

## МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.23.202101.11-27

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.9

## О резонансах при квазипериодических возмущениях систем с двойным предельным циклом, близких к двумерным нелинейным гамильтоновым

О. С. Костромина

ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

**Аннотация.** Изучается воздействие многочастотных квазипериодических возмущений на системы, близкие к двумерным нелинейным гамильтоновым. Предполагается, что соответствующая возмущенная автономная система имеет двойной предельный цикл. Анализ функции Пуанкаре-Понтрягина, построенной для автономной системы, позволяет установить наличие такого цикла. При выполнении условия соизмеримости собственной частоты соответствующей невозмущенной гамильтоновой системы с частотами квазипериодического возмущения невозмущенный уровень становится резонансным. Резонансные структуры существенно зависят от того, совпадают ли выбранные резонансные уровни с уровнями, порождающими предельные циклы в автономной системе. Получена усредненная система, описывающая топологию окрестностей резонансных уровней. Устанавливаются возможные фазовые портреты усредненной системы вблизи бифуркационного случая, когда резонансный уровень совпадает с уровнем, в окрестности которого соответствующая автономная система имеет двойной предельный цикл. Для иллюстрации полученных результатов приводятся результаты теоретического исследования и численного счета для конкретного уравнения маятникового типа с двухчастотными квазипериодическими по времени возмущениями.

**Ключевые слова:** двойной предельный цикл, квазипериодические возмущения, резонансы, усредненные системы, уравнения маятникового типа

**Для цитирования:** Костромина О. С. О резонансах при квазипериодических возмущениях систем с двойным предельным циклом, близких к двумерным нелинейным гамильтоновым // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 1. С. 11–27. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202101.11-27>

### 1. Введение

Будем рассматривать системы вида

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} + \varepsilon g(x, y, \theta_1, \dots, \theta_p), \\ \dot{y} = -\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} + \varepsilon f(x, y, \theta_1, \dots, \theta_p), \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $\varepsilon > 0$  – малый параметр;  $\theta_i = \omega_i t$ ,  $i = \overline{1, p}$ : функции  $H$ ,  $g$  и  $f$  – достаточно гладкие и равномерно ограниченные по переменным  $x$  и  $y$  вместе с частными производными



до второго порядка включительно в некоторой области  $D \subset \mathbb{R}^2$  (или  $D \subset \mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^1$ ); функции  $g$  и  $f$  – непрерывные и квазипериодические по  $t$  равномерно относительно  $(x, y) \in D$  с несоизмеримыми над полем рациональных чисел частотами  $\omega_i, i = \overline{1, p}$ .

Предполагается, что соответствующая невозмущенная система ( $\varepsilon = 0$ ) является нелинейной гамильтоновой с гамильтонианом  $H$  и имеет ячейку  $D_0 \subset D$ , заполненную замкнутыми фазовыми кривыми  $H(x, y) = h, h \in [h_{min}, h_{max}]$  и не содержащую малых окрестностей состояний равновесия и сепаратрис. Также предполагается неконсервативность исходной системы (1.1), что эквивалентно выполнению условия:  $g'_x + f'_y \neq 0$ .

Проблемы существования квазипериодических и почти периодических решений, а также сложной динамики в системах вида (1.1), изучались в ряде работ [1–8]. В работах [1–2] рассматривался вопрос о существовании квазипериодических и почти периодических решений уравнения Дуффинга. Вопросам существования сложной динамики для уравнения маятникового типа и уравнения Дуффинга при квазипериодических возмущениях посвящены работы [3–8].

Наряду с системой (1.1) будем рассматривать соответствующую ей автономную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} + \varepsilon g_0(x, y), \\ \dot{y} = -\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} + \varepsilon f_0(x, y), \end{cases} \quad (1.2)$$

где

$$g_0(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} g(x, y, \theta_1, \dots, \theta_p) d\theta_1 \dots d\theta_p,$$

$$f_0(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} f(x, y, \theta_1, \dots, \theta_p) d\theta_1 \dots d\theta_p.$$

Перейдем в  $D_0$  от переменных  $x, y$  к переменным «действие  $I$  – угол  $\theta$ » по формулам

$$I(h) = \frac{1}{2\pi} \oint_{M_h} y(x, h) dx, \quad \theta = \frac{\partial S(x, I)}{\partial I}, \quad S = \int_{x_0}^x y(x, h(I)) dx, \quad (1.3)$$

где  $M_h = \{(x, y) : H(x, y) = h\}$ ;  $S(x, I)$  – производящая функция данного канонического преобразования. Преобразование (1.3) можно записать в виде

$$x = X(I, \theta), \quad y = Y(I, \theta),$$

где  $X, Y$  – периодические по  $\theta$  с периодом  $2\pi$  функции. В результате система (1.1) в новых переменных запишется в виде

$$\begin{cases} \dot{I} = \varepsilon F_1(I, \theta, \theta_1, \dots, \theta_p), \\ \dot{\theta} = \omega(I) + \varepsilon G_1(I, \theta, \theta_1, \dots, \theta_p), \\ \dot{\theta}_i = \omega_i, \quad i = \overline{1, p}, \end{cases} \quad (1.4)$$

где

$$F_1(I, \theta, \theta_1, \dots, \theta_p) \equiv f(X, Y, \theta_1, \dots, \theta_p) X'_\theta - g(X, Y, \theta_1, \dots, \theta_p) Y'_\theta,$$

$$G_1(I, \theta, \theta_1, \dots, \theta_p) \equiv -f(X, Y, \theta_1, \dots, \theta_p)X'_I + g(X, Y, \theta_1, \dots, \theta_p)Y'_I.$$

Предполагается, что собственная частота  $\omega(I)$  невозмущенной системы является монотонной функцией и не обращается в нуль на интервале  $(I_{min}, I_{max}) \equiv (I(h_{min}), I(h_{max}))$ . Функции  $F_1$  и  $G_1$  – достаточно гладкие по переменным  $I, \theta, \theta_i, i = \overline{1, p}$  в области  $[I_{min}, I_{max}] \times \mathbb{T}^{p+1}$ , где  $\mathbb{T}^{p+1}$  –  $(p+1)$ -мерный тор.

Говорят, что в системе (1.4) имеет место *резонанс*, если выполняется условие:

$$n\omega(I) = \sum_{i=1}^p m_i \omega_i, \quad (1.5)$$

где  $n, m_i, i = \overline{1, p}$  – взаимно простые натуральные числа. Вещественные решения  $I$  этого уравнения на отрезке  $[I_{min}, I_{max}]$  будем обозначать  $I_{nm}$ ,  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_p)$ . Тогда уровни  $I = I_{nm}$  (замкнутые фазовые кривые  $H(x, y) = h_{nm}$  невозмущенной системы) будем называть *резонансными уровнями*. Окрестность  $U_\mu = \{(I, \theta) : I_{nm} - C\mu < I < I_{nm} + C\mu, 0 \leq \theta < 2\pi, C = \text{const} > 0\}$ ,  $\mu = \sqrt{\varepsilon}$  индивидуального резонансного уровня  $I = I_{nm}$  будем называть *резонансной зоной*.

