Идентификатор DOI 10.15507/2079-6900.22.202004.424-433

*УДК 517.96*

# О локальной структуре одномерных базисных множеств необратимых A-эндоморфизмов поверхностей

© **В. З. Гринес**[1], **Е. В. Жужома**[2]

**Аннотация.** Относительно недавно авторами статьи был открыт содержательный класс необратимых эндоморфизмов на двумерном торе. Замечательным свойством этих эндоморфизмов является то, что их неблуждающие множества содержат нетривиальные одномерные строго инвариантные гиперболические базисные подмножества (в терминологии С. Смейла и Ф. Пшэтицкого), которые обладают единственностью неустойчивого одномерного расслоения. Было доказано, что нетривиальные (отличные от периодических изолированных орбит) инвариантные множества могут быть только репеллерами. Заметим, что для обратимых эндоморфизмов (диффеоморфизмов) это не так. В настоящей работе доказано, что одномерные растягивающиеся однозначно гиперболические и строго инвариантные одномерные растягивающиеся аттракторы и одномерные сжимающиеся репеллеры необратимых A-эндоморфизмов замкнутых ориентируемых поверхностей имеют локальную структуру произведения интервала на нульмерное замкнутое множество (конечное или канторовское). Полученный результат контрастирует с существованием одномерных репеллеров фрактального типа, возникающих в комплексной динамике на римановой сфере и не обладающих свойствами существования единственного одномерного неустойчивого расслоения.

**Ключевые слова:** необратимые A-эндоморфизмы, гиперболические базисные множества, эндоморфизмы поверхностей

## 1. Введение и формулировка основных результатов

Под *эндоморфизмом* мы понимаем $C^1$-гладкое сюрьективное отображение многообразия на себя. Обозначим через $End\,(M)$ пространство эндоморфизмов замкнутого многообразия $M$, наделенное стандартной $C^1$-топологией. Пусть $g \in End\,(M)$. Орбитой или *g-орбитой* точки $x_0 \in M$ называется множество $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty} = O(x_0)$ такое, что $g(x_i) = x_{i+1}$ для любого $i \in \mathbb{Z}$. Множество $\{x_i\}_{i=0}^{\infty} = O^+(x_0) \subset O(x_0)$ называется *положительной полу-орбитой* точки $x_0$. Положительная полу-орбита определена однозначно, в то время как множество орбит, проходящих через фиксированную точку, в общем случае может быть континуальным. Для фиксированной орбиты $\{x_i\}_{-\infty}^{\infty} = O(x_0)$ множество $\{x_i\}_{-\infty}^{0} = O^-(x_0)$ называется *отрицательной полу-орбитой* орбиты $O(x_0)$.

Точка $x \in M$ эндоморфизма $f : M \to M$ называется *неблуждающей*, если для любой окрестности $U$ точки $x$ и любого $i_0 \in \mathbb{N}$ найдется $i \geq i_0$ такое, что $f^i(U) \cap U \neq \emptyset$. Множество неблуждающих точек образует *неблуждающее множество* эндоморфизма

[1]**Гринес Вячеслав Зигмундович**, главный научный сотрудник международной лаборатории Динамических систем и приложений, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"(603155, Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12), доктор физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/ 0000-0003-4709-6858, vgrines@yandex.ru

[2]**Жуджома Евгений Викторович**, профессор кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"(603155, Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12), доктор физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/ 0000-0001-7607-2797, zhuzhoma@mail.ru

$f$, и обозначается через $NW(f)$. Известно, что неблуждающее множество всегда вперед-инвариантное, то есть $f(NW(f)) \subset NW(f)$.

Орбита $O(x_0)$ называется *гиперболической*, если существует непрерывное расщепление касательного пространства

$$\mathbb{T}_{O(x_0)}M = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} \mathbb{T}_{x_i}M = \mathbb{E}^s \bigoplus \mathbb{E}^u = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} \mathbb{E}^s_{x_i} \bigoplus \mathbb{E}^u_{x_i},$$

инвариантное относительно $Dg$, и такое, что

$$0 < ||Dg^m(v)|| \leq c\mu^m ||v||, \ ||Dg^m(w)|| \geq c^{-1}\mu^{-m}||w|| \quad \text{где } \ v \in \mathbb{E}^s \setminus \{0\}, \ w \in \mathbb{E}^u, \ \forall m \in \mathbb{N}$$

