

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

Идентификатор DOI 10.15507/2079-6900.22.202004.456-462

УДК 517.9

**Математическое моделирование магнитных свойств осесимметричных сверхпроводников второго рода в модели Кима**© Н. Д. Кузьмичев<sup>1</sup>, А. А. Шушпанов<sup>2</sup>, М. А. Васютин<sup>3</sup>

**Аннотация.** В работе выполнено математическое моделирование магнитных свойств, таких как распределение тока, собственное магнитное поле и намагниченность ряда осесимметричных сверхпроводников второго рода, например, сферы с зависимостью критической плотности тока от локального магнитного поля в модели Кима. Моделирование произведено на основе уравнения: интегрального по координатам и дифференциального по времени, – описывающего временную эволюцию критической плотности тока, которое решается численно для равномерно изменяющегося внешнего магнитного поля. Форма образца задается с помощью искаженной прямоугольной неравномерной сетки с уплотнением к краям образца. В процессе решения уравнения движения тока производится расчет суммарного магнитного поля в точках сверхпроводника для расчета величины критической плотности тока. Полученные в статье решения используются для визуализации распределения тока в объеме сверхпроводника и построения петля гистерезиса намагниченности. Также, благодаря расчетам магнитного поля, в центре образца получены зависимости поля полного проникновения для образцов с различным соотношением сторон.

**Ключевые слова:** намагниченность, сверхпроводник 2-го рода, модель Кима, осесимметричное тело, интегро-дифференциальное уравнение, петля гистерезиса

**1. Введение**

В настоящее время сверхпроводники 2-го рода (СВР) как низкотемпературные (НТСР), так и высокотемпературные (ВТСР) – всё активнее используются в различных слаботочных и сильноточных приложениях. Для использования сверхпроводников важны их критические параметры. При получении таких основных характеристик СВР, как критическая плотность тока или напряженность критического магнитного поля, пользуются обычно бесконтактными измерениями. Используются образцы в виде

<sup>1</sup>Кузьмичев Николай Дмитриевич, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6707-4950>, kuzmichevnd@yandex.ru

<sup>2</sup>Шушпанов Алексей Александрович, аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5005-9831>, aashushpanov@gmail.com

<sup>3</sup>Васютин Михаил Александрович, доцент кафедры конструкторско-технологической информатики, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4856-7407>, vasyutinm@mail.ru

дисков, цилиндров, параллелепипедов, эллипсоидов и других симметричных тел. Кроме того, используются сверхпроводники, имеющие гранулярную структуру, которые представляют систему сильно- или слабосвязанных гранул. Гранулы в первом приближении можно считать эллипсоидами, сферами или в более грубом приближении короткими цилиндрами. Поэтому отклик СВР на внешнее магнитное поле является актуальной и практически важной задачей. Однако вычисление полной, трехмерной реакции сверхпроводника на магнитное поле является сложной задачей, поскольку в общем виде неясно, какие уравнения следует записывать, если невозможно определить направления токов в произвольном случае. Существуют упрощенные тривиальные задачи для подобного расчета магнитных свойств, это длинные тонкие стержни с осевым полем, где токи текут по соосным окружностям. В этих двух случаях можно упростить задачу до двухмерной или одномерной, где плотность тока  $\mathbf{J}$ , векторный потенциал  $\mathbf{A}$  и электрическое поле  $\mathbf{E}$  параллельны друг другу и имеют только  $z$  и  $\varphi$  компоненты или только одну  $\varphi$  компоненту [1–2]. Удобная модель для описания магнитных свойств жестких СВР (ЖСВР – СВР с сильным пиннингом) в магнитных полях, превышающих первое критическое поле  $H_{c1}$ , была представлена Ч. Бином [3]. Модель предполагала постоянную и одинаковую критическую плотность тока в областях, куда проникло в виде вихрей Абрикосова магнитное поле. В реальности в образцах могут содержаться микроскопические дефекты, с которыми взаимодействуют вихри Абрикосова, что понижает энергию системы. Сила данного эффекта будет зависеть от типа дефектов, а также от величины магнитного поля в данной точке образца. Эти явления приводят к тому, что плотность критического тока может зависеть от индукции внешнего поля. Основной качественной моделью, описывающей взаимодействие вихрей и индуцированного тока, используется обратно пропорциональная зависимость

$$J_c = J_{c0} / (1 + |B|/B_0), \quad (1.1)$$

предложенную Кимом [4]. Существуют и другие модели [5–6].

