Идентификатор DOI 10.15507/2079-6900.22.202004.434-441

УДК 517.9

Энергетическая функция Морса-Ботта для поверхностных Ω-устойчивых потоков

© **А. Е. Колобянина**[1], **В. Е. Круглов**[2]

Аннотация. В настоящей работе рассмотрен класс Ω-устойчивых потоков на поверхностях, т. е. потоков на поверхностях с неблуждающим множеством, состоящим из конечного числа гиперболических неподвижных точек и конечного числа гиперболических предельных циклов. Класс Ω-устойчивых потоков является обобщением класса потоков Морса-Смейла, допускающим наличие седловых связок, не образующих циклы. Авторами построена энергетическая функция Морса-Ботта для любого такого потока. Полученные результаты являются идейным продолжением классических работ С. Смейла, доказавшего существование энергетической функции Морса для градиентно-подобных потоков, и К. Мейера, установившего существование энергетической функции Морса-Ботта для потоков Морса-Смейла. Специфика Ω-устойчивых потоков выводит их за рамки структурной устойчивости, однако убывание вдоль траекторий таких потоков по прежнему отслеживается регулярной функцией Ляпунова.

Ключевые слова: Ω-устойчивый поток, энергетическая функция, предельный цикл, функция Морса-Ботта, поверхность

1. Введение

В работе А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина [1] впервые были введены потоки плоскости, называемые сейчас *потоками Морса-Смейла*. Они обладают конечным числом гиперболических неподвижных точек и замкнутых траекторий, составляющих все неблуждающее множество системы, и не имеют *связок*, т. е. траекторий, соединяющих седловые точки. С. Смейл в работе [2] показал, что локально градиентный поток Морса-Смейла без предельных циклов (поток Морса-Смейла без предельных циклов называется *градиентно-подобным*) в подходящей метрике является градиентным, порожденным некоторой *функцией Морса* – гладкой функцией с невырожденными критическими точками. В этом случае функция Морса убывает вдоль неособых траекторий потока, а множество неподвижных точек потока совпадает с множеством критических точек функции Морса. Так была впервые построена т. н. *энергетическая функция* для динамических систем, т. е. гладкая функция, убывающая вдоль блуждающих траекторий, множество критических точек которой совпадает с неблуждающим множеством системы.

К. Мейер в работе [3] построил энергетическую функцию для произвольного потока Морса-Смейла, обобщив таким образом результат Смейла. В силу наличия у такого потока в общем случае периодических траекторий энергетическая функция уже не

[1]**Колобянина Анна Евгеньевна**, студент факультета информационных технологий, математики и механики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5312-4478, akolobyanina@mail.ru

[2]**Круглов Владислав Евгеньевич**, аспирант, преподаватель кафедры фундаментальной математики, научный сотрудник лаборатории динамических систем и приложений, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-4661-0288, kruglovslava21@mail.ru

могла быть функцией Морса, а являлась ее обобщением – *функцией Морса-Ботта*, имеющей точки первой степени вырождения вдоль предельных циклов.

В работе [4] был сделан первый шаг в обобщении результатов К. Мейера, а именно была построена энергетическая функция для Ω-устойчивого потока с одной седловой связкой на сфере. В работе [5] было продолжено обобщение результатов К. Мейера применительно к классу Ω-устойчивых потоков без предельных циклов на поверхностях.

В настоящей работе построена энергетическая функция Морса-Ботта для произвольных поверхностных Ω-устойчивых потоков.

2. Основные определения и понятия

Поток $f^t\colon M \to M$, заданный на замкнутом многообразии M, называется *Ω-устойчивым*, если существует такая окрестность потока f^t, что для любого потока g^t из этой окрестности существует гомеоморфизм $h : M \to M$, осуществляющий эквивалентность потоков на их неблуждающих множествах Ω_{f^t} и Ω_{g^t}.

Ω-устойчивые потоки на поверхности характеризуются гиперболическим неблуждающим множеством, состоящим из конечного числа неподвижных точек и конечного числа предельных циклов.