для некоторых постоянных $c > 0$, $0 < \mu < 1$ и римановой метрики на $\mathbb{T}M$. Отметим, что неустойчивое подрасслоение $\mathbb{E}^u(x_0)$ зависит, вообще говоря, от отрицательной полу-орбиты $\{x_i\}_{i=-\infty}^0$, $\mathbb{E}^u(x_0) = \mathbb{E}^u(x_0, \{x_i\}_{i=-\infty}^0)$. Может оказаться $\mathbb{E}^u(x_0) \neq \mathbb{E}^u(y_0)$ для $x_0 = y_0$ с $O(x_0) \neq O(y_0)$. Такой эффект невозможен для устойчивого подрасслоения $\mathbb{E}^s(x_0)$, зависящего только от начальной точки $x_0$. Множество $\Lambda$ называется *гиперболическим*, если $f(\Lambda) = \Lambda$, и любая орбита, лежащая в $\Lambda$, является гиперболической, причем постоянные $c > 0$, $0 < \mu < 1$ в вышеприведенных оценках не зависят от выбора орбиты (поэтому иногда говорят о *равномерной гиперболичности*). Отметим, что равенство $f(\Lambda) = \Lambda$ гарантирует для любой точки $x_0 \in \Lambda$ наличие хотя бы одной отрицательной полу-орбиты, лежащей в $\Lambda$.

Эндоморфизм $f\colon M^n \to M^n$, называется *эндоморфизмом Аносова*, если все объемлющее многообразие $M^n$ является гиперболическим множеством эндоморфизма $f$. Эндоморфизм Аносова $g : M \to M$ называется *растягивающим*, если устойчивое подрасслоение $\mathbb{E}^s = 0$. Другими словами, $||Dg^m(w)|| \geq c^{-1}\mu^{-m}||w||$ для всех векторов $w \in \mathbb{T}M$ и любых $m \in \mathbb{N}$.

Эндоморфизм $f : M \to M$ называется *А-эндоморфизмом*, если его неблуждающее множество $NW(f)$ гиперболическое, и в $NW(f)$ всюду плотны периодические точки. Напомним, что отображение $N \to N$ называется *транзитивным*, если существует точка $x \in N$, положительная полу-орбита которой плотна в $N$.

В работе [1] доказана Спектральная Теорема для А-эндоморфизмов, которая является обобщением Спектральной Теоремы С. Смейла [2], доказанной для А-диффеоморфизмов. Согласно [1], неблуждающее множество $NW(f)$ А-эндоморфизма $f : M \to M$ единственным образом с точностью до нумерации представляется в виде объединения замкнутых и попарно непересекающихся множеств

$$NW(f) = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_l, \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \ \text{ при } \ i \neq j,$$

таких, что $f(\Omega_j) = \Omega_j$ и $f|_{\Omega_j} : \Omega_j \to \Omega_j$ транзитивен для всех $1 \leq j \leq l$. Множества $\Omega_1$, $\ldots$, $\Omega_l$ называются *базисными множествами*.

К настоящему времени имеется ряд законченных классификационных результатов для базисных множеств А-диффеоморфизмов [3–10]. Что же касается А-эндоморфизмов, которые не являются А-диффеоморфизмами, то к настоящему времени имеется небольшое число классов систем, для которых удается описать структуру базисных множеств и получить законченные классификационные результаты. К таким классам относятся эндоморфизмы интервала и окружности, эндоморфизмы возникающие в комплексной динамике на римановой сфере и растягивающие эндоморфизмы многообразий большей размерности [11]. Следует отметить, что структура базисных множеств А-эндоморфизмов до сих пор изучена далеко не столь исчерпывающим образом даже для эндоморфизмов поверхностей.

В настоящей работе рассматриваются одномерные базисные множества А-эндоморфизмов замкнутых поверхностей. Важными с точки зрения приложений базисными множествами являются аттракторы и репеллеры. В статье выделяются специальные классы одномерных аттракторов и репеллеров, и полностью описывается их топологическая структура. Перейдем к изложению основных результатов.

Гиперболическое множество $\Lambda$ называется *однозначно гиперболическим*, или множеством *с однозначно определенным неустойчивым расслоением*, если неустойчивое подрасслоение $\mathbb{E}^u(x_0)$ не зависит от отрицательной полу-орбиты $\{x_i\}_{i=-\infty}^0$ для любой точки $x_0 \in \Lambda$.

Базисное множество $\Omega_a$ называется *аттрактором*, если существует окрестность $U$ множества $\Omega_a$ такая, что

$$\cap_{i\geq 0} f^i(U) = \Omega_a, \quad f(clos\, U) \subset U.$$

Аттрактор $\Omega_a$ называется *растягивающимся*, если его топологическая размерность равна размерности неустойчивого подрасслоения $\mathbb{E}^u(x_0) = \mathbb{E}^u(x_0, \{x_i\}_{i=-\infty}^0)$ для любой точки $x_0 \in \Omega_a$ и любой отрицательной полу-орбиты $\{x_i\}_{i=-\infty}^0 \subset \Omega_a$.

