta}(x,0)$, $u'(x,0)$, $w'(x,0)$, $\theta'(x,0)$, $w''(x,0)$).*

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Ульяновской области (проекты № 18-41-730015, № 19-41-730006).

Список литературы

1. Феодосьев В. И. О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости // Инж. сб. 1951. Т. 10. С. 169-170.

2. Мовчан А. А. Об одной задаче устойчивости трубы при протекании через нее жидкости // Прикладная математика и механика. 1965. Вып. 4. С. 760-762.

3. Челомей С. В. О динамической устойчивости упругих систем // Докл. АН ССР. Сер. «Механика». 1980. Т. 252, № 2. С. 307-310.

4. Светлицкий В. А. Механика трубопроводов и шлангов: Задачи взаимодействия стержней с потоком жидкости или воздуха. М.: Машиностроение, 1982. 280 с.

5. Васина В. Н. Параметрические колебания участка трубопровода с протекающей жидкостью // Вестник Московского энергетического института. 2007. № 1. С. 1-11.

6. Болотин В.В., Радин В.П., Чирков В.П., Щугорев А.В. Устойчивость участка трубопровода с упругой опорой // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2009. № 1. С. 174–184.

7. Kaya-Cekin E. Y., Aulisa E., Ibragimov A., Seshaiyer P. A stability estimate for fluid structure interaction problem with non-linear beam // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Supplement. 2009. pp. 424–432.

8. Faal R. T., Derakhshan D. Flow-Induced Vibration of Pipeline on Elastic Support // Procedia Engineering. 2011. Vol. 14. pp. 2986–2993.

9. Зефиров С.В., Кочетков А.В., Овчинников В.Ф., Савихин А.О., Смирнов Л.В., Яскеляин А.В. // Численное моделирование динамического деформирования пространственного трубопровода с жидкостью при локальном ударном нагружении // Проблемы прочности и пластичности. 2013. Т. 75, № 2. С. 152–159.

10. Aulisa E., Ibragimov A., Kaya-Cekin E. Y. Fluid structure interaction problem with changing thickness beam and slightly compressible fluid // Discrete and Continuous Dynamical Systems, Ser. S. 2014. Vol. 7, No. 6. pp. 1133–1148. DOI: https://doi.org/10.3934/dcdss.2014.7.1133

11. Moditis K., Paidoussis M., Ratigan J. Dynamics of a partially confined, discharging, cantilever pipe with reverse external flow // Journal of Fluids and Structures. 2016. Vol. 63. pp. 120–139. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2016.03.002

12. Kontzialis K., Moditis K., Paidoussis M. P. Transient simulations of the fluid-structure interaction response of a partially confined pipe under axial flows in opposite directions // Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions of the ASME. 2017. Vol. 139, No. 3. 031303. DOI: https://doi.org/10.1115/1.4034405

13. Giacobbi D. B., Semler C., Paidoussis M. P. Dynamics of pipes conveying fluid of axially varying density // Journal of Sound and Vibration. 2020. Vol. 473. 115202. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115202

14. Abdelbaki A. R., Paidoussis M. P., Misra A. K. A nonlinear model for a hanging cantilevered pipe discharging fluid with a partially-confined external flow // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2020. Vol. 118. 103290. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2019.103290

15. Вельмисов П. А., Васильева А. А., Семенова Е. П. Математическое моделирование динамики упругих элементов при аэрогидродинамическом воздействии // Математическое моделирование физических, экономических, социальных систем и процессов : тр. 7-й Междунар. конф. (Ульяновск, 2–5 февраля 2009 г.). Ульяновск: УлГУ, 2009. С. 68–70.

16. Вельмисов П. А., Манжосов В. К. Математическое моделирование в задачах динамики вброударных и аэроупругих систем. Ульяновск: УлГТУ, 2014. 204 с.

17. Вельмисов П. А., Корнеев А. В. Математическое моделирование в задаче о динамической устойчивости трубопровода // Автоматизация процессов управления. 2015. Т. 39, № 1. С. 63–73. DOI: https://doi.org/10.1016/10.35752/1991-2927-2019-3-57-93-101

18. Вельмисов П. А., Гладун А. В. Об управлении динамикой трубопровода // Журнал Средневолжского математического общества, 2016. Т. 18, № 4. С. 89–97.