Пусть $\varphi\colon M \to \mathbb{R}$ – C^2-гладкая функция, заданная на многообразии M. Точка $p \in M$ называется *критической точкой* функции $\varphi(x)$, если $\left(\dfrac{d\varphi}{dx}\right)|_p = \dfrac{d\varphi}{dx_1}(p) = \ldots \dfrac{d\varphi}{dx_n}(p) = 0$, а $\varphi(p)$ называется *критическим значением* функции $\varphi(x)$. В противном случае точка p называется *регулярной точкой*, а $\varphi(p)$ – *регулярным значением* функции $\varphi(x)$.

Обозначим через Cr_φ множество критических точек функции φ.

Точка $p \in Cr_\varphi$ называется *невырожденной критической точкой индекса* $q_p \in \{0, \cdots, n\}$, если в точке p существует локальная карта (V_p, ϕ_p) такая, что $\phi_p(y) = (x_1(y), \ldots, x_n(y))$, $y \in V_p$ и

$$\varphi(y) = \varphi(p) - \sum_{i=1}^{q_p} x_i^2(y) + \sum_{i=q_p+1}^{n} x_i^2(y).$$

Связное подмногообразие $C \subset Cr_\varphi$ размерности $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ многообразия M называется *невырожденным критическим подмногообразием индекса* $q_p \in \{0, \cdots, n-k\}$, если в любой точке $p \in C$ существует локальная карта (V_p, ϕ_p) такая, что $\phi_p(y) = (x_1(y), \ldots, x_n(y))$, $y \in V_p$, $\phi_p(V_p \cap C) \subset \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = \cdots = x_{n-k} = 0\}$ и

$$\varphi(y) = \varphi(p) - \sum_{i=1}^{q_p} x_i^2(y) + \sum_{i=q_p+1}^{n-k} x_i^2(y).$$

Функция φ называется *функцией Морса-Ботта*, если любая компонента связности множества Cr_φ является либо невырожденной критической точкой, либо принадлежит невырожденному критическому подмногообразию.

Обозначим через S замкнутую поверхность и через G – класс Ω-устойчивых потоков на S.

Энергетической функцией потока $f^t \in G$ назовём функцию Морса-Ботта $\varphi\colon S \to \mathbb{R}$ со следующими свойствами:

1) $Cr_\varphi = \Omega_{f^t}$, при этом функция φ имеет невырожденные критические точки в неподвижных точках потока f^t, а предельные циклы потока f^t являются ее невырожденными одномерными критическими подмногообразиями;

2) функция φ убывает вдоль блуждающих траекторий потока f^t ($\varphi(f^t(x)) < \varphi(x)$ для любой $x \notin \Omega_{f^t}$ и любого $t > 0$) и постоянна на компонентах связности неблуждающего множества.

3. Построение энергетической функции

Пусть $f^t \in G$. Энергетическая функция $\varphi : S \to \mathbb{R}$ для потока f^t будет построена в несколько этапов.

Теорема 3.1 *Для любого потока $f^t \in G$ существует энергетическая функция.*

Доказательство.

1. Введем отношение Смейла на множестве неподвижных точек и периодических траекторий, являющихся компонентами связности неблуждающего множества Ω_{f^t}: для двух компонент связности β_1 и β_2 неблуждающего множества Ω_{f^t} положим, что $\beta_1 < \beta_2$ тогда и только тогда, когда $W^s_{\beta_1} \cap W^u_{\beta_2} \neq \varnothing$. В силу отсутствия циклов у Ω-устойчивого потока отношение Смейла является отношением частичного порядка и, следовательно, может быть продолжено до отношения линейного порядка. Перенумеруем неподвижные точки и предельные циклы согласно этому порядку.

Каждой компоненте связности неблуждающего множества присвоим индексы q, j, где $q = 0, 1, 2, 3$ или 4, если компонента является стоком, седлом, источником, устойчивым или неустойчивым предельным циклом соответственно; j – номер компоненты в линейном порядке (см. Рис. 3.1). Обозначим каждую такую компоненту $\beta_{q,j}$.