Целью данной работы является численное моделирование магнитных свойств ЖСВР с осевой симметрией (короткий цилиндр и эллипсоид вращения) в однородном магнитном поле, параллельном оси симметрии с использованием полевых зависимостей плотностей тока в модели Кима.

## 2. Теоретические основы

Будем рассматривать материал с зависимостью  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ . Также введем зависимость напряженности электрического поля от плотности тока  $\mathbf{E} = E(J)\mathbf{J}/J$ , где величина  $\rho = E/J$  есть удельное сопротивление образца. Сопротивление образца может подчиняться линейному или нелинейному закону, в частности, хорошей аппроксимацией для ЖСВР является степенная зависимость вида  $E = E_c (J/J_c)^n$ , с показателем степени  $n \geq 1$ .  $J_c = J_c(B)$  является функцией индукции магнитного поля в точке (локальный случай).

Введем границы для величин:  $-b \leq y \leq b$ ,  $r = (x^2 + z^2)^{0.5} \leq a(y)$ .

Уравнение движения плотности тока, интегральное по координатам и дифференциальное по времени (интегро-дифференциальное) приведено в работах [1; 7] и имеет вид:

$$\frac{dJ(\mathbf{r}, t)}{dt} = \mu_0^{-1} \int_0^a dr \int_0^b dy' Q_{cyl}^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[ E(J) - \frac{r'}{2} \dot{B}_a \right]. \quad (2.1)$$

Локальная индукция магнитного поля:

$$B(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times (-\mu_0) \int_0^a dr' \int_0^b dy' Q_{cyl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') J(\mathbf{r}') - \frac{r}{2} \dot{B}_a. \quad (2.2)$$

Уравнение (2.1) можно применять в рамках цилиндрической геометрии, как для цилиндров конечной длины и радиуса  $a$ , так и для тел с нелинейной функцией боковой границы  $a(y)$ .

### 3. Метод вычисления

Для удобства положим  $a = J_c = E_c = \mu_0 = 1$ . Тогда векторы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  будут являться функциями  $(r_i, y_i)$ , где

$$\begin{aligned} r_i &= r_i(u_i) = \sin(u_i) \cdot a(y_i) & y_i &= y_i(v_i) = \sin(v_i) \cdot b, \\ u_i &= \frac{\pi/2(i-1/2)}{N_y}, & v_i &= \frac{\pi/2(j-1/2)}{N_r}, \\ i &= 1, \dots, N_y, & j &= 1, \dots, N_r. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Сведение уравнения к виду, необходимому для численного решения, описано в работе [7]. Результатом является уравнение:

$$\begin{aligned} \dot{J}(t) &= \frac{b}{N} Q^{-1} \cdot \left[ \left( J^T(t) \circledast J_c^T(t) \right)^{\circ n} - \frac{R}{2} \dot{B}_a(t) \right], \\ J(t) &= J(t-dt) + \dot{J}(t) \cdot dt, \quad R_i = r_i, \quad i = 1, \dots, N_r N_y. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Для расчета индукции магнитного поля в точке подобным образом преобразовываем уравнение (2.2) к виду:

$$B(t)_i = \mathbf{rot} \left( -\mu_0 Q \cdot J(t)_i - \frac{R}{2} \dot{B}_a \right). \quad (3.3)$$

Критическая плотность тока в точке определяется выражением

$$J_c(t)_i = J_c(B(t)_i),$$

где  $J$ ,  $R$ ,  $B$ ,  $J_c$  — матрицы строки для плотности тока, координаты  $r$ , индукции магнитного поля и критической плотности тока в каждой точке сетки.

