

МАТЕМАТИКА

Идентификатор DOI 10.15507/2079-6900.22.202004.405-423

УДК 519.63

Приближенные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений на числовой оси© И. В. Бойков¹, П. В. Айкашев², А. И. Бойкова³

Аннотация. В работе исследованы приближенные методы решения линейных и нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений, определенных на числовой оси. Рассматриваются уравнения, имеющие особенности второго порядка, т. к. уравнения с такими сингулярностями находят широкое применение при моделировании проблем в естествознании и технологиях. Для решения линейных гиперсингулярных интегральных уравнений предложены три вычислительные схемы. Первая основана на технологии метода механических квадратур. В качестве базисных выбираются рациональные функции. Вторая вычислительная схема основана на сплайн-коллокационном методе со сплайнами первого порядка. В третьей вычислительной схеме используются сплайны нулевого порядка. При обосновании и реализации вычислительных схем используется непрерывный метод решения операторных уравнений. Его применение позволяет ослабить требования, налагаемые на исходное уравнение: достаточно потребовать его разрешимости при данной правой части. Непрерывный операторный метод основан на Ляпуновской теории устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений и это обуславливает его устойчивость к возмущениям коэффициентов и правых частей. Приближенные методы решения нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений изложены на примере уравнения Пейрлса-Наборро, моделирующего ряд задач теории дислокаций. Для решения этого уравнения построены, по аналогии с линейными гиперсингулярными интегральными уравнениями, три вычислительные схемы. Их обоснование и реализация основаны на непрерывном методе решения операторных уравнений. На примере решения уравнения Пейрлса-Наборро продемонстрирована эффективность предложенных численных методов.

Ключевые слова: линейные и нелинейные гиперсингулярные интегральные уравнения, непрерывный операторный метод, метод коллокации, метод механических квадратур

1. Введение

Теория сингулярных интегральных уравнений, зародившаяся в начале XX в. в трудах Д. Гильберта и А. Пуанкаре, и в настоящее время переживает бурное развитие. Это обусловлено многочисленными связями методов сингулярных интегральных уравнений с задачами физики и техники. В последнее время методы сингулярных интегральных уравнений тесно переплетаются с методами гиперсингулярных интегральных уравнений (ГИУ). Интересно отметить, что несмотря на то что понятие гиперсингулярного

¹Бойков Илья Владимирович, заведующий кафедрой высшей и прикладной математики, ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, д. 40), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6980-933X>, boikov@pnzgu.ru

²Айкашев Павел Владимирович, ассистент кафедры высшей и прикладной математики, ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, д. 40), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8076-4662>, aikashev.pavel@mail.ru

³Бойкова Алла Ильинична, доцент кафедры высшей и прикладной математики, ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, д. 40), кандидат физико-математических наук, ORCID: 0000-0003-0436-0460, allaboikova@mail.ru

интеграла (интеграла в смысле Адамара) было введено в начале XX в. [1], активное развитие направления, связанного с исследованиями гиперсингулярных интегральных уравнений, началось только в середине прошлого века, когда было обнаружено, что такими уравнениями моделируются задачи аэродинамики [2]. Позднее были опубликованы монографии [3–4], в которых методы гиперсингулярных интегральных уравнений привлекались к решению задач механики и аэродинамики.

В настоящее время гиперсингулярные интегральные уравнения находят широкое применение при моделировании задач аэродинамики, электродинамики, микроэлектроники, теории антенн, геофизики, атомной и ядерной физики и в ряде других областей естествознания и техники. При этом число областей, в которых применяются методы гиперсингулярных интегральных уравнений, постоянно расширяется. Наряду с прикладными аспектами гиперсингулярные интегральные уравнения находят применение в различных разделах математической физики. В частности, краевая задача Римана в исключительных случаях [5] приводит к гиперсингулярным интегральным уравнениям. Метод граничных интегральных уравнений трансформирует уравнения математической физики в гиперсингулярные интегральные уравнения с понижением размерности уравнения на единицу.

Обзор аналитических и численных методов решения гиперсингулярных интегральных уравнений представлен в [6–7].

Работа построена следующим образом. В первом разделе даны определения гиперсингулярных интегралов, описаны классы функций, используемые в работе, представлен один класс интерполяционных рациональных полиномов, определенных на интервале $(-\infty, \infty)$, и приведен непрерывный метод решения нелинейных операторных уравнений.