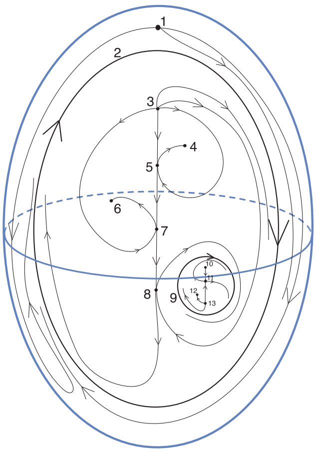

Рис. 3.1. Фазовый портрет потока $f^t \in G$ на сфере S^2 с упорядоченными компонентами неблуждающего множества

2. Поскольку $\beta_{q,j}$, где $q = \overline{0,2}$ — гиперболическая неподвижная точка потока f^t, то в локальных координатах $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ касательное к траекториям потока векторное поле имеет вид

$$\dot{X} = A_{q,j}X + g_{q,j}(X),$$

где $A_{q,j}$ матрица с собственными значениями с ненулевой действительной частью и $g_{q,j}(0) = dg_{q,j}(0) = 0$. Согласно теории Ляпунова, существуют симметрические матрицы $B_{q,j}$ и $C_{q,j}$ такие, что квадратичная форма $w_{q,j}(X) = X^T B_{q,j} X$ положительно определена, а квадратичная форма $v_{q,j}(X) = X^T C_{q,j} X$ невырождена, при этом

$A_{q,j}^T C_{q,j} + C_{q,j} A_{q,j} = -B_{q,j}$. Кроме того, индекс $C_{q,j}$ равен числу собственных значений матрицы $A_{q,j}$ с положительной вещественной частью.

Тогда существует окрестность $U_{q,j}$ неподвижной точки $\beta_{q,j}$, в которой функция

$$\varphi_{q,j}(x,y) = j + v_{q,j}(x,y)$$

является локальной энергетической функцией Морса для потока f^t.

3. Поскольку $\beta_{q,j}$, где $q = \overline{3,4}$, j – гиперболический предельный цикл, то в локальных координатах (ϑ, x) касательное к траекториям потока векторное поле имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\vartheta} = \omega_{q,j} + \theta_{q,j}(\vartheta, x) \\ \dot{x} = a_{q,j}(\vartheta)x + g_{q,j}(\vartheta, x), \end{cases}$$

где $a_{q,j}$ – периодическая функция периода 1; θ, $g_{q,j}$ – периодические функции периода 1 по координате ϑ, где $\theta_{q,j}(\vartheta, 0) = 0$ и $g_{q,j} = o(||x||)$. Рассмотрим линейную часть полученной системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\vartheta} = \omega_{q,j}, \\ \dot{x} = a_{q,j}(\vartheta)x. \end{cases}$$

Решение уравнения $\dot{\vartheta} = \omega_{q,j}$ выглядит следующим образом $\vartheta_{q,j}(t) = \omega_{q,j}t + \vartheta_{q,j}(0)$. Согласно теории Флоке, решение уравнения $\dot{x} = a_{q,j}(\vartheta)x$ может быть записано в виде $x_{q,j}(\vartheta) = e^{s_{q,j}\vartheta} P_{q,j}(\vartheta)$, где $s_{q,j}$ – константа, а $P_{q,j}$ – периодическая функция периода 1 такая, что $P_{q,j}(\vartheta) = P_{q,j}(\vartheta + 1)$ или $P_{q,j}(\vartheta) = -P_{q,j}(\vartheta + 1)$.