Система (1.2) в новых переменных запишется в виде

$$\begin{cases} \dot{I} = \varepsilon F_2(I, \theta), \\ \dot{\theta} = \omega(I) + \varepsilon G_2(I, \theta), \end{cases} \quad (1.6)$$

где  $F_2(I, \theta) \equiv f_0(X, Y)X'_\theta - g_0(X, Y)Y'_\theta$ ,  $G_2(I, \theta) \equiv -f_0(X, Y)X'_I + g_0(X, Y)Y'_I$ . Функции  $F_2$  и  $G_2$  по определению являются периодическими по  $\theta$  с периодом  $2\pi$ . Усредняя систему (1.6) по  $\theta$ , получим одномерную систему

$$\dot{u} = \varepsilon B_0(u), \quad (1.7)$$

где

$$B_0(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f_0(X, Y)X'_\theta - g_0(X, Y)Y'_\theta] d\theta, \quad u = I + O(\varepsilon).$$

Как известно, простому состоянию равновесия  $u_0$  ( $B(u_0) = 0$ ,  $B'(u_0) \neq 0$ ) усредненной системы (1.7) отвечает грубый предельный цикл в системе (1.2). Причем предельный цикл будет устойчивым, если  $B'(u_0) < 0$ , и неустойчивым в противном случае. Функцию  $B_0(u)$  называют *порождающей функцией Пуанкаре-Понтрягина*.

Задачам о воздействии малых неконсервативных квазипериодических возмущений на системы с грубыми предельными циклами, близкие к произвольным нелинейным двумерным гамильтоновым, посвящены работы [9–12]. Кратко перечислим основные результаты указанных работ, полученные на основе методов исследования систем с периодическим возмущением [13]: описаны структуры невырожденных резонансных зон, найдены условия существования в них квазипериодических решений, решена задача синхронизации квазипериодических колебаний, установлено глобальное поведение решений. В качестве примеров, демонстрирующих полученные теоретические результаты, рассматривались уравнения типа Дуффинга.

В данной статье будем рассматривать случай, когда автономная система имеет двойной предельный цикл. Прежде всего, обозначим

$$B_1(u_0) \equiv B'_0(u_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (g'_{0x} + f'_{0y}) \Big|_{\substack{x=X(u_0, \theta) \\ y=Y(u_0, \theta)}} d\theta.$$

Двукратный корень  $u = u_*$  уравнения  $B_0(u) = 0$  ( $B_1(u_*) = 0$ ,  $B'_1(u_*) \neq 0$ ) определяет невозмущенный уровень  $I = I_*$  (замкнутую фазовую кривую  $h = h_*$  невозмущенной системы), от которого под действием возмущения родится двойной предельный цикл.

Под действием неавтономного квазипериодического возмущения резонансный уровень может совпасть с уровнем невозмущенной системы, порождающим двойной предельный цикл в автономной системе. Изучим поведение решений системы (1.4) вблизи такого бифуркационного случая. Такая задача, помимо чисто математического интереса, имеет важное значение для теории бифуркаций динамических систем, а также теории синхронизации колебаний. Воздействие периодических по времени возмущений на систему с двойным предельным циклом, близкую к двумерной нелинейной гамильтоновой, было изучено в работе [14]. Настоящее исследование следует работам [9–10], [14].

## 2. Усредненная система в окрестности индивидуального резонансного уровня

Делая в системе (1.4) замену

$$I = I_{nm} + \mu u, \quad \theta = v + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p m_i \omega_i$$

и усредняя полученную систему по  $\theta_1, \dots, \theta_p$ , приходим к двумерной системе

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = A(v; I_{nm}) + \mu P_0(v; I_{nm})u + \mu^2 P_1(v; I_{nm})u^2 + O(\mu^3), \\ \frac{dv}{d\tau} = b_1 u + \mu(b_2 u^2 + Q_0(v; I_{nm})) + \mu^2(b_3 u^3 + Q_1(v; I_{nm})u) + O(\mu^3), \end{cases} \quad (2.1)$$

где

$$A(v; I_{nm}) = \frac{1}{(2\pi n)^p} \int_0^{2\pi n} \dots \int_0^{2\pi n} F_1 \left( I_{nm}, v + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p m_i \omega_i, \theta_1, \dots, \theta_p \right) d\theta_1 \dots d\theta_p, \quad (2.2)$$

$$P_0(v; I_{nm}) = \frac{1}{(2\pi n)^p} \int_0^{2\pi n} \dots \int_0^{2\pi n} \frac{\partial}{\partial I} F_1 \left( I_{nm}, v + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p m_i \omega_i, \theta_1, \dots, \theta_p \right) d\theta_1 \dots d\theta_p, \quad (2.3)$$

$$P_1(v; I_{nm}) = \frac{1}{2(2\pi n)^p} \int_0^{2\pi n} \dots \int_0^{2\pi n} \frac{\partial^2}{\partial I^2} F_1 \left( I_{nm}, v + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p m_i \omega_i, \theta_1, \dots, \theta_p \right) d\theta_1 \dots d\theta_p, \quad (2.4)$$

$$Q_0(v; I_{nm}) = \frac{1}{(2\pi n)^p} \int_0^{2\pi n} \dots \int_0^{2\pi n} G_1 \left( I_{nm}, v + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p m_i \omega_i, \theta_1, \dots, \theta_p \right) d\theta_1 \dots d\theta_p, \quad (2.5)$$

$$Q_1(v; I_{nm}) = \frac{1}{(2\pi n)^p} \int_0^{2\pi n} \dots \int_0^{2\pi n} \frac{\partial}{\partial I} G_1 \left( I_{nm}, v + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p m_i \omega_i, \theta_1, \dots, \theta_p \right) d\theta_1 \dots d\theta_p, \quad (2.6)$$

$$b_1 = \frac{d\omega(I_{nm})}{dI}, \quad b_2 = \frac{d^2\omega(I_{nm})}{2dI^2}, \quad b_3 = \frac{d^3\omega(I_{nm})}{6dI^3}, \quad \tau = \mu t.$$

Функции (2.2)–(2.6) являются периодическими по  $v$  с наименьшим периодом  $2\pi/n$  [9–10]. Поэтому фазовое пространство усредненной в окрестности индивидуального резонансного уровня  $I = I_{nm}$  системы (2.1) – цилиндр  $\{v(\text{mod}(2\pi/n)), u\}$ .

Функции (2.2)–(2.4) могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} A(v; I_{nm}) &= \tilde{A}(v; I_{nm}) + B_0(I_{nm}), \quad B_0(I_{nm}) = \langle A(v; I_{nm}) \rangle_v, \\ P_0(v; I_{nm}) &= \tilde{P}_0(v; I_{nm}) + B_1(I_{nm}), \quad B_1(I_{nm}) = \langle P_0(v; I_{nm}) \rangle_v, \\ P_1(v; I_{nm}) &= \tilde{P}_1(v; I_{nm}) + B_2(I_{nm}), \quad B_2(I_{nm}) = \langle P_1(v; I_{nm}) \rangle_v. \end{aligned}$$

Заметим, что  $B_2(I_{nm}) = B_0''(I_{nm})/2$ .