19. Анкилов А.В., Вельмисов П. А. Функционалы Ляпунова в некоторых задачах аэрогидроупругости. Ульяновск, 2019. 201 с.

20. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968. 503 с.

Поступила 4.12.2020; доработана после рецензирования 7.01.2021; принята к публикации 10.02.2021

Информация об авторах:

Вельмисов Петр Александрович, заведующий кафедрой высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (430027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), доктор физико-математических наук, профессор, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-7825-7015, velmisov@ulstu.ru

Тамарова Юлия Александровна, соискатель кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (430027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6408-1573, kazakovaua@mail.ru

Покладова Юлия Валерьевна, доцент кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (430027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), кандидат физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9876-4038, pokladovau@inbox.ru

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Original article

MSC2020 35Q35, 35Q74, 74H55

Investigation of the dynamic stability of bending-torsional deformations of the pipeline

P. A. Velmisov, Yu. A. Tamarova, Yu. V. Pokladova

Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russian Federation)

Abstract. Nonlinear mathematical models are proposed that describe the dynamics of a pipeline with a fluid flowing in it: a) the model of bending-torsional vibrations with two degrees of freedom; b) the model describing flexural-torsional vibrations taking into account the nonlinearity of the bending moment and centrifugal force; c) the model that takes into account joint longitudinal, bending (transverse) and torsional vibrations. All proposed models are described by nonlinear partial differential equations for unknown strain functions. To describe the dynamics of a pipeline, the nonlinear theory of a rigid deformable body is used, which takes into account the transverse, tangential and longitudinal deformations of the pipeline. The dynamic stability of bending-torsional and longitudinal-flexural-torsional vibrations of the pipeline is investigated. The definitions of the stability of a deformable body adopted in this work correspond to the Lyapunov concept of stability of dynamical systems. The problem of studying dynamic stability, namely, stability according to initial data, is formulated as follows: at what values of the parameters characterizing the gas-body system, small deviations of the body from the equilibrium position at the initial moment of time will correspond to small deviations and at any moment of time. For the proposed models, positive definite functionals of the Lyapunov type are constructed, on the basis of which the dynamic stability of the pipeline is investigated. Sufficient stability conditions are obtained that impose restrictions on the parameters of a mechanical system.

Key Words: differential equations, pipeline, deformation, dynamics, flexural-torsional vibrations, stability, Lyapunov functionals

For citation: *P. A. Velmisov, Yu. A. Tamarova, Yu. V. Pokladova.* Investigation of the dynamic stability of bending-torsional deformations of the pipeline. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 23:1(2021), 72–81. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202101.72–81

References

1. V. I. Feodosev, "[On vibration and stability of a pipeline containing flowing fluid]", *Inzhenernyy sbornik*, **10** (1951), 169–170 (In Russ.).

2. A. A. Movchan, "[On a problem of stability of a pipe when a fluid flows through it]", *Applied Mathematics and Mechanics*, **4** (1965), 760–762 (In Russ.).

3. S. V. Chelomey, "[On dynamic stability of elastic systems]", *Dokl. of the Academy of Sciences of the SSR. Ser. "Mechanics"*, **252**:2 (1980), 307–310 (In Russ.).

4. V. A. Svetlitsky, *[Mechanics of Piping and Hoses: Problems of the interaction of rods with a fluid or air flow]*, Mashinostroyenie Publ., Moscow, 1982 (In Russ.), 280 p.

5. V. N. Vasina, "[Parametric vibrations of a pipeline section with a flowing liquid]", *Bulletin of the Moscow Power Engineering Institute*, **1** (2007), 1–11 (In Russ.).

6. V. V. Bolotin, V. P. Radin, V. P. Chirkov, A. V. Shchugorev, "[Stability of a pipeline section with elastic support]", *Rigid Body Mechanics*, **1** (2009), 174–184 (In Russ.).

7. E. Y. Kaya-Cekin, E. Aulisa, A. Ibragimov, P. Seshaiyer, "A stability estimate for fluid structure interaction problem with non-linear beam", *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Supplement*, 2009, 424–432.