Базисное множество $\Omega_r$ называется *репеллером*, если существует окрестность $U$ множества $\Omega_r$ такая, что

$$\cap_{i\geq 0} f^{-i}(U) = \Omega_r, \quad clos\, U \subset f(U).$$

Репеллер $\Omega_r$ называется *сжимающимся*, если его топологическая размерность равна размерности устойчивого подрасслоения $\mathbb{E}^s(x_0)$ для любой точки $x_0 \in \Omega_r$.

Базисное множество $\Omega$ называется *строго инвариантным*, если $f^{-1}(\Omega) = \Omega = f(\Omega)$. Непосредственно из определения гиперболичности вытекает, что в некоторой окрестности базисного множества эндоморфизм является локальным диффеоморфизмом. Ниже, говоря о том, что эндоморфизм не является диффеоморфизмом, мы будем для простоты считать, что **эндоморфизм является конечно кратным накрытием кратности не менее двух**. В частности, эндоморфизм является локальным гомеоморфизмом на всей поверхности.

Известно, что одномерный растягивающийся аттрактор А-диффеоморфизма $f : M^2 \to M^2$ замкнутой поверхности $M^2$ локально гомеоморфен произведению канторовского множества на отрезок. Следующее утверждение контрастирует с ситуацией, когда эндоморфизм является диффеоморфизмом, даже если аттрактор эндоморфизма строго инвариантный и имеет однозначно определенное неустойчивое расслоение (для диффеоморфизма это выполняется автоматически).

**Теорема 1.1** *Пусть $f : M^2 \to M^2$ – А-эндоморфизм замкнутой ориентируемой поверхности $M^2$, и пусть $\Omega$ – одномерный растягивающийся аттрактор с однозначно определенным неустойчивым расслоением. Если $\Omega$ – строго инвариантный аттрактор, а $f$ не является диффеоморфизмом, то $\Omega$ локально гомеоморфен произведению интервала на нульмерное конечное замкнутое множество.*

Если опустить требование на строгую инвариантность, то теорема 1.1 становится неверной. Отметим также, что аналог теоремы 1.1 не имеет место, вообще говоря, для эндоморфизмов трехмерных многообразий. Достаточно рассмотреть произведение $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^1$ двумерного $\mathbb{T}^2$ и одномерного $\mathbb{T}^1$ торов. На первом множителе $\mathbb{T}^2$ зададим ДА-диффеоморфизм с изолированным источником и нетривиальным одномерным растягивающимся аттрактором, а на втором множителе $\mathbb{T}^1$ зададим линейный растягивающий эндоморфизм вида $x \mapsto 2x\, mod\, 1$. Результирующий эндоморфизм будет иметь растягивающийся строго инвариантный однозначно гиперболический аттрактор, который локально гомеоморфен произведению канторовского множества на двумерную плоскость, то есть не будет конечным объединением топологических подмногообразий коразмерности один.

Следующая теорема показывает, что теорема 1.1 не верна для сжимающихся одномерных репеллеров (иногда, для краткости, одномерное базисное множество, локально гомеоморфное произведению канторовского множества на отрезок, называют базисным множеством *канторовского типа*).

**Теорема 1.2** *Пусть $f : M^2 \to M^2$ – A-эндоморфизм замкнутой ориентируемой поверхности $M^2$, и пусть $\Lambda_r$ – одномерный сжимающийся репеллер с однозначно определенным неустойчивым расслоением. Если $\Lambda_r$ – строго инвариантный репеллер, а $f$ не является диффеоморфизмом, то $\Lambda_r$ локально гомеоморфен произведению отрезка на канторовское множество.*

Структура статьи следующая. В параграфе 2. приводятся предварительные сведения и доказываются вспомогательные результаты. В параграфе 3. доказываются основные теоремы.

## 2. Вспомогательные результаты

Пусть $\Lambda$ – гиперболическое множество $C^k$-эндоморфизма $f : M \to M$ $(k \geq 1)$, и пусть $p \in \Lambda$. Известно [1], [12], [13], что для достаточно малого $\delta > 0$ множество

$$W^s_{\delta,loc}(p) = \{x \in M \ : \ \varrho\left(f^i(p); f^i(x)\right) < \delta \ \ \forall i \geq 0\}$$

является $C^k$-вложенным открытым диском $\mathbb{B}^{\dim \mathbb{E}^s(p)}$ с касательным пространством $\mathbb{E}^s(p)$ в точке $p$, и для любой точки $x \in W^s_{\delta,loc}(p)$

$$\varrho\left(f^i(p); f^i(x)\right) \longrightarrow 0 \text{ экспоненциально быстро при } i \to \infty.$$