Используя приведенные представления для функций (2.2)–(2.4), пренебрегая членами  $O(\mu^3)$  и делая замену  $u \rightarrow u - \mu Q_0(v; I_{nm})/b_1$  в системе (2.1), получим систему

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = \tilde{A}(v; I_{nm}) + B_0(I_{nm}) + \mu\sigma(v; I_{nm})u + \mu^2 \left[ \left( \tilde{P}_1(v; I_{nm}) + \right. \right. \\ \left. \left. + B_2(I_{nm}) + \frac{b_2}{b_1} \frac{dQ_0(v; I_{nm})}{dv} \right) u^2 - \tilde{P}_0(v; I_{nm}) \frac{Q_0(v; I_{nm})}{b_1} \right], \\ \frac{dv}{d\tau} = b_1 u + \mu b_2 u^2 + \mu^2 \left[ b_3 u^3 + \left( Q_1(v; I_{nm}) - 2 \frac{b_2}{b_1} Q_0(v; I_{nm}) \right) u \right], \end{cases} \quad (2.7)$$

где  $\sigma(v; I_{nm}) = \tilde{\sigma}(v; I_{nm}) + B_1(I_{nm})$ ;  $\tilde{\sigma}(v; I_{nm}) = \tilde{P}_0(v; I_{nm}) + dQ_0(v; I_{nm})/dv$ ;  $B_1(I_{nm}) = \langle \sigma(v; I_{nm}) \rangle_v$ . Система (2.7) определяет топологию индивидуальных резонансных зон с точностью до членов порядка  $\mu^3$ . Согласно [9], простому устойчивому (неустойчивому) состоянию равновесия такой системы соответствует  $p$ -мерный устойчивый (неустойчивый) инвариантный тор в системе (1.4), или устойчивое (неустойчивое) квазипериодическое резонансное решение с периодами  $\frac{2\pi n}{\omega_1}, \dots, \frac{2\pi n}{\omega_p}$  в системе (1.1). Грубому устойчивому (неустойчивому) предельному циклу усредненной системы с частотой  $\omega_0$  соответствует  $(p+1)$ -мерный устойчивый (неустойчивый) инвариантный тор в системе (1.4), или устойчивое (неустойчивое) квазипериодическое резонансное решение с периодами  $\frac{2\pi}{\omega_0}, \frac{2\pi n}{\omega_1}, \dots, \frac{2\pi n}{\omega_p}$  в системе (1.1).

Важную роль в изучении структуры окрестности резонансных уровней  $I_{nm}$  играет функция  $\sigma(v; I_{nm})$ . В первую очередь необходимо знать, является ли она знакопостоянной или зависит от  $v$  [13]. В данной статье мы будем рассматривать случай знакопостоянной функции  $\sigma$ , поэтому  $\tilde{\sigma} \equiv 0$  и  $\sigma(v; I_{nm}) = B_1(I_{nm})$ .

### 3. Поведение решений усредненной системы

Пусть  $B_0(I_{nm}) = B_1(I_{nm}) = 0$ . Система (2.7) без учета консервативного члена  $2\mu \frac{b_2}{b_1} \tilde{A}(v; I_{nm})\dot{v}$  преобразуется к виду

$$\ddot{v} - b_1 \tilde{A}(v; I_{nm}) = \mu^2 \left[ \frac{M(v; I_{nm}) + B_2(I_{nm})}{b_1} \dot{v}^2 + N(v; I_{nm}) \right], \quad (3.1)$$

где

$$M(v; I_{nm}) = \tilde{P}_1(v; I_{nm}) + Q_{1v}'(v; I_{nm}) + \frac{b_2}{b_1} \tilde{P}_0(v; I_{nm}) + 3 \frac{b_3}{b_1} \tilde{A}(v; I_{nm}),$$

$$N(v; I_{nm}) = -\tilde{P}_0(v; I_{nm})Q_0(v; I_{nm}) + \left( Q_1(v; I_{nm}) - 2\frac{b_2}{b_1}Q_0(v; I_{nm}) \right) \tilde{A}(v; I_{nm}).$$

Перепишем уравнение (3.1) в виде системы

$$\begin{cases} \dot{u} = \tilde{A}(v; I_{nm}) + \mu^2 \left[ (M(v; I_{nm}) + B_2(I_{nm}))u^2 + \frac{N(v; I_{nm})}{b_1} \right], \\ \dot{v} = b_1 u. \end{cases} \quad (3.2)$$

Система (3.2) инвариантна относительно замены  $u \rightarrow -u, \tau \rightarrow -\tau$ , поэтому фазовый портрет уравнения (3.1) симметричен относительно оси  $u$ . Фазовое пространство системы (3.2) – цилиндр  $\{v(\text{mod}(2\pi/n)), u\}$ . Система (3.2) близка к гамильтоновой с гамильтонианом  $\tilde{H}(v, u) = b_1 u^2/2 - V(v)$ ,  $V(v) = \int \tilde{A}(v; I_{nm}) dv$ . Система (3.2) при  $\mu = 0$  имеет простые состояния равновесия  $(v_0, 0)$  двух типов: центр, если  $b_1 \tilde{A}'_v(v_0) < 0$ , и седло, если  $b_1 \tilde{A}'_v(v_0) > 0$ . Установим взаимное расположение сепаратрис седла  $(v_0, 0)$  невозмущенной системы под действием возмущения. Воспользуемся формулой Мельникова [15]:  $\Delta_\mu = \mu^2 \Delta_1 + O(\mu^3)$ , которая определяет (с точностью до членов порядка  $\mu^3$ ) расстояние между возмущенными сепаратрисами. Сделаем в системе (3.2) замену  $v = w + v_0$ , перемещая состояние равновесия  $(v_0, 0)$  типа седло невозмущенной системы в начало координат. Применяя к полученной системе формулу Мельникова, находим

$$\Delta_1 = \frac{1}{b_1} \int_{-\infty}^{\infty} [M(w + v_0) b_1^2 u^2 + N(w + v_0)] \frac{dw}{d\tau} d\tau, \quad (3.3)$$

где  $w(\tau)$ ,  $u(\tau)$  – решение невозмущенной системы на сепаратрисе. Из интеграла невозмущенной системы находим

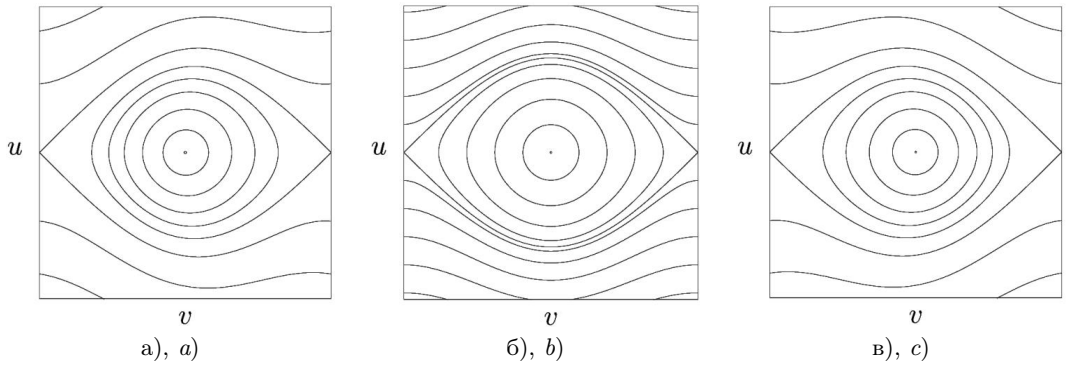
$$u = \pm \sqrt{\frac{2}{b_1} (V(w, v_0) - V(0, v_0))}, \quad V(w, v_0) = \int \tilde{A}(w + v_0) dw. \quad (3.4)$$