Положим $\varphi_{q,j}(\vartheta, x) = s_{q,j} x_{q,j}^2(\vartheta) P_{q,j}^2(\vartheta) = sx^2p^2$. Тогда

$$\dot{\vartheta} = 2sxp(\dot{x}p + x\dot{p}).$$

Поскольку $\dot{x} = e^{s\vartheta}(sp + \dot{p}) = e^{s\vartheta}p\left(s + \dfrac{\dot{p}}{p}\right) = x\left(s + \dfrac{\dot{p}}{p}\right)$ и $\dot{x} = ax$, то $a = s + \dfrac{\dot{p}}{p}$, следовательно $\dot{p} = ap - sp$. Тогда

$$\varphi = 2sxp(axp + xap - sxp) = -2s^2x^2p^2 + 4sx^2p^2a,$$

где $v_{q,j}(\vartheta, x) = -2s^2x^2p^2 = -2s_{q,j}^2 x_{q,j}^2(\vartheta) P_{q,j}^2(\vartheta)$, а $o(\vartheta) = 4sx^2p^2a$.

Тогда существует окрестность $U_{q,j}$ предельного цикла $\beta_{q,j}$, в которой функция

$$\varphi_{q,j}(\vartheta, x) = b_{q,j} + v_{q,j}(\vartheta, x)$$

является локальной энергетической функцией Морса-Ботта для потока f^t.

4. Не уменьшая общности, будем считать, что окрестности $U_{q,j}$, построенные в пунктах 2 и 3 попарно не пересекаются для различных q, j. Более того (Рис. 3.2),

$$U_{0,j} = \varphi_{0,j}^{-1}([j, j+1/4]),\ U_{2,j} = \varphi_{2,j}^{-1}([j, j-1/4]),$$

$$U_{3,j} = \varphi_{3,j}^{-1}([j, j+1/4]),\ U_{4,j} = \varphi_{4,j}^{-1}([j, j-1/4]),$$

а окрестность $U_{1,j}$ седловой точки $\beta_{1,j}$ имеет вид криволинейного восьмиугольника, четыре стороны которого лежат на четырех компонентах связности линий уровня $\varphi_{1,j}^{-1}(j \pm 1/4)$, а остальные четыре лежат на различных траекториях потока f^t (Рис. 3.3).

Положим $U_+ = \bigcup\limits_{q=0,3} U_{q,j}$, $U_- = \bigcup\limits_{q=2,4} U_{q,j}$ и обозначим через φ_+, φ_- построенные на этих множествах локальные энергетические функции.

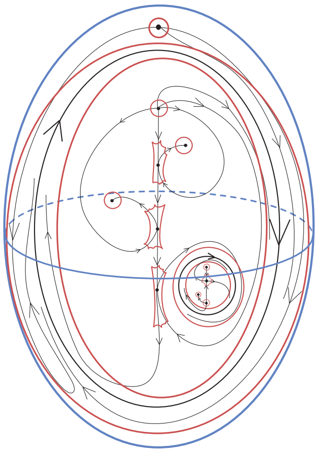

Рис. 3.2. Фазовый портрет потока f^t на 2-сфере с окрестностями неподвижных точек и предельных циклов

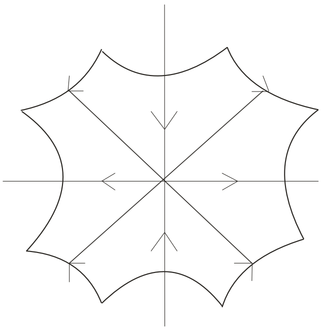

Рис. 3.3. Окрестность $U_{\beta_{1,j}}$

5. По построению множество $\varphi_{1,j}^{-1}(j \pm 1/4) \cap \partial U_{1,j}$ состоит из дуг $\delta_{j\pm}^1, \delta_{j\pm}^2$, при этом будем считать, что обозначения выбраны так, что δ_{j-}^1, δ_{j-}^2 пересекают $W_{\beta_{1,j}}^s$, δ_{j+}^1, δ_{j+}^2 пересекают $W_{\beta_{1,j}}^u$. Для каждой точки a дуги δ_{j+}^1 обозначим через $t_a > 0$ значения времени такое, что $a_+ = f^{t_a}(a) \in \partial U_+$. Положим

$$\Delta_{j+}^1 = \bigcup_{a \in \delta_{j+}^1} \left(\bigcup_{t \in [0, t_a]} f^t(a) \right).$$