Множество $W^s_{\delta,loc}(p)$ называется *локальным устойчивым многообразием* в точке $p$. *Глобально устойчивым многообразием* (или, просто устойчивым многообразием) в точке $p$ называется множество

$$W^s(p) = \{x \in M \ : \ \varrho\left(f^i(p); f^i(x)\right) \longrightarrow 0 \text{ при } i \to \infty\}.$$

Если $\Lambda$ – компактное гиперболическое множество, то число $\delta$ можно взять так, чтобы были определены локальные устойчивые многообразия $W^s_{\delta,loc}(z)$ для всех точек $z \in \Lambda$. Тогда глобальное устойчивое многообразие $W^s(p)$ можно представить следующим образом

$$W^s(p) = \bigcup_{i \geq 0} Comp_p f^{-i}\left[W^s_{\delta,loc}(p_i)\right], \text{ где } p_i = f^i(p),$$

где через $Comp_z K$ обозначается компонента связности множества $K$, содержащая $z$.

В отличие от устойчивых расслоений $\mathbb{E}^s$, неустойчивые расслоения зависят не только от точки, но и от отрицательной полу-орбиты точки. Пусть $O^-(p) \subset \Lambda$ – отрицательная полу-орбита точки $p \in \Lambda$. Согласно[1], [12], [13] для достаточно малого $\delta > 0$ множество

$$W^u_{\delta,loc}\left(O^-(p)\right) = \{x \in M \ : \ \exists O^-(x), \ \varrho\left(p_{-i}; x_{-i}\right) < \delta \ \forall i \geq 0, \ p_{-i} \in O^-(p), \ x_{-i} \in O^-(x)\}$$

является $C^k$-вложенным открытым диском $\mathbb{B}^{\dim \mathbb{E}^u(O^-(p))}$ с касательным пространством, который мы будем обозначать через $\mathbb{E}^u\left(O^-(p)\right)$, в точке $p$. Более того, для любой вышеприведенной точки $x \in W^u_{\delta,loc}\left(O^-(p)\right)$

$$\varrho\left(p_{-i}; x_{-i}\right) \longrightarrow 0 \text{ экспоненциально быстро при } i \to \infty.$$

Множество $W^u_{\delta,loc}\left(O^-(p)\right)$ называется *локальным неустойчивым многообразием* относительно отрицательной полу-орбиты $O^-(p)$ в точке $p$. *Глобально неустойчивым многообразием* (или, просто неустойчивым многообразием) относительно отрицательной полу-орбиты $O^-(p)$ в точке $p$ называется множество

$$W^u\left(O^-(p)\right) = \{x \in M \ : \ \exists O^-(x),\ \varrho\left(p_{-i}; x_{-i}\right) \to 0 \text{ при } i \to \infty,$$

$$\text{где } p_{-i} \in O^-(p),\ x_{-i} \in O^-(x)\},$$

которое можно представить в виде

$$W^u\left(O^-(p)\right) = \bigcup_{i \geq 0} f^i\left(W^u_{\delta,loc}\left(O^-(p_{-i})\right)\right),\ \text{где } p_{-i} \in O^-(p).$$

Устойчивые и неустойчивые многообразия называются инвариантными многообразиями.

Следующее известное утверждение мы приводим для ссылок, см. [14], [15].

**Предложение 2.1** *Если $\Omega$ – одномерный растягивающийся аттрактор с однозначно определенным неустойчивым расслоением, то $\Omega \subset clos\, W^u(x)$ для любой точки $x \in \Omega$. Если $\Lambda_r$ – одномерный сжимающийся и строго инвариантный репеллер с однозначно определенным неустойчивым расслоением, то $\Lambda_r \subset clos\, W^s(x)$ для любой точки $x \in \Lambda_r$.*

**Лемма 2.1** *Пусть $f : M^2 \to M^2$ – A-эндоморфизм замкнутой поверхности $M^2$, и пусть $\Omega$ – одномерный растягивающийся аттрактор с однозначно определенным неустойчивым расслоением. Тогда множество $W^s(\Omega)$ открытое.*

*Доказательство* вытекает из наличия структуры произведения на $\Omega$ $\Box$

**Лемма 2.2** *Пусть $f : M^2 \to M^2$ – A-эндоморфизм замкнутой поверхности $M^2$, и пусть $\Omega$ – одномерный растягивающийся аттрактор с однозначно определенным неустойчивым расслоением. Если существует трансверсально неизолированная точка $x_0 \in \Omega$, то любая точка $x \in \Omega$ также является трансверсально неизолированной.*