Второй раздел посвящен приближенным методам решения гиперсингулярных интегральных уравнений, определенных на числовой оси.

В третьем разделе исследуются приближенные методы решения одного класса нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений.

В четвертом разделе приведены примеры, иллюстрирующие эффективность предложенных вычислительных схем.

2. Вспомогательные утверждения

2.1. Классы функций и обозначения

В этом разделе приведены классы функций, используемые в статье.

Пусть $A = [a, b]$.

О п р е д е л е н и е 2.1 *Класс функций Гельдера $\mathbb{H}_\alpha(M; A)$ ($0 < \alpha \leq 1$) состоит из заданных на A функций $f(x)$, удовлетворяющих во всех точках x' и x'' этого множества неравенству $|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|^\alpha$.*

В случае, когда из текста ясно, на каком множестве рассматриваются функции, вместо $\mathbb{H}_\alpha(M; A)$ будем писать $\mathbb{H}_\alpha(M)$. Это замечание относится и к остальным классам функций.

О п р е д е л е н и е 2.2 *Класс $\mathbb{W}^r(M; A)$ состоит из функций, заданных на A , непрерывных и имеющих непрерывные производные до $(r - 1)$ -го порядка включительно и кусочно-непрерывную производную r -го порядка, удовлетворяющую на этом множестве неравенству $|f^{(r)}(x)| \leq M$.*

О п р е д е л е н и е 2.3 Класс $\mathbb{W}^r \mathbb{H}_\alpha(M; A)$ состоит из функций $f(x)$, принадлежащих классу $\mathbb{W}^r(M; A)$ и удовлетворяющих дополнительному условию $f^{(r)}(x) \in \mathbb{H}_\alpha(M)$.

2.2. Определения гиперсингулярных интегралов

О п р е д е л е н и е 2.4 [1]. Пусть $A(t) \in \mathbb{W}^p(M)$. Интеграл вида $\int_a^b \frac{A(t) dt}{(b-t)^{p+\alpha}}$ при целом p и $0 < \alpha < 1$ определяет величину («конечную часть») рассматриваемого интеграла как предел при $x \rightarrow b$ суммы

$$\int_a^x \frac{A(t) dt}{(b-t)^{p+\alpha}} + \frac{B(x)}{(b-x)^{p+\alpha-1}}.$$

Здесь $B(x)$ — любая функция, на которую налагаются два условия:

- а) рассматриваемый предел существует;
- б) $B(x) \in \mathbb{W}^p$.

Долгое время эти интегралы назывались интегралами Адамара. В настоящее время их называют гиперсингулярными интегралами.

О п р е д е л е н и е 2.5 [5]. Пусть $\varphi(t) \in \mathbb{W}^{p-1} \mathbb{H}_\alpha(M)$, $0 < \alpha \leq 1$. Интегралом $\int_a^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-c)^p}$, $a < c < b$, в смысле главного значения Коши-Адамара называется предел

$$\int_a^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-c)^p} = \lim_{v \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-v} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-c)^p} + \int_{c+v}^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-c)^p} + \frac{\xi(v)}{v^{p-1}} \right],$$

где $\xi(v) \in \mathbb{W}^{p-1}$ — некоторая функция, выбранная так, чтобы указанный предел существовал.

В конечных точках a и b гиперсингулярный интеграл может быть определен следующим образом.

О п р е д е л е н и е 2.6 Пусть $\varphi(t) \in \mathbb{W}^p(M)$. Интегралом $\int_a^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-a)^p}$ называется предел

$$\int_a^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-a)^p} = \lim_{v \rightarrow 0} \left[\int_{a+v}^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-a)^p} + \frac{\xi(v)}{v^{p-1}} + \xi_1(v) \ln |v| \right],$$

где $\xi(v)$ — некоторая функция, имеющая непрерывные производные до $(p-1)$ -го порядка, удовлетворяющие условию Дини-Липшица; $\xi_1(v)$ — некоторая функция, удовлетворяющая условию Дини-Липшица в окрестности нуля. Функции $\xi(v)$ и $\xi_1(v)$ выбираются так, чтобы указанный предел существовал.