Магнитный момент образца в момент времени  $t$  будет равен

$$\begin{aligned} m(t) &= 2\pi \int_0^a dr r^2 \int_0^b dy J(r, y, t) \rightarrow m(t) = (W \circ R \circ R) \cdot J(t), \\ W_i &= w_j \cdot w_y. \end{aligned}$$

Также выполнен численный расчет поля полного проникновения  $H_p$ . Для этого рассматривалось магнитное поле в центральной ячейке образца и при достижении минимального порогового значения фиксировалось внешнее магнитное поле  $H_a$ .

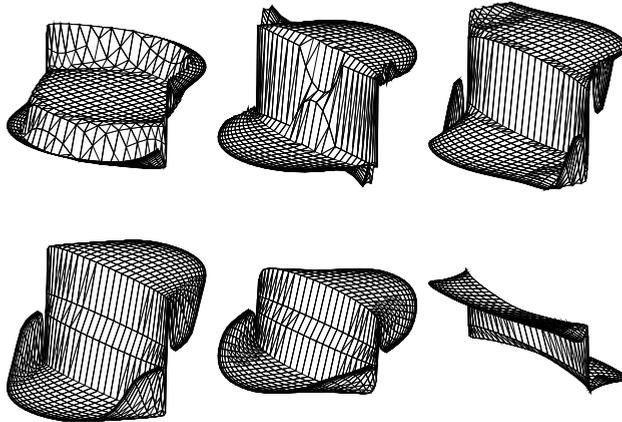
#### 4. Результаты расчетов

Для расчетов был выбран образец сферической формы радиуса  $a$ , т. е.

$$b(y) = a \cdot \sqrt{1 - y^2}.$$

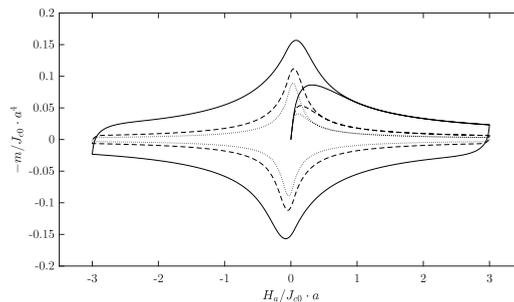
Размер сетки расчета выбран в 15 ячеек на единицу размера. Скорость нарастания внешнего магнитного поля примем  $\dot{H}_a = 1$ . Степень в уравнении сопротивления образца (3.2) возьмем достаточно большой, для соответствия модели Кима  $n = 51$ . Расчеты проводились в среде MATLAB, поскольку она достаточно оптимизирована для решения матричных уравнений и предоставляет широкий выбор визуализации расчетов. В качестве единицы магнитного поля используется величина  $J_{c0} \cdot a$ , а для единицы магнитного момента величина  $J_{c0} \cdot a^4$ .

На Рис. 4.1 показаны результаты расчета профилей плотности тока для сферы в модели Кима (1.1) при различных значениях индукции внешнего поля.