*Доказательство.* Не уменьшая общности, можно считать, что $\Omega$ является C-плотным базисным множеством (в противном случае, перейдем к некоторой итерации $f$). Тогда $\Omega \subset closW^u(x_0)$. Отсюда следует, что $W^u(x_0)$ пересекает $W^s_\delta(x)$ для произвольно малого $\delta > 0$. Из непрерывной зависимости неустойчивых многообразий (которые определены однозначно) вытекает, что все близкие к $x_0$ неустойчивые многообразия пересекают $W^s_\delta(x)$. Отсюда и трансверсальной неизолированности точки $x_0$ следует трансверсальная неизолированность точки $x$. $\Box$

**Следствие 2.1** *Пусть выполнены условия леммы 2.2. Тогда $\Omega$ локально гомеоморфно произведению отрезка либо на точку, либо на канторовское множество.*

*Доказательство.* Поскольку $\Omega$ – одномерный растягивающийся аттрактор с однозначно определенным неустойчивым расслоением, то $\Omega$ локально гомеоморфно произведению отрезка на замкнутое нульмерное (следовательно, нигде не плотное) множество. Это множество, согласно леммы 2.2, либо состоит из изолированных точек, либо из неизолированных точек. В первом случае, число точек конечно, поскольку $\Omega$ компактное, и мы можем ограничится одной точкой. Во втором случае, множество совершенное и, следовательно, канторовское. $\square$

## 3. Доказательство основных результатов

Напомним, что базисное множество $\Omega$ A-эндоморфизма $f : M^2 \to M^2$ называется *строго инвариантным*, если

$$f^{-1}(\Omega) = \Omega = f(\Omega).$$

*Доказательство теоремы 1.1.* Не уменьшая общности, можно считать, что $\Omega$ является C-плотным базисным множеством (в противном случае, перейдем к некоторой итерации $f$). Тогда, согласно предложению, 2.1, $\Omega \subset closW^u(x_0)$ для любой точки $x \in \Omega$.

Согласно следствию 2.1, $\Omega$ локально гомеоморфно произведению отрезка либо на точку, либо на канторовское множество. В силу однозначности неустойчивого расслоения, $\Omega$ есть объединение неустойчивых одномерных многообразий своих точек [14], Теорема 1. Известно, что неустойчивые многообразия локально являются гладкими вложениями евклидовых пространств соответствующей размерности [1], [12]. Поэтому если предположить, что $\Omega$ локально гомеоморфно произведению отрезка на точку, то тогда $\Omega$ является замкнутым одномерным гладким многообразием, а ограничение $f_\Omega : \Omega \to \Omega$ есть растягивающий эндоморфизм [14]. В этом случае теорема доказана.

Осталось показать, что $\Omega$ не может быть локально гомеоморфным произведению отрезка на канторовское множество. Предположим противное. Дальнейшее доказательство разобьем на утверждения, которое мы будем называть *шагами*. Конец доказательства такого утверждения обозначается через $\diamondsuit$.

Обозначим через $\mathcal{N}$ множество точек $x \in \Omega$ таких, что одна из компонент множества $W^s(x) \setminus \{x\}$ не пересекается с $\Omega$.

**Шаг 1.** Множество $\mathcal{N}$ является строго инвариантным множеством, т.е.

$$f^{-1}(\mathcal{N}) = \mathcal{N} = f(\mathcal{N}).$$

*Доказательство шага 1.* Возьмем произвольную точку $x \in \mathcal{N} \subset \Omega$. Так как $f^{-1}(\Omega) = \Omega = f(\Omega)$, то $f(x) \cup f^{-1}(x) \subset \Omega$. Предположим, что $x_1 = f(x) \notin N$. Это означает, что обе компоненты $W^{\pm s}(x_1)$ множества $W^s(x_1) \setminus \{x_1\}$ пересекаются с $\Omega$. Обозначим через $W^{-s}(x)$ и $W^{+s}(x)$ компоненты множества $W^s(x) \setminus \{x\}$. Если образ под действием $f$ одной из этих компонент пересекается с обоими компонентами $W^{\pm s}(x_1)$, то на этой компоненте должна быть точка, в которой нарушается условие локальной гомеоморфности $f$, поскольку $x_1 = f(x)$. Поэтому, не уменьшая общности, можно считать, что $f(W^{-s}(x)) = W^{-s}(x_1)$ и $f(W^{+s}(x)) = W^{+s}(x_1)$. Поскольку $f^{-1}(\Omega) = \Omega$, то на каждой из компонент $W^{-s}(x)$ и $W^{+s}(x)$ должны быть точки из $\Omega$. Это противоречит включению $x \in \mathcal{N} \subset \Omega$. Таким образом, $f(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N}$.