Определим функцию $\varphi_{\Delta_{j+}^1}$ на множестве Δ_{j+}^1 формулой

$$\varphi_{\Delta_{j+}^1}(f^t(a)) = t\varphi_+(a_+) + \frac{t_a - t}{t_a}(j - 1/4), \, t \in [0, t_a].$$

Аналогичным образом определяются множества $\Delta_{j+}^2, \Delta_{j-}^1, \Delta_{j-}^2$ и функции $\varphi_{\Delta_{j+}^2}, \varphi_{\Delta_{j-}^1}, \varphi_{\Delta_{j-}^2}$. Положим $\Delta_{1,j} = \Delta_{j+}^1 \cup \Delta_{j+}^2 \cup \Delta_{j-}^1 \cup \Delta_{j-}^2$, $\widetilde{U}_{1,j} = U_{1,j} \cup \Delta_{1,j}$ и $\widetilde{U}_1 = \bigcup\limits_j \widetilde{U}_{1,j}$. Обозначим через φ_1 построенные на множестве $\widetilde{U}_1$ энергетические функции.

6. Каждая компонента связности V_i множества $V = S\setminus(U_0\cup U_2\cup U_3\cup U_4\cup \widetilde{U}_1)$ ограничена либо 1) двумя окружностями $c_- \subset \partial U_-$, $c_+ \subset \partial U_+$, либо 2) двумя окружностями $c_- \subset \partial U_-$, $c_+ \subset \partial U_+$ и двумя траекториями γ_-, γ_+ потока f^t.

В случае 1) для каждой точки $a_- \in c_-$ обозначим через $t_{a_-} > 0$ значения времени такое, что $a_+ = f^{t_{a_-}}(a_-) \in c_+$. Определим функцию φ_{V_i} на множестве V_i формулой

$$\varphi_{V_i}(f^t(a_-)) = t\varphi_+(a_+) + \frac{t_{a_-} - t}{t_{a_-}}\varphi_-(a_-),\ t \in [0, t_{a_-}].$$

В случае 2) существует диффеоморфизм $g : V_i \to [0,1] \times [0,1]$ такой, что $g([0,1]\times \times\{0\}) = c_-$, $g([0,1] \times \{1\}) = c_+$, $g(\{0\} \times [0,1]) = \gamma_-$, $g(\{1\} \times [0,1]) = \gamma_+$. Положим $\tilde{\varphi}_- = = g^{-1}|_{\{0\}\times[0,1]} \circ \varphi_1$, $\tilde{\varphi}_+ = g^{-1}|_{\{1\}\times[0,1]} \circ \varphi_1$. Определим функцию $\varphi_{[0,1]\times[0,1]}$ на $[0,1] \times [0,1]$ формулой

$$\varphi_{[0,1]\times[0,1]}(s,t) = s\tilde{\varphi}_+(t) + (1-s)\tilde{\varphi}_-(t).$$

Положим $\varphi_{V_i} = g \circ \varphi_{[0,1]\times[0,1]}$.

Обозначим через φ_V функции, построенные на всех компонентах связности V_i.

7. Искомая энергетическая функция является сглаживанием (путем переопределения значений на линиях уровня) функции φ, следующий вид (Рис. 3.4):

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_+(x),\ x \in U_+; \\ \varphi_-(x),\ x \in U_-; \\ \varphi_1(x),\ x \in \widetilde{U}_1; \\ \varphi_V(x),\ x \in V. \end{cases}$$

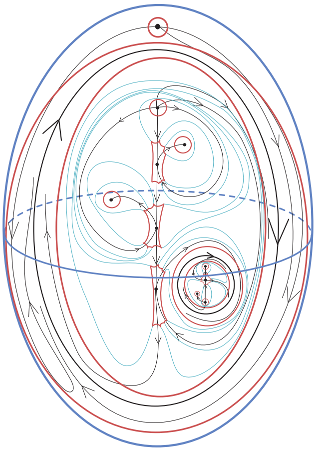

Рис. 3.4. Фазовый портрет потока f^t на 2-сфере с разбиением сферы на области линиями уровня функции φ

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта РНФ, проект № 17-11-01041, за исключением локальной энергетической функции, которая построена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение № 075-15-2019-1931. Авторы благодарят Починку Ольгу Витальевну за внимательное прочтение рукописи.