Подставляя (3.4) в (3.3), получим

$$\Delta_1 = \frac{1}{b_1} \int_0^{2\pi/n} [2b_1 M(w + v_0) (V(w, v_0) - V(0, v_0)) + N(w + v_0)] dw.$$

Возможны два случая:  $\Delta_1 = 0$  и  $\Delta_1 \neq 0$ . В первом случае на фазовом цилиндре имеем две сепаратрисные петли к седлу (на верхнем и нижнем полуцилиндрах); во втором – сепаратрисы расщеплены, и расстояние между ними зависит от соотношения между амплитудой функции  $M(v; I_{nm})$  и величиной  $|B_2(I_{nm})|$ . Возможные фазовые портреты системы (3.2) на фазовом цилиндре  $\{v(\text{mod}(2\pi/n)), u\}$  показаны на Рис. 3.1.

Резонансные уровни  $I = I_{nm}$ , в окрестностях  $U_\mu$  которых имеются области, для начальных условий из которых фазовая точка остается в  $U_\mu$  при всех  $t \rightarrow +\infty$  или  $t \rightarrow -\infty$ , а также области, для начальных условий из которых фазовая точка за конечное время покидает  $U_\mu$ , будем называть *частично проходимыми*. Структура частично проходимой резонансной зоны представлена на Рис. 3.1, а-в. Резонансные уровни  $I = I_{nm}$  будем называть *непроходимыми*, если для любых начальных условий из  $U_\mu$  фазовая точка остается в  $U_\mu$  при всех  $t \rightarrow +\infty$  или  $t \rightarrow -\infty$ . Такой случай иллюстрирует Рис. 3.1, б.

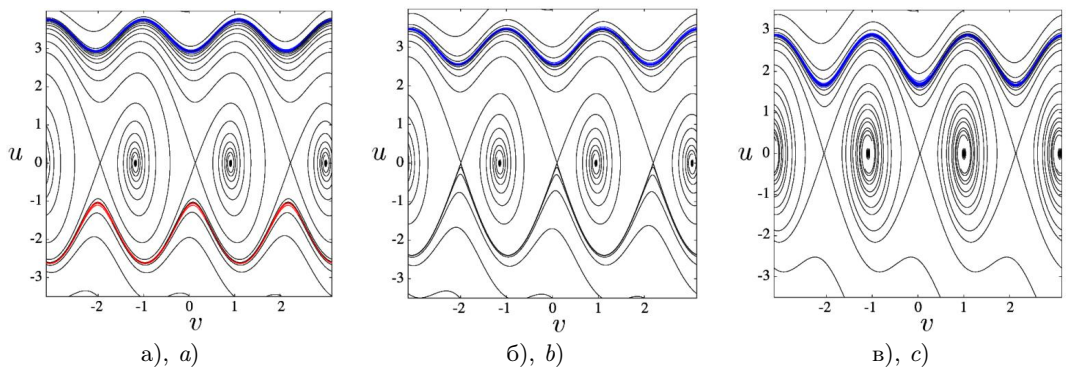


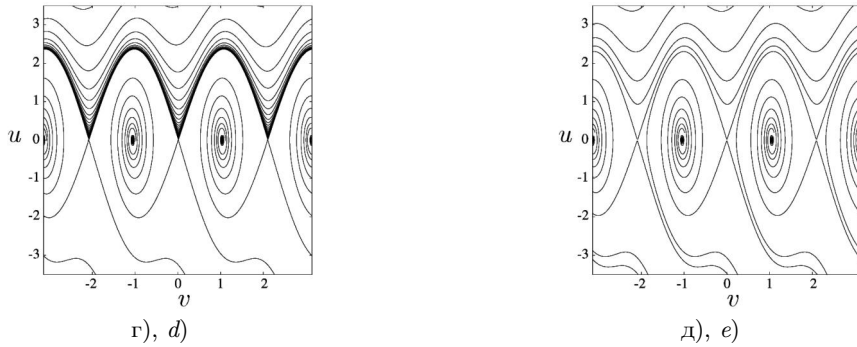
**Рис. 3.1.** Возможные фазовые портреты системы (3.2)  
**Fig 3.1.** Possible phase portraits of system (3.2)

Положим  $B_0(I_{nm}) = \mu\gamma_1$ ,  $B_1(I_{nm}) = \mu\gamma_2$ . На Рис. 3.2 показаны возможные фазовые портреты системы (2.7) на фазовом цилиндре  $\{v(\text{mod}(2\pi)), u\}$  при  $n = 3$  и различных значениях параметров  $\gamma_1 \neq 0$ ,  $\gamma_2 \neq 0$  для случая знакопостоянной функции  $\sigma \neq 0$ . Вместо центров на фазовом цилиндре системы (2.7) будут фокусы, существует также асимметрия в формировании предельных циклов разной устойчивости (показаны разным цветом) на верхнем и нижнем фазовых полуцилиндрах. Бифуркационный случай, когда предельный цикл на нижнем/верхнем полуцилиндре усредненной системы (2.7) влипают в сепаратрисный контур, показан на Рис. 3.2 б, г.

Случай непроходимого резонанса (синхронизации колебаний) показан на Рис. 3.2 в. Рисунки 3.2,а, д иллюстрируют структуру частично проходимых резонансных зон.

В работе [14] явление синхронизации колебаний было названо ограниченным: в связи с возможностью существования предельного цикла в области вращательного движения маятника не все фазовые точки в резонансной зоне стремятся к устойчивому режиму, которому соответствует устойчивое состояние равновесия усредненной системы (см. Рис. 3.2 в).





**Рис. 3.2.** Возможные фазовые портреты системы (2.7) при  $n = 3$  для случая знакопостоянной функции  $\sigma \neq 0$ , определяющие структуру окрестности частично проходимого (а, д) и непроходимого (в) резонансных уровней  $I = I_{3m}$ , а также бифуркационный случай перехода от частично проходимого резонанса к непроходимому (б, г).

**Fig 3.2.** Possible phase portraits of system (2.7) at  $n = 3$  for the case of a constant sign function  $\sigma \neq 0$ , determining the structure of the neighborhood of partially passable (a, e) and impassable (c) resonance levels  $I = I_{3m}$ , as well as the bifurcation case of transition from a partially passable resonance to an impassable one (b, d).

### 4. Пример

В качестве примера рассмотрим уравнение маятникового типа при квазипериодическом возмущении вида

$$\ddot{x} + \sin x = \varepsilon[(-1 + p_1 \dot{x} + p_2 \cos 3x)\dot{x} + p_3 \alpha(t)], \tag{4.1}$$

эквивалентное системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\sin x + \varepsilon[(-1 + p_1 y + p_2 \cos 3x)y + p_3 \alpha(t)], \end{cases} \tag{4.2}$$

где  $p_1, p_2, p_3 > 0$  – параметры;  $\varepsilon$  – малый положительный параметр;  $\alpha(t) = \cos \omega_1 t \sin \omega_2 t$ ;  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – несоизмеримые частоты. Уравнение вида (4.1) было изучено в работе [16] в случае, когда  $\alpha(t)$  – периодическая функция.