Предположим, что точка $x_{-1} \in f^{-1}(x)$ не принадлежит $\mathcal{N}$. Это означает, что обе компоненты $W^{\pm s}(x_{-1})$ множества $W^s(x_{-1}) \setminus \{x_{-1}\}$ пересекаются с $\Omega$. Аналогично предыдущему показывается, что $f(W^{-s}(x_{-1})) = W^{-s}(x)$ и $f(W^{+s}(x_{-1})) = W^{+s}(x)$. Так как $\Omega = f(\Omega)$, то на каждой компоненте $W^{\pm s}(x)$ имеются точки из $\Omega$. Это противоречит включению $x \in \mathcal{N} \subset \Omega$. Таким образом, $f^{-1}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N}$, и следовательно, $\mathcal{N} \subset f(\mathcal{N})$. Учитывая включение $f(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N}$, получаем $\mathcal{N} = f(\mathcal{N})$. Отсюда $f^{-1}(\mathcal{N}) = f^{-1} \circ f(\mathcal{N}) \supset \mathcal{N}$ и, следовательно $f^{-1}(\mathcal{N}) = \mathcal{N}$. $\diamondsuit$

**Шаг 2.** Если точка $x \in \Omega$ принадлежит бесконечной орбите $O(x) \subset \Omega$, то $x \notin \mathcal{N}$. Более того, обе компоненты множества $W^s(x) \setminus \{x\}$ пересекаются с $\Omega$ сколь угодно близко к точке $x$.

*Доказательство шага 2.* Ясно, что отрицательная полуорбита $O^-(x) \subset \Omega$ также бесконечная. Из $O^-(x) \subset \Omega$ выберем сходящуюся последовательность $x_i \in f^{-n_i}(x) \to x_* \in M^2$, где $f^{n_i}(x_i) = x$, $n_i \to \infty$. Поскольку $f^{-1}(\Omega) = \Omega$, то такая последовательность существует. Так как множество $\Omega$ замкнутое, то $x_* \in \Omega$. В силу предположения о противном, обе компоненты множества $W^s(x_*) \setminus \{x_*\}$ пересекаются с $\Omega$. Из непрерывной зависимости устойчивых многообразий от начальных условий вытекает, что существует число $\alpha > 0$ такое, что $W^s_{\pm\alpha}(x_i) \cap \Omega \neq \emptyset$ для всех достаточно больших $i$, где $W^s_{\pm\alpha}(x_i)$ означает дуги кривой $W^s(x)$ длины $\alpha$ (во внутренней топологии кривой $W^s(x)$) с концевой точкой $x$. Поскольку множество $\Omega$ инвариантное, а $f^{n_i}$ равномерно сжимает $W^s_{\pm\alpha}(x_i)$, то в силу шага 1 имеем

$$f^{n_i}\left(W^s_{\pm\alpha}(x_i)\right) \cap \Omega = W^s_{\pm\varepsilon_i}\left(f^{n_i}(x_i)\right) \cap \Omega = W^s_{\pm\varepsilon_i}(x) \cap \Omega \neq \emptyset, \text{ и } \varepsilon_i \to 0 \text{ при } i \to \infty.$$

Это означает, что обе компоненты множества $W^s(x) \setminus \{x\}$ пересекаются с $\Omega$ сколь угодно близко к точке $x$. Полученное противоречие доказывает утверждение. $\diamondsuit$

Поскольку $f$ не является диффеоморфизмом, то любая точка из $\Omega$ принадлежит бесконечной орбите, которая лежит в $\Omega$. Следовательно, $\mathcal{N} = \emptyset$. Покажем, для любой точки $y \in \Omega$ устойчивое многообразие $W^s(y)$ принадлежит $\Omega$. Предположим противное. Так как $\Omega$ суть замкнутое множество, то множество $W^s(y) \setminus \Omega$ состоит из непустых (нетривиальных) интервалов. Поскольку $\Omega$ локально гомеоморфно произведению отрезка на канторовское множество, то имеются концевые точки $z \in W^s(y) \cap \Omega$ этих интервалов, к которым с одной из сторон на кривой $W^s(z)$ не накапливаются точки из $\Omega$. Это противоречит шагу 2. Таким образом, $W^s(y) \subset \Omega$ для любой точки $y \in \Omega$. Тогда из теоремы о непрерывной зависимости неустойчивых многообразий от начальных условий и предложения 2.1 вытекает равенство $W^s(\Omega) = \Omega$. Согласно лемме 2.1, множество $W^s(\Omega) = \Omega$ является открытым. Поскольку множество $\Omega$ замкнутое, то $\Omega = M^2$. Это противоречит тому, что $\Omega$ является аттрактором и следовательно, имеет притягивающую область, т.е. $\Omega \neq M^2$. Полученное противоречие доказывает, что $\Omega$ не может быть локально гомеоморфным произведению отрезка на канторовское множество. $\square$