2.3. Интерполяционные полиномы

При построении вычислительных схем используется интерполяционный полином вида

$$P_n(t) = \sum_{k=-n}^n f(t_k) \psi_k(t), \quad (2.1)$$

где $\psi_k(t)$ – фундаментальные полиномы по узлам $t_k = tg \frac{k\pi}{2n+1}$, $k = -n, \dots, n$,

$$\psi_k(t) = \frac{2}{2n+1} \left(\frac{1}{2} + \sum_{l=1}^n c_l(t) c_l(t_k) + s_l(t) s_l(t_k) \right), \quad (2.2)$$

$$c_l(t) = \cos(2l \arctg t), \quad s_l(t) = \sin(2l \arctg t).$$

Остановимся на свойствах функций $c_l(t)$ и $s_l(t)$ и прежде всего, следуя [8], покажем, что $c_l(t)$ и $s_l(t)$ являются рациональными функциями от t . Действительно,

$$\sin(2n\Theta) = C_{2n}^1 \cos^{2n-1} \Theta \sin \Theta - C_{2n}^3 \cos^{2n-3} \Theta \sin^3 \Theta + \dots \pm C_{2n}^{2n-1} \cos \Theta \sin^{2n-1} \Theta.$$

Полагая $\Theta = \arctg t$ и используя формулы $\cos \Theta = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $\sin \Theta = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, имеем

$$\sin(2n \arctg t) = \sum_{k=1}^n \frac{C_{2n}^{2k-1} t^{2k-1} (-1)^{k+1}}{(1+t^2)^n}, \quad n \neq 0, \quad \cos(2n \arctg t) = \sum_{k=0}^n \frac{C_{2n}^{2k} t^{2k} (-1)^k}{(1+t^2)^n}.$$

Функции $c_l(t)$ и $s_l(t)$ обладают следующими важными свойствами [8]:

- 1) $s_n(t) = -Im \left(\frac{1-it}{1+it} \right)^n$, $c_n(t) = Re \left(\frac{1-it}{1+it} \right)^n$;
- 2) Система функций $\{s_n(t), c_n(t)\}$, $n = 0, 1, \dots, \infty$, является ортогональной с весом $\frac{1}{1+t^2}$ на интервале $(-\infty, \infty)$;
- 3) Обозначим через H преобразование Гильберта $(Hf)(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{\tau-t} d\tau$.

Справедливы формулы [8]

$$Hc_n = -s_n, \quad Hs_n = c_n + (-1)^{n+1}. \quad (2.3)$$

2.4. Непрерывный метод решения нелинейных операторных уравнений

При решении гиперсингулярных интегральных уравнений успешно применяется непрерывный метод решения нелинейных операторных уравнений [9–10]. Приведём, следуя [11], его краткое описание.

Пусть \mathbb{X} – банахово пространство; K – оператор, действующий из \mathbb{X} в \mathbb{X} ; $B(a, r) = \{x, a \in \mathbb{X} : \|x-a\| \leq r\}$; $S(a, r) = \{x, a \in \mathbb{X} : \|x-a\| = r\}$; $\Lambda(K)$ – логарифмическая норма линейного оператора K , определяемая [12] выражением $\Lambda(K) = \lim_{h \downarrow 0} (\|I+hK\| - 1)/h$, где символ $h \downarrow 0$ означает, что h стремится к нулю, убывая.

Для матриц в часто используемых пространствах логарифмические нормы известны.

Пусть дана вещественная матрица $A = \{a_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, в n -мерном пространстве R_n векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$ с нормой

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad \|x\|_2 = \left[\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right]^{1/2}, \quad \|x\|_3 = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

Логарифмическая норма матрицы A равна [13]:

$$\Lambda_1(A) = \max_j (a_{jj} + \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}|), \quad \Lambda_2(A) = \lambda_{\max} \left(\frac{A + A^T}{2} \right), \quad \Lambda_3(A) = \max_i (a_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|).$$

Здесь $\lambda_{\max}((A + A^T)/2)$ – наибольшее собственное значение матрицы $(A + A^T)/2$. Рассматривается нелинейное операторное уравнение

$$A(x) - f = 0, \quad (2.4)$$

где $A : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ – нелинейный оператор, отображающий банахово пространство X в себя.