Невозмущенная система ( $\varepsilon = 0$ ) является гамильтоновой системой с гамильтонианом  $H(x, y) = y^2/2 - \cos x \geq -1$ . На фазовом цилиндре  $\{x(mod(2\pi)), y\}$  она имеет два состояния равновесия: центр  $(0, 0)$  и седло  $(\pi, 0) \equiv (-\pi, 0)$ . Совокупность фазовых кривых, определяемых интегралом энергии  $H(x, y) = h \in (-1, 1)$ , не охватывающих фазовый цилиндр, формирует область  $G_1$  колебательных движений маятника. Совокупность фазовых кривых, определяемых интегралом энергии  $H(x, y) = h > 1$ , охватывающих фазовый цилиндр, формирует две области  $G_2^+$  (при  $y > 0$ ) и  $G_2^-$  (при  $y < 0$ ) вращательных движений маятника.

Рассмотрим область  $G_2^+$ . В этой области решение невозмущенной системы имеет вид

$$\begin{aligned} x(k, \theta) &= 2\text{am}(\mathbf{K}\theta/\pi, k), & y(k, \theta) &= 2/k\text{dn}(\mathbf{K}\theta/\pi, k), \\ k^2 &= 2/(1 + h), & \omega(k) &= \pi/(k\mathbf{K}) \in (0, +\infty), \end{aligned} \tag{4.3}$$



где  $\omega$  – частота движения на замкнутых фазовых кривых (собственная частота),  $\theta = \omega t \in [0, 2\pi]$ ;  $\mathbf{K}(k)$  – полный эллиптический интеграл первого рода,  $k$  – его модуль;  $\text{am}(z, k)$  – амплитуда Якоби,  $\text{dn}(z, k)$  – дельта-амплитуда Якоби. Согласно [16], порождающая функция Пуанкаре-Понтрягина  $B_0$  для системы (4.2) при  $p_3 = 0$  в рассматриваемой области имеет вид

$$B_0 = B_0(k(h)) = \frac{4}{105\pi k^7} \{2(1 - k^2)(-27k^4 + 128k^2 - 128)p_2\mathbf{K} + (-105k^6 + (2 - k^2)(3k^4 - 128k^2 + 128)p_2)\mathbf{E} + \frac{105\pi p_1}{2}(2 - k^2)k^5\}, \tag{4.4}$$

$$B_1 = \frac{dB_0}{dI} = -1 + \frac{2p_1\pi}{k\mathbf{K}} + p_2 \frac{(15k^6 - 158k^4 + 384k^2 - 256)\mathbf{K} + (46k^4 - 256k^2 + 256)\mathbf{E}}{15k^6\mathbf{K}}, \tag{4.5}$$

где  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(k)$  – полный эллиптический интеграл второго рода,  $k$  – его модуль. Анализ функций (4.4) – (4.5), проведенный в работе [16], позволил получить линию двойного цикла в  $G_2^+$  на плоскости параметров  $(p_2, p_1)$ .

Обозначим через  $k_*$  значение переменной  $k$ , при котором функция (4.4) имеет двукратный нуль, а через  $k_{311}$  – значение переменной  $k$ , удовлетворяющее резонансному условию  $n\omega(k) = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$  при  $n = 3$ ,  $m_1 = 1$  и  $m_2 = 1$ , выбирая  $\omega_1 = \sqrt{5}$ ,  $\omega_2 = \sqrt{7}$ . Решая систему

$$\begin{cases} B_0(k; p_1, p_2) = 0, \\ B_1(k; p_1, p_2) = 0, \\ 3\omega(k) = \sqrt{5} + \sqrt{7}, \end{cases}$$

где  $\omega(k)$  определяется из (4.3), находим  $k = k_{311} = k_* \approx 0.878527$ ,  $p_1 \approx 0.487182$ ,  $p_2 \approx 41.385972$ . График порождающей функции Пуанкаре-Понтрягина (4.4) при найденных значениях параметров  $p_1, p_2$  показан на Рис. 4.1, а. На Рис. 4.1, б представлен график функции  $\omega(k)$  и резонансное значение 3-1-1 при выбранных  $\omega_1, \omega_2$ .

Усредненная система (2.7) в таком случае имеет вид

$$\begin{cases} \dot{u} = p_3 \widetilde{A}_1 \sin 3v + \mu\gamma_1 + \mu^2 \left[ \left( p_3 \left( \widetilde{P}_{11} - \frac{3b_2}{b_1} Q_{01} \right) \sin 3v + B_2 \right) u^2 + \right. \\ \left. + \gamma_2 u - \frac{1}{b_1} p_3^2 \widetilde{P}_{01} Q_{01} \sin 3v \cos 3v \right], \\ \dot{v} = b_1 u + \mu b_2 u^2 + \mu^2 \left[ b_3 u^3 + p_3 \left( Q_{11} - \frac{2b_2}{b_1} Q_{01} \right) u \cos 3v \right], \end{cases} \tag{4.6}$$

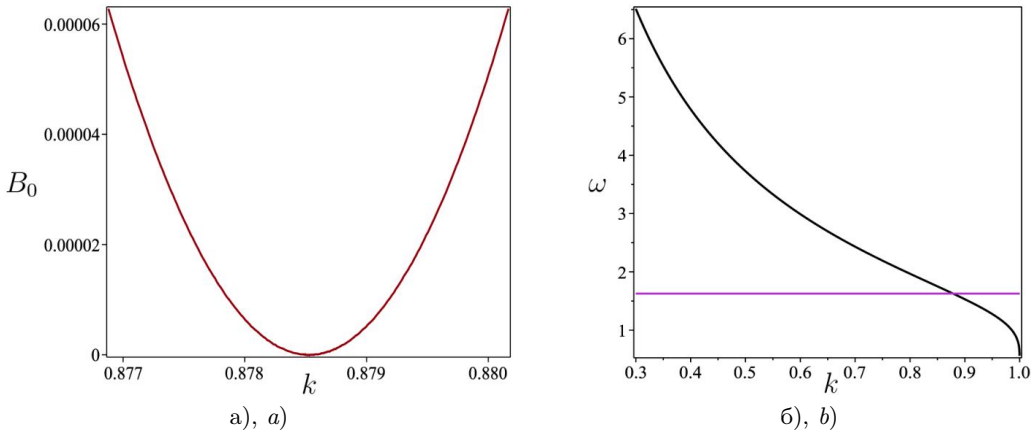
где

$$\widetilde{A}_1 = -\frac{a^3}{1 + a^6}, a = \exp \left( -\pi \frac{\mathbf{K}(\sqrt{1 - k^2})}{\mathbf{K}(k)} \right),$$

$$\widetilde{P}_{01} = \frac{\pi^3 k}{8(1 - k^2)\mathbf{K}^3} \frac{3a^3(1 - a^6)}{(1 + a^6)^2},$$

$$\widetilde{P}_{11} = \frac{\pi^4 k^2}{128(1 - k^2)^2 \mathbf{K}^6} \frac{3a^3}{(1 + a^6)^3} (2(2(k^2 - 2)\mathbf{K} + 3\mathbf{E})\mathbf{K}(1 - a^{12}) - 3\pi^2(a^{12} - 6a^6 + 1)),$$

$$Q_{01} = \frac{\widetilde{P}_{01}}{3}, Q_{11} = \frac{2\widetilde{P}_{11}}{3},$$