*Доказательство теоремы 1.2.* Не уменьшая общности, можно считать, что $\Lambda_r$ является C-плотным базисным множеством (в противном случае, перейдем к некоторой итерации $f$). Согласно предложению, 2.1, $\Lambda_r \subset clos\, W^s(x)$ для любой точки $x \in \Lambda_r$. Тогда полностью аналогично доказательству следствия 2.1 показывается, что $\Lambda_r$ локально гомеоморфно произведению отрезка либо на точку, либо на канторовское множество. Покажем, что первая возможность не реализуется. Предположим противное. Тогда $\Lambda_r$ есть гладкое одномерное замкнутое многообразие. В силу гиперболичности, $\Lambda_r$ не имеет границы и, следовательно, $\Lambda_r$ является гладко вложенной окружностью. Поскольку $\Lambda_r$ суть сжимающийся репеллер и состоит из устойчивых многообразий своих точек, то из равномерного сжатия вытекает, что существует итерация $f^l$, $l \in \mathbb{N}$, такая, что отображение $f^l|_{\Lambda_r} : \Lambda_r \to \Lambda_r$ имеет производную $0 < Df^l|_{\Lambda_r} \leq \alpha < 1$ для некоторого $\alpha > 0$ (если ввести ляпуновскую метрику, то $l = 1$). Обозначим через $|\Lambda_r|$ длину окружности $\Lambda_r$. Учитывая равенство $f^l|_{\Lambda_r}(\Lambda_r) = \Lambda_r$, получаем

$$|\Lambda_r| = |f^l|_{\Lambda_r}(\Lambda_r)| = |\int_{\Lambda_r} Df^l|_{\Lambda_r} dx| \leq \alpha \cdot |\Lambda_r|,$$

чего не может быть. Полученное противоречие показывает, что $\Lambda_r$ локально гомеоморфен произведению отрезка на канторовское множество. $\square$

**Благодарности**. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (РНФ, проект № 17-11-01041).

## Список литературы


1. Przytycki F. On Omega-stability and structural stability of endomorphisms satisfying Axiom A. Studia Math. 1977. vol. 60. pp. 61 - 77.

2. Smale S. Differentiable dynamical systems. Bull. Amer. Math. Soc. 1967. vol. 73. pp. 747 - 817.

3. Гринес В.З. О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных базисных множествах // Успехи мат. наук. 1974. Т. 29, № 6. С. 163 - 164.

4. Гринес В.З. О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах I // Труды ММО. 1975. Т. 32. С. 35 - 60.

5. Гринес В.З. О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах II // Труды ММО. 1977. Т. 34. С. 243 - 252.

6. Гринес В.З. О топологической классификации структурно устойчивых диффеоморфизмов поверхностей с одномерными аттракторами и репеллерами // Матем. сборник. 1997. Т. 188. С. 57 - 94.

7. Гринес В.З., Жужома Е.В. О топологической классификации ориентируемых аттракторов на $n$-мерном торе // Успехи мат. наук. 1979. Т. 34, № 4. С. 185 - 186.

8. Гринес В.З., Жужома Е.В. О грубых диффеоморфизмах с растягивающимися аттракторами и сжимающимися репеллерами коразмерности один // Доклады РАН. 2000. Т. 374. С. 274 - 276.

9. Плыкин Р.В. Источники и стоки A-диффеоморфизмов поверхностей // Матем. сб. 1974. Т. 94.

10. Grines V., Zhuzhoma E. On structurally stable diffeomorphisms with codimension one expanding attractors. Trans. Amer. Math. Soc. 2005. vol. 357, No.2. pp. 617 - 667.

11. Shub M. Endomorphisms of compact differentiable manifolds. Amer. Journ. Math. 1969. vol. 91. pp. 175 - 199.

12. Ikegami G. Hyperbolic sets and axiom A for endomorphisms. Proc. of Inst. of Natural Sciences, Nihon Univ. 1991. vol. 26. pp. 69 - 86.

13. Przytycki F. Anosov endomorphisms. Studia Math. 1976. vol. 58, No. 3. pp. 249 - 285.

14. Гринес В., Куренков Е. Д. О гиперболических аттракторах и репеллерах эндоморфизмов // Нелинейная динамика. 2017. Т. 13, № 4. С. 557 - 571.