8. R. T. Faal, D. Derakhshan, "Flow-induced vibration of pipeline on elastic support", *Procedia Engineering*, **14** (2011), 2986–2993.

9. S. V. Zefirov, A. V. Kochetkov, V. F. Ovchinnikov, A. O. Savikhin, L. V. Smirnov, A. V. Yaskelyin, "[Numerical modeling of dynamic deformation of a spatial pipeline with a liquid under local shock loading]", *Problems of Strength and Ductility*, **75**:2 (2013), 152–159 (In Russ.).

10. E. Aulisa, A. Ibragimov, E. Y. Kaya-Cekin, "Fluid structure interaction problem with changing thickness beam and slightly compressible fluid", *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Ser. S.*, **7**:6 (2014), 1133—1148. DOI: https://doi.org/10.3934/dcdss.2014.7.1133

11. K. Moditis, M. P. Paidoussis, J. Ratigan, "Dynamics of a partially confined, discharging, cantilever pipe with reverse external flow", *Journal of Fluids and Structures*, **63** (2016), 120–139. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2016.03.002

12. K. Kontzialis, K. Moditis, M. P. Paidoussis, "Transient simulations of the fluid-structure interaction response of a partially confined pipe under axial flows in opposite directions", *Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions of the ASME*, **139**:3 (2017), 031303. DOI: https://doi.org/10.1115/1.4034405

13. D. B. Giacobbi, C. Semler, M. P. Paidoussis, "Dynamics of pipes conveying fluid of axially varying density", *Journal of Sound and Vibration*, **473** (2020), 115202. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115202

14. A. R. Abdelbaki, M. P. Paidoussis, A. K. Misra, "A nonlinear model for a hanging cantilevered pipe discharging fluid with a partially-confined external flow", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **118** (2020), 103290. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2019.103290

15. P. A. Velmisov, A. A. Vasil'eva, E. P. Semenova, "Matematicheskoye modelirovaniye dinamiki uprugikh elementov pri aerogidrodinamicheskom vozdeystvii [Mathematical modeling of the dynamics of elastic elements under aerohydrodynamic action]", *Mathematical modeling of physical, economic, technical, social systems and processes: Tr. 7 Mezhdunar. conf., Ulyanovsk, February 2-5*, 2009, 68–70 (In Russ.).

16. P. A. Velmisov, V. K. Manzhosov, *Matematicheskoye modelirovaniye v zadachakh dinamiki vibroudarnykh i aerouprugikh sistem [Mathematical modeling in problems of dynamics of vibroimpact and aeroelastic systems]*, UlGTU Publ., Ulyanovsk, 2014 (In Russ.), 204 p.

17. P. A. Velmisov, A. V. Korneev, "Matematicheskoye modelirovaniye v zadache o dinamicheskoy ustoychivosti truboprovoda [Mathematical modeling in the problem of dynamic stability of a pipeline]", *Automation of control processes*, **39**:1 (2015), 63–73 (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.1016/10.35752/1991-2927-2019-3-57-93-101

18. P. A. Velmisov, A. V. Gladun, "Ob upravlenii dinamikoy truboprovoda [On control of pipeline dynamics]", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **18**:4 (2016), 89–97 (In Russ.).

19. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, *Funktsionaly Lyapunova v nekotorykh zadachakh aerogidrouprugosti [Lyapunov functionals in some problems of aerohydroelasticity]*, UlGTU Publ., Ulyanovsk, 2019 (In Russ.), 201 p.

20. L. Collatz, *Zadachi na sobstvennyye znacheniya [Eigenvalue problems]*, Nauka Publ., Moscow, 1968 (In Russ.), 503 p.

Submitted 4.12.2020; Revised 7.01.2021; Accepted 10.02.2021

Information about the authors:

Petr A. Velmisov, Head of the Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 432027, Russia), Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Professor, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7825-7015, velmisov@ulstu.ru

Yuliya A. Tamarova, Postgraduate Student, Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 432027, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6408-1573, kazakovaua@mail.ru

Yuliya V. Pokladova, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 432027, Russia), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9876-4038, pokladovau@inbox.ru

All authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.