**Рис. 4.1.** а) График порождающей функции Пуанкаре-Понтрягина (4.4) при  $p_1 = 0.487182, p_2 = 41.385972$ ; б) График зависимости собственной частоты  $\omega$  от  $k$  и резонансное значение 3-1-1 при  $\omega_1 = \sqrt{5}, \omega_2 = \sqrt{7}$

**Fig 4.1.** a) Graph of the Poincaré-Pontryagin generating function (4.4) at  $p_1 = 0.487182, p_2 = 41.385972$ ; b) Graph of the dependence of the natural frequency  $\omega$  on  $k$  and the resonance value 3-1-1 at  $\omega_1 = \sqrt{5}, \omega_2 = \sqrt{7}$

$$B_2 = \frac{\pi}{60k^5(1-k^2)\mathbf{K}^3} [p_2 ((135k^4 - 640k^2 + 640)(k^2 - 1)\mathbf{K}^2 + 256(k^2 - 1)(k^2 - 2)\mathbf{KE} + (23k^4 - 128k^2 + 128)\mathbf{E}^2) + 15p_1\pi k^5\mathbf{E}],$$

$$b_1 = \frac{\pi^2}{4} \frac{\mathbf{E}}{(1-k^2)\mathbf{K}^3}, \quad b_2 = \frac{\pi^3 k}{32} \frac{(1-k^2)\mathbf{K}^2 - 2(2-k^2)\mathbf{KE} + 3\mathbf{E}^2}{(1-k^2)^2\mathbf{K}^5},$$

$$b_3 = \frac{\pi^4 k^2}{384} \frac{(-4k^4 + 12k^2 - 8)\mathbf{K}^3 + (8k^4 - 33k^2 + 33)\mathbf{K}^2\mathbf{E} + 20(k^2 - 2)\mathbf{KE}^2 + 15\mathbf{E}^3}{(1-k^2)^3\mathbf{K}^7}.$$

Здесь  $k = k_{311} = k_*$ .

Исследуем поведение решений системы (4.6). Рассмотрим невозмущенную ( $\mu = 0$ ) систему

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = p_3 \tilde{A}_1 \sin 3v, \\ \frac{dv}{d\tau} = b_1 u. \end{cases} \tag{4.7}$$

Система (4.7) является гамильтоновой с гамильтонианом  $\tilde{H}(v, u) = b_1 \frac{u^2}{2} + \frac{p_3 \tilde{A}_1}{3} \cos 3v$ . Поведение решений данной системы достаточно изучить на цилиндре  $\{v \bmod(2\pi/3), u\}$ . На этом цилиндре система имеет два состояния равновесия: центр  $(0, 0)$  и седло  $(\frac{\pi}{3}, 0) \equiv (-\frac{\pi}{3}, 0)$ . Фазовые кривые системы (4.7) определяются уравнением  $b_1 \frac{u^2}{2} + \frac{p_3 \tilde{A}_1}{3} \cos 3v = \tilde{h}$ , при этом колебательному движению соответствует  $\tilde{h} \in \left( \frac{p_3 \tilde{A}_1}{3}, -\frac{p_3 \tilde{A}_1}{3} \right)$ , вращательному движению  $-\tilde{h} > -\frac{p_3 \tilde{A}_1}{3}$ . Движению по сепаратрисе, раз-

деляющей области колебательных и вращательных движений, отвечает  $\tilde{h} = -\frac{p_3 \tilde{A}_1}{3}$ .

Решения системы (4.7) имеют вид

$$\begin{aligned} u(\vartheta) &= 2\tilde{k} \sqrt{-\frac{p_3 \tilde{A}_1}{3b_1}} \operatorname{cn}(2\mathbf{K}\vartheta/\pi, k), \\ v(\vartheta) &= \frac{1}{3} \left( \pi + 2 \arcsin \left( \tilde{k} \operatorname{sn}(2\mathbf{K}\vartheta/\pi, k) \right) \right), \end{aligned}$$

где  $\operatorname{cn}(z, k)$  – эллиптический косинус Якоби;  $\operatorname{sn}(z, k)$  – эллиптический синус Якоби,

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= \sqrt{\frac{p_3 \tilde{A}_1 - 3\tilde{h}}{2p_3 \tilde{A}_1}} \in (0, 1), \\ \vartheta = \tilde{\omega}\tau, \quad \tilde{\omega} = \tilde{\omega}(\tilde{k}) &= \frac{\pi \sqrt{-3b_1 p_3 \tilde{A}_1}}{2\mathbf{K}(\tilde{k})} \in \left( 0, \sqrt{-3b_1 p_3 \tilde{A}_1} \right), \end{aligned}$$

в колебательной области и

$$\begin{aligned} u(\vartheta) &= \pm \frac{2}{\tilde{k}} \sqrt{-\frac{p_3 \tilde{A}_1}{3b_1}} \operatorname{dn}(\mathbf{K}\vartheta/\pi, k), \\ v(\vartheta) &= \frac{1}{3} \left( \pi + 2 \operatorname{am}(\mathbf{K}\vartheta/\pi, k) \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= \sqrt{\frac{2p_3 \tilde{A}_1}{p_3 \tilde{A}_1 - 3\tilde{h}}} \in (0, 1), \\ \vartheta = \tilde{\omega}\tau, \quad \tilde{\omega} = \tilde{\omega}(\tilde{k}) &= \frac{\pi \sqrt{-3b_1 p_3 \tilde{A}_1}}{\tilde{k}\mathbf{K}(\tilde{k})} \in (0, \infty) \end{aligned}$$

во вращательных областях. Здесь знак « $\pm$ » соответствует движению на верхнем/нижнем полуцилиндре соответственно.

Теперь рассмотрим возмущенную ( $\mu \neq 0$ ) систему (4.6). Переходя в этой системе в областях, не содержащих невозмущенных сепаратрис, от переменных  $(v, u)$  к переменным «действие-угол»  $(J, \vartheta)$  и, усредняя полученную систему по «быстрой» переменной  $\vartheta$ , придем к уравнению

$$\dot{w} = \mu \Phi(w), \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \Phi(w) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \left( \gamma_1 + \mu \left[ \left( p_3 \left( \tilde{P}_{11} - \frac{3b_2}{b_1} Q_{01} \right) \sin 3v + B_2 \right) u^2 + \gamma_2 u - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - \frac{1}{b_1} p_3^2 \tilde{P}_{01} Q_{01} \sin 3v \cos 3v \right] \right) v'_\vartheta - \left( b_2 u^2 + \mu \left[ b_3 u^3 + p_3 \left( Q_{11} - \frac{2b_2}{b_1} Q_{01} \right) u \cos 3v \right] \right) u'_\vartheta \right] d\vartheta, \end{aligned}$$

где  $w = J + O(\mu)$ . Простому состоянию равновесия усредненной системы (4.8) соответствует грубый предельный цикл системы (4.6).