15. Newhouse S. On codimension one Anosov diffeomorphisms. Amer. J. of Math. 1970. vol. 92, No. 3. pp. 761 - 770.

*Поступила 7.10.2020*

*MSC2020 37D05*

# On local structure of one-dimensional basic sets of non-reversible A-endomorphisms of surfaces

**© V. Z. Grines[1], E. V. Zhuzhoma[2]**

**Abstract.** Recently the authors of the article discovered a meaningful class of non-reversible endomorphisms on a two-dimensional torus. A remarkable property of these endomorphisms is that their non-wandering sets contain nontrivial one-dimensional strictly invariant hyperbolic basic sets (in the terminology of S. Smale and F. Pshetitsky) which have the uniqueness of an unstable one-dimensional bundle. It was proved that nontrivial (other than periodic isolated orbits) invariant sets can only be repellers. Note that this is not the case for reversible endomorphisms (diffeomorphisms). In the present paper, it is proved that one-dimensional expanding uniquely hyperbolic and strictly invariant one-dimensional expanding attractors and one-dimensional contracting repellers of non-reversible A-endomorphisms of closed orientable surfaces have the local structure of the product of an interval by a zero-dimensional closed set (finite or Cantor). This result contrasts with the existence of one-dimensional fractal repellers arising in complex dynamics on the Riemannian sphere and not possessing the properties of the existence of a single one-dimensional unstable bundle.

**Key Words:** non-reversible A-endomorphisms, hyperbolic basic set, endomorphisms of surfaces

## References

1. F. Przytycki, "On Ω-stability and structural stability of endomorphisms satisfying Axiom A", *Studia Math.*, **60** (1977), 61 – 77.

2. S. Smale, "Differentiable dynamical systems", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747 – 817.

3. V. Z. Grines, "The topological equivalence of one-dimensional basic sets of diffeomorphisms on two-dimensional manifolds", *Uspehi Mat. Nauk*, **29**:6 (1974), 163 – 164 (In Russ.).

4. V. Z. Grines, "On topological conjugacy of diffeomorphisms of a two-dimensional manifold onto one-dimensional orientable basic sets I", *Trans. Moscow Math. Soc.*, **32** (1977), 31 – 56.

5. V. Z. Grines, "On topological conjugacy of diffeomorphisms of a two-dimensional manifold onto one-dimensional orientable basic sets II", *Trans. Moscow Math. Soc.*, **34** (1978), 237 – 245.

[1]**Vyacheslav Z. Grines**, Chief Researcher, International Laboratory of Dynamical Systems and Applications, National Research University Higher School of Economics (603155, Nizhnii Novgorod, B. Pechyorskaya str., 25/12), Dr. Sci. (Phys.-Math.), ORCID: http://orcid.org/ 0000-0003-4709-6858, vgrines@yandex.ru

[2]**Evgenii V. Zhuzhoma**, professor of Fundamentsl Mathematics Department, National Research University Higher School of Economics (603155, Nizhnii Novgorod, B. Pechyorskaya str., 25/12), Dr. Sci. (Phys.-Math.), ORCID: http://orcid.org/ 0000-0001-7607-2797, zhuzhoma@mail.ru

6. V. Z. Grines, “On the topological classification of structurally stable diffeomorphisms of surfaces with one-dimensional attractors and repellers”, *Sb. Math.*, **188**:4 (1997), 537 – 569.

7. V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, “The topological classification of orientable attractors on an n-dimensional torus”, *Russian Math. Surveys*, **34**:4 (1979), 163 – 164.

8. V. Z. Grines, E.V. Zhuzhoma, “On rough diffeomorphisms with expanding attractors and contracting repellers of codimension one”, *Doklady RAN*, **374** (2000), 274 –276 (In Russ.).

9. R. V. Plykin, “Sinks and Sources of A-diffeomorphisms of surfaces”, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, **23**:2 (1974), 233 – 254.

10. V. Grines, E. Zhuzhoma, “On structurally stable diffeomorphisms with codimension one expanding attractors”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **357**:2 (2005), 617 – 667.

11. M. Shub, “Endomorphisms of compact differentiable manifolds.”, *Amer. Journ. Math.*, **91** (1969), 175 – 199.

12. G. Ikegami, “Hyperbolic sets and axiom A for endomorphisms”, *Proc. of Inst. of Natural Sciences, Nihon Univ.*, **26** (1991), 69 – 86.

13. F. Przytycki, “Anosov endomorphisms”, *Studia Math.*, **58**:3 (1976), 249 – 285.

14. V. Z. Grines, E. V. Kurenkov, “On hyperbolic attractors and repellers of endomorphisms”, *Nelineinaya dynamika*, **13**:4 (2017), 557 – 571 (In Russ.).

15. S. Newhouse, “On codimension one Anosov diffeomorphisms”, *Amer. J. of Math.*, **92**:3 (1970), 761 – 770.

*Submitted 7.10.2020*