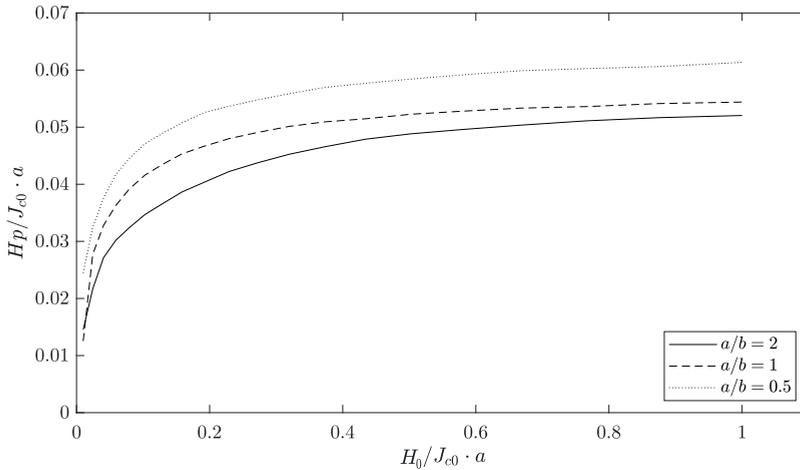
**Рис. 4.1.** Профили плотности тока для сферы для модели Кима при различных значениях индукции внешнего поля, слева направо, сверху вниз:  $H_p/J_{c0} \cdot a = 0.2, 0.8, 1.4, 2, 1.2, 0.6$

На Рис. 4.2 представлены петли гистерезиса для намагненности образца в модели Кима при различных значениях  $B_0$  (1.1).



**Рис. 4.2.** Петли гистерезиса для магнитного момента сферического образца в модели Кима при различных значениях  $B_0$ : сплошная —  $0.4J_{c0} \cdot a$ , пунктирная —  $0.1J_{c0} \cdot a$ , точечная —  $0.05J_{c0} \cdot a$ .

На Рис. 4.3 представлены зависимости поля полного проникновения для образцов с различным соотношением полуосей для модели Кима.



**Рис. 4.3.** Зависимости поля полного проникновения  $H_p$  для образцов с различным соотношением полуосей в модели Кима (1.1) от  $H_0 = B_0/\mu_0$

## 5. Заключение

В работе с использованием явной зависимости вольт-амперной характеристики  $E(J)$  численно решено уравнение движения критической плотности сверхтока  $J$  в жестком сверхпроводнике второго рода с полевой зависимостью критической плотности тока в модели Кима для эллипсоидов вращения. Интегральное уравнение итеративно решается методом обратной матрицы с учетом изменения критической плотности тока в зависимости от индукции магнитного поля. В результате найдено распределение плотности экранирующего сверхтока в жестких сверхпроводниках второго рода, имеющих форму эллипсоидов вращения в осевом переменном магнитном поле в модели Кима. Разработанную программу можно применять для расчета любых образцов с цилиндрической симметрией, а также для различных сценариев изменения внешнего магнитного поля. Результаты работы имеют важное практическое и теоретическое значение для различных применений сверхпроводников, например, в электротехнике (мощные электродвигатели, экраны), магнитометрии (датчики магнитного поля), вычислительной технике (криотроны, джозефсоновские переходы), криоэлектронике и в других технических областях.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brandt E. H. Superconductor disks and cylinders in an axial magnetic field. I. Flux penetration and magnetization curves. Phys. rev. B. 1997. vol. 58, No. 1.
2. Zhu J., Mester J., Lockhart J., Turneaure J. Critical states in 2D disk-shaped type-II superconductors in periodic external magnetic field. Physica C. 1993. vol. 212, No. 1, pp. 216-222.

3. Been C. P. Magnetization of hard superconductors. Phys. rev. 1962 vol. 8., No. 6. 1962. pp. 250-251.
4. Kim Y. B., Hempstead C. F., Strnad A. R. Magnetization and Critical Supercurrents. Phys. Rev. American Physical Society Publ. 1963. vol. 129. Issue 2, pp. 528-535. DOI:<https://doi.org/10.1103/PhysRev.129.528>
5. Kusayanagi E., Kawashima T., Yamafuji K. Theory of Flux Motion in Non-Ideal Type-II Superconductors. Journal of the Physical Society of Japan. 1967. vol. 33. Issue 2, pp. 551-560. DOI:<https://doi.org/10.1143/JPSJ.33.551>
6. Гохвельд Д. М. Магнитный гистерезис и плотность критического тока неоднородных сверхпроводников в сильных магнитных полях: дис. ... физ.-мат. наук. Красноярск. 2019. 208 с.
7. Кузьмичев Н. Д., Шушпанов А. А., Васютин М. А. Математическое моделирование магнитных свойств эллипсоидов вращения жёстких сверхпроводников второго рода в модели Бина // Журнал Средневолжского математического общества. 2019. Т. 21, № 3. С. 353–362. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.21.201903.353-362>.