Список литературы

1. Андронов А. А., Понтрягин Л. С. Грубые системы // Докл. АН СССР. 1937. Т. 14, № 5. С. 247-250.
2. Smale S. On gradient dynamical systems. Annals of Mathematics. 1961. vol. 74. pp. 199-206.
3. Meyer K. R. Energy function for Morse-Smale. American Journal of Mathematics. 1968. vol. 90, No. 4. pp. 1031-1040.
4. Босова А. А., Круглов В. Е., Починка О. В. Энергетическая функция для Ω-устойчивого потока с седловой связкой на поверхности // Таврический вестник информатики и математики. 2017. Т. 4, № 37. С. 51-58.
5. Колобянина А. Е., Круглов В. Е. Энергетическая функция для Ω-устойчивых потоков без предельных циклов на поверхностях // Журнал СВМО. 2019. Т. 21, № 4. С. 460-468.

Поступила 21.10.2020

MSC2020 37D05

Morse-Bott energy function for surface Ω-stable flows

© **A. E. Kolobyanina**[1], **V. E. Kruglov**[2]

Abstract. In this paper, we consider the class of Ω-stable flows on surfaces, i.e. flows on surfaces with the non-wandering set consisting of a finite number of hyperbolic fixed points and a finite number of hyperbolic limit cycles. The class of Ω -stable flows is a generalization of the class of Morse-Smale flows, admitting the presence of saddle connections that do not form cycles. The authors have constructed the Morse-Bott energy function for any such flow. The results obtained are an ideological continuation of the classical works of S. Smale, who proved the existence of the Morse energy function for gradient-like flows, and K. Meyer, who established the existence of the Morse-Bott energy function for Morse-Smale flows. The specificity of Ω-stable flows takes them beyond the framework of structural stability, but the decrease along the trajectories of such flows is still tracked by the regular Lyapunov function.

Key Words: Ω-stable flow, energy function, limit cycle, Morse-Bott function, surface

References

1. A. A. Andronov, L. S. Pontryagin, "[Gough systems]", *Dokl. AN SSSR*, **14**:5 (1937), 247–250 (in Russ.).

[1]**Anna E. Kolobyanina**, student of Faculty of Informatics, Mathematics and Computer Science, National Research University Higher School of Economics, Russian Federation (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5312-4478, akolobyanina@mail.ru

[2]**Vladislav E. Kruglov**, graduate Student, Lecturer, Department of Fundamental Mathematics, Research Fellow, International Laboratory of Dynamical Systems and Applications, National Research University Higher School of Economics, Russian Federation (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-4661-0288, kruglovslava21@mail.ru

2. S. Smale, “[On gradient dynamical systems]”, *Annals of Mathematics*, **74** (1961), 199–206.

3. K. R. Meyer, “[Energy function for Morse-Smale]”, *American Journal of Mathematics,*, **90**:4 (1968), 1031–1040.

4. A. A. Bosova, V. E. Kruglov, O. V. Pochinka, “[Energy funtion for Ω-stable flow with a saddle connection on a surface]”, *Tavricheskiy vestnik informatiki i matematiki*, **4**:37, 51–58 (in Russ.).

5. A. E. Kolobyanina, V. E. Kruglov, “Energy function for Ω-stable flows without limit cycles on surfaces”, *SVMO*, **21**:4 (2019), 460–468 (in Russ.).

Submitted 21.10.2020