В колебательной области функция  $\Phi$  имеет следующий вид:

$$\Phi_1(\tilde{k}) = \frac{8\mu\gamma_2}{3\pi} \sqrt{-\frac{p_3 \tilde{A}_1}{3b_1}} \left( \mathbf{E} - (1 - \tilde{k}^2) \mathbf{K} \right). \quad (4.9)$$

Очевидно, что в колебательной области система (4.6) не имеет предельных циклов.

Во вращательной области функция  $\Phi$  представима в виде:

$$\Phi_2^\pm(\tilde{k}) = \pm \frac{\gamma_1}{3} + \mu \left[ \frac{4\gamma_2 \mathbf{E}}{3\pi \tilde{k}} \sqrt{-\frac{p_3 \tilde{A}_1}{3b_1}} \mp \frac{2B_2 p_3 \tilde{A}_1}{9b_1 \tilde{k}^2} (2 - \tilde{k}^2) \right]. \tag{4.10}$$

Равенство  $\Phi_2(1) = 2\Phi_2^\pm(1)$ , имеющее место при  $\gamma_1 = 0$  и  $B_2 = 0$ , нарушается при  $\gamma_1 \neq 0$ , что приводит к необходимости дополнительного исследования в окрестности невозмущенного сепаратрисного контура.

Взаимное расположение возмущенных сепаратрис устанавливается формулой Мельникова [15]. С учетом решения невозмущенной системы (4.7), отвечающего движению по сепаратрисе

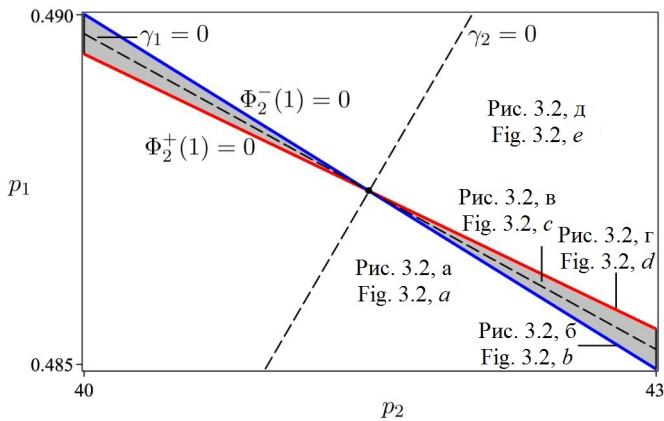
$$u(\tau) = \pm \sqrt{-\frac{p_3 \tilde{A}_1}{3b_1}} \frac{2}{\operatorname{ch}\left(\sqrt{-3b_1 p_3 \tilde{A}_1} \tau\right)},$$

$$v(\tau) = \frac{1}{3} \left( \pi + 2 \arcsin \left( \operatorname{th} \left( \sqrt{-3b_1 p_3 \tilde{A}_1} \tau \right) \right) \right),$$

находим функцию

$$\Delta_1^\pm = \pm \frac{2\pi\gamma_1}{3} + \mu \left[ \frac{8\gamma_2}{3} \sqrt{-\frac{p_3 \tilde{A}_1}{3b_1}} \mp \frac{4\pi B_2 p_3 \tilde{A}_1}{9b_1} \right], \tag{4.11}$$

определяющую (с точностью до членов порядка  $\mu^2$ ) расстояние между устойчивой и неустойчивой возмущенными сепаратрисами. Заметим, что выражения в правых частях равенств (4.11) и (4.10) совпадают с точностью до постоянного множителя при  $\tilde{k} = 1$ .



**Рис. 4.2.** Разбиение плоскости параметров  $(p_2, p_1)$  для усредненной системы (4.6) на области с разной топологией фазовых портретов  
**Fig 4.2.** Partition of the plane of parameters  $(p_2, p_1)$  for the averaged system (4.6) into domains with different topology of phase portraits

Проведя исследование функций (4.9)–(4.11), получим разбиение плоскости параметров  $(p_2, p_1)$  для усредненной системы (4.6) на области с разной топологией фазовых портретов вблизи бифуркационного случая  $k = k_{311} = k_*$  (см. Рис. 4.2). Для каждой полученной области установлено поведение фазовых кривых системы (4.6): ниже кривой  $\gamma_2 = 0$  фазовые портреты показаны на Рис. 3.2 (со сдвигом вдоль  $v$  на  $\pi/3$ ), выше кривой  $\gamma_2 = 0$  фазовые портреты получаются поворотом на угол  $\pi$  соответствующего фазового портрета из симметричной относительно данной кривой области. Серым цветом на этой бифуркационной диаграмме выделена область синхронизации колебаний. Прямые  $\gamma_1 = 0$  и  $\gamma_2 = 0$ , отмеченные пунктирными линиями на этой диаграмме, не являются бифуркационными, а носят вспомогательный характер.

Все фазовые портреты в данной статье построены с помощью компьютерной программы WInSet [17].

**Благодарности.** Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФ в рамках научного проекта 19-11-00280, а также Министерства науки и высшего образования РФ в рамках базовой части госзадания в сфере науки, проект № 0729-2020-0036.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Berger M.S., Chen Y.Y. Forced quasiperiodic and almost periodic oscillations of nonlinear Duffing equations // *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*. 1992. Vol. 19, No. 3. pp. 249–257.
2. Liu B., You J. Quasiperiodic solutions of Duffing's equations // *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*. 1998. Vol. 33, No. 6. pp. 645–655.
3. Грищенко А. Д., Ваврив Д. М. Динамика маятника с квазипериодическим возбуждением // *Журнал технической физики*. 1997. Т. 67. № 10. С. 1–7
4. Wang R.Q., Deng J., Jing Z.J. Chaos control in duffing system // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2006. Vol. 27, No. 1. pp. 249–257. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.03.038>
5. Jing Z., Yang Z., Jiang T. Complex dynamics in Duffing-van der Pol equation // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2006. Vol. 27, No. 3. pp. 722–747. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.04.044>
6. Jing Z.J., Huang J.C., Deng J. Complex dynamics in three-well Duffing system with two external forcings // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2007. Vol. 33, No. 3. pp. 795–812. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2006.03.071>
7. Ravichandran V., Chinnathambi V., Rajasekar S. Homoclinic bifurcation and chaos in Duffing oscillator driven by an amplitude-modulated force // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2007. Vol. 376, No 1. pp. 223–236. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2006.11.003>
8. Jiang T., Yang Z., Jing Z. Bifurcations and chaos in the Duffing equation with parametric excitation and single external forcing // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2017. Vol. 27, No. 08. 1750125-1-31. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0218127417501255>