*Поступила 16.10.2020*

MSC2020 78-10

## Mathematical modeling of the magnetic properties of axisymmetric hard superconductors of the second kind in the Kim model

© N. D. Kuzmichev<sup>1</sup>, A. A. Shushpanov<sup>2</sup>, M. A. Vasyutin<sup>3</sup>

**Abstract.** Authors perform mathematical modeling of magnetic properties, such as current distribution, intrinsic magnetic field and magnetization of a number of axisymmetric superconductors of the second kind, for example, of a sphere with the dependence of the critical current density on the local magnetic field in the Kim model. The simulation is based on equation that is integral with respect to coordinate and differential with respect to time. The equation describes time evolution of the critical current density and is solved numerically for a uniformly varying external magnetic field. The shape of the sample is set using a distorted rectangular irregular mesh with compaction to the edges of the sample. While solving the equation of current motion, the total magnetic field is calculated at the points of the superconductor to calculate the value of the critical current density. In the article, the obtained solutions are used to visualize the current distribution in the volume of a superconductor and to construct magnetization hysteresis loops. Also, thanks to the calculations of the magnetic field in the center of the sample, the dependencies of the total penetration field for samples with different aspect ratios are obtained.

**Key Words:** magnetization, hard II-type superconductors, Kim model, axisymmetric body, integro-differential equation, hysteresis loop

<sup>1</sup>**Nikolay D. Kuzmichev**, Professor of Department of Design and Technology Informatics, Mordovia State University (68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Dr. Sci.(Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6707-4950>, [kuzmichevnd@yandex.ru](mailto:kuzmichevnd@yandex.ru)

<sup>2</sup>**Aleksey A. Shushpanov**, Post-Graduate Student of Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, Mordovia State University (68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5005-9831>, [aashushpanov@gmail.com](mailto:aashushpanov@gmail.com)

<sup>3</sup>**Mihail A. Vasyutin**, Associate Professor of Department of Design and Technology Informatics, Mordovia State University (68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4856-7407>, [vasyutinm@mail.ru](mailto:vasyutinm@mail.ru)

## REFERENCES

1. E. H. Brandt, “Superconductor disks and cylinders in an axial magnetic field. I. Flux penetration and magnetization curves”, *Phys. rev. B*, **58**:1 (1997), 17 p.
2. J. Zhu, J. Mester, J. Lockhart, J. Turneaure, “Critical states in 2D disk-shaped type-II superconductors in periodic external magnetic field”, *Physica C.*, **212**:1 (1993), 216-222.
3. C. P. Been, “Magnetization of hard superconductors”, *Phys. rev.*, **8**:6 (1962), 250-251.
4. Y. B. Kim, C. F. Hempstead, A. R. Strnad, “Magnetization and Critical Supercurrents”, *Phys. Rev.*, **129**:2 (Jan 1963), 528–535.
5. E. Kusayanagi, T. Kawashima, K. Yamafuji, “Theory of Flux Motion in Non-Ideal Type-II Superconductors”, *Journal of the Physical Society of Japan*, **33**:2 (1967), 551-560.
6. D. M. Gohveld, *Magnetic hysteresis and critical current density of inhomogeneous superconductors in strong magnetic fields*, Diss. . . . kand. fiz.-mat. nauk, Krasnoyarsk, 2019 (In Russ.), 208 p.
7. N. D. Kuzmichev, A. A. Shushpanov, M. A. Vasyutin, “Mathematical modeling of the magnetic properties of spheroid of hard superconductors of the second kind in the Bean model”, *SVMO journal*, **21**:3 (2019), 353–362 (In Russ.).

*Submitted 16.10.2020*