9. Морозов А. Д., Морозов К. Е. О квазипериодических возмущениях двумерных гамильтоновых систем // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 12. С. 1607–1615. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0374064117120044>
10. Morozov A. D., Morozov K. E. On synchronization of quasiperiodic oscillations // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2018. Vol. 14, No. 3. pp. 367–376. DOI: <https://doi.org/10.20537/nd180307>
11. Morozov A. D., Morozov K. E. Global dynamics of systems close to Hamiltonian ones under nonconservative quasi-periodic perturbation // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2019. Vol. 15, No. 2. pp. 187–198. DOI: <https://doi.org/10.20537/nd190208>
12. Драгунов Т. Н., Морозов К. Е., Морозов А. Д. О глобальной динамике в уравнении Дуффинга при квазипериодическом возмущении // Журнал Средневожского математического общества. 2020. Т. 22, № 2. С. 164–176. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.22.202002.164-176>
13. Морозов А. Д. Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. 424 с.
14. Morozov A. D., Mamedov E. A. On a double cycle and resonances // Regular and Chaotic Dynamics. 2012. Vol. 17, No. 1. pp. 63–71. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1560354712010066>
15. Мельников В. К. Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // Труды Московского математического общества. 1963. Т. 12. С. 3–52.
16. Kostromina O. S. On limit cycles, resonance and homoclinic structures in asymmetric pendulum-type equation // Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki. 2019. Vol. 29, No. 2. pp. 228–244. DOI: <https://doi.org/10.20537/vm190207>
17. Морозов А. Д., Драгунов Т. Н. Визуализация и анализ инвариантных множеств динамических систем. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 303 с.

*Поступила 23.11.2020; доработана после рецензирования 16.02.2021;  
принята к публикации 25.02.2021*

*Информация об авторе:*

**Костромина Ольга Сергеевна**, старший преподаватель кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9881-8817>, [os.kostromina@yandex.ru](mailto:os.kostromina@yandex.ru)

*Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов:* автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

MSC2020 34C15

# On resonances under quasi-periodic perturbations of systems with a double limit cycle, close to two-dimensional nonlinear Hamiltonian systems

**O. S. Kostromina***National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russian Federation)*

**Abstract.** The effect of multi-frequency quasi-periodic perturbations on systems close to two-dimensional nonlinear Hamiltonian ones is studied. It is assumed that the corresponding perturbed autonomous system has a double limit cycle. Analysis of the Poincaré–Pontryagin function constructed for the autonomous system makes it possible to establish the presence of such a cycle. When the condition of commensurability of the natural frequency of the corresponding unperturbed Hamiltonian system with the frequencies of the quasi-periodic perturbation is fulfilled, the unperturbed level becomes resonant. Resonant structures essentially depend on whether the selected resonance levels coincide with the levels that generate limit cycles in the autonomous system. An averaged system is obtained that describes the topology of the neighborhoods of resonance levels. Possible phase portraits of the averaged system are established near the bifurcation case, when the resonance level coincides with the level in whose neighborhood the corresponding autonomous system has a double limit cycle. To illustrate the results obtained, the results of a theoretical study and of a numerical calculation are presented for a specific pendulum-type equation under two-frequency quasi-periodic perturbations.

**Key Words:** double limit cycle, quasi-periodic perturbations, resonances, averaged systems, pendulum-type equations

**For citation:** O. S. Kostromina. On resonances under quasi-periodic perturbations of systems with a double limit cycle, close to two-dimensional nonlinear Hamiltonian systems. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 23:1(2021), 11–27. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202101.11-27>

## REFERENCES

1. M. S. Berger, Y. Y. Chen, “Forced quasiperiodic and almost periodic oscillations of nonlinear Duffing equations”, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, **19**:3 (1992), 249–257.
2. B. Liu, J. You, “Quasiperiodic solutions of Duffing’s equations”, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, **33**:6 (1998), 645–655.
3. A. D. Grischenko, D. M. Vavriv, “Dynamics of pendulum with a quasiperiodic perturbation”, *Technical Physics*, **6742**:10 (1997), 1115–71120 (In Russ.).
4. R. Q. Wang, J. Deng, Z. J. Jing, “Chaos control in duffing system”, *Chaos, Solitons and Fractals*, **27**:1 (2006), 249–257. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.03.038>
5. Z. Jing, Z. Yang, T. Jiang, “Complex dynamics in Duffing-van der Pol equation”, *Chaos, Solitons and Fractals*, **27**:3 (2006), 722–747. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.04.044>

6. Z. J. Jing, J. C. Huang, J. Deng, “Complex dynamics in three-well Duffing system with two external forcings”, *Chaos, Solitons and Fractals*, **33**:3 (2007), 795–812. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2006.03.071>
7. V. Ravichandran, V. Chinnathambi, S. Rajasekar, “Homoclinic bifurcation and chaos in Duffing oscillator driven by an amplitude-modulated force”, *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **376** (2007), 223–236. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2006.11.003>
8. T. Jiang, Z. Yang, Z. Jing, “Bifurcations and chaos in the Duffing equation with parametric excitation and single external forcing”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **27**:8 (2017), 1750125-1-31. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0218127417501255>
9. A. D. Morozov, K. E. Morozov, “Quasiperiodic perturbations of two-dimensional Hamiltonian systems”, *Differential Equations*, **53**:12 (2017), 1557–1566. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0374064117120044>
10. A. D. Morozov, K. E. Morozov, “On synchronization of quasiperiodic oscillations”, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, **14**:3 (2018), 367–376. DOI: <https://doi.org/10.20537/nd180307>
11. A. D. Morozov, K. E. Morozov, “Global dynamics of systems close to Hamiltonian ones under nonconservative quasi-periodic perturbation”, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, **15**:2 (2019), 187–198. DOI: <https://doi.org/10.20537/nd190208>
12. T. N. Dragunov, K. E. Morozov, A. D. Morozov, “[On global dynamics in Duffing equation with quasiperiodic perturbation]”, *SVMO*, **22**:2 (2020), 164–176 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.22.202002.164-176>
13. A. D. Morozov, [*Resonances, cycles and chaos in quasiconservative systems*], NITC “Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika” Publ, Institut kompyuternykh issledovaniy., Moscow—Izhevsk., 2005 (In Russ.), 424 p.
14. A. D. Morozov, E. A. Mamedov, “On a double cycle and resonances”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **17**:1 (2012), 63–71. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1560354712010066>
15. V. K. Melnikov, “[On stability of a center under time-periodic perturbations]”, *Trudy Moskovskogo matematicheskogo obshchestva*, **12** (1963), 3–52 (In Russ.).
16. O. S. Kostromina, “On limit cycles, resonance and homoclinic structures in asymmetric pendulum-type equation”, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, **29**:2 (2019), 228–244. DOI: <https://doi.org/10.20537/vm190207>
17. A. D. Morozov, T. N. Dragunov, [*Visualization and analysis of invariant sets of dynamical systems*], Institut kompyuternykh issledovaniy Publ., Moscow—Izhevsk., 2003 (In Russ.), 303 p.

*Submitted 23.11.2020; Revised 16.02.2021; Accepted 25.02.2021*



*Information about the author:*

**Olga S. Kostromina**, Senior Teacher, Department of Differential Equations, Mathematical and Numerical Analysis, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Gagarina Av., Nizhny Novgorod 603950, Russia), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9881-8817>, [os.kostromina@yandex.ru](mailto:os.kostromina@yandex.ru)

*The author have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The author declare no conflict of interest.