Поставим в соответствие уравнению (2.4) задачу Коши:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(x(t)) - f, \quad (2.5)$$

$$x(0) = x_0. \quad (2.6)$$

Справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 2.1 [11] Пусть задача Коши (2.5)–(2.6) имеет решение x^* , и на любой дифференцируемой кривой $g(t)$, расположенной в шаре $B(x^*, r)$, выполняются следующие условия:

$$1) \text{ при любом } t \ (t > 0) \text{ выполняется неравенство } \int_0^t \Lambda(A'(g(\tau))) \, d\tau \leq 0;$$

$$2) \text{ справедливо неравенство } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \Lambda(A'(g(\tau))) \, d\tau \leq -\alpha_g, \quad \alpha_g > 0.$$

Тогда решение задачи Коши (2.5)–(2.6) при t , стремящемся к бесконечности, сходится к решению x^* уравнения (2.4).

3. Приближенное решение линейных гиперсингулярных интегральных уравнений

Рассмотрим линейное ГИУ вида

$$a(t)x(t) + \frac{b(t)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)d\tau}{(\tau - t)^2} + \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad -\infty < t < \infty. \quad (3.1)$$

3.1. Первая вычислительная схема

Приближенное решение уравнения (3.1) будем искать в виде функции

$$x_n(t) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k \psi_k(t),$$

где $\psi_k(t)$ – фундаментальные полиномы (2.2), построенные по узлам $t_k = tg \frac{k\pi}{2n+1}$, $k = -n, \dots, n$.

Значения коэффициентов α_k , $k = -n, \dots, n$, будем определять из системы алгебраических уравнений, полученных из уравнения (3.1) по технологии метода механических квадратур.

Предварительно вычислим интегралы $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_n(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2}$ и $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s_n(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2}$.

Из определения гиперсингулярного интеграла и формулы (2.3) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_n(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} &= \frac{1}{\pi} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_n(\tau) d\tau}{(\tau-t)} = \frac{d}{dt} (-s_n) = \\ &= -(\cos(2n \arctg t)) 2n \frac{1}{1+t^2} = -2n \frac{1}{1+t^2} c_n(t). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s_n(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} &= \frac{1}{\pi} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s_n(\tau) d\tau}{(\tau-t)} = \frac{d}{dt} c_n(t) = \\ &= -(\sin(2n \arctg t)) 2n \frac{1}{1+t^2} = -2n \frac{1}{1+t^2} s_n(t). \end{aligned}$$

Применим к уравнению (3.1) метод коллокации по узлам $t_k = tg \frac{k\pi}{2n+1}$, $k = -n, \dots, n$. В результате имеем

$$\begin{aligned} a(t_i)\alpha_i + b(t_i) \frac{2}{2n+1} \sum_{k=-n}^n \alpha_k \left(\sum_{l=1}^n 2l \frac{1}{1+t_k^2} (c_l(t_i) c_l(t_k) + s_l(t_i) s_l(t_k)) \right) + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} h(t_i, \tau) x_n(\tau) d\tau = f(t_i), \quad i = -n, \dots, n. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Обозначим через $P_n[f]$ оператор проектирования на множество интерполяционных полиномов вида $\sum_{k=1}^n f(t_k) \psi_k(t)$ по узлам $t_k = -n, \dots, n$.

Систему уравнений (3.2) в операторном виде запишем в виде уравнения

$$\bar{K}_n x_n \equiv P_n \left(a(t) x_n(t) + \frac{b(t)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_n(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} + \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) x_n(\tau) d\tau \right) = P_n(f(t)). \tag{3.3}$$

Для построения вычислительной схемы метода механических квадратур аппроксимируем интегральный оператор $\int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) x_n(\tau) d\tau$ квадратурной формулой

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) x_n(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \tau^2} P_n((1 + \tau^2) h(t, \tau) x_n(\tau)) d\tau + R_n(h(t, \tau) x_n(\tau)) =$$

$$= \frac{\pi}{2n + 1} \sum_{k=-n}^n \left(1 + tg^2 \frac{k\pi}{2n + 1}\right) h\left(t, tg \frac{k\pi}{2n + 1}\right) x_n\left(tg \frac{k\pi}{2n + 1}\right) + R_n(h(t, \tau) x_n(\tau)). \quad (3.4)$$

Получим

$$K_n x_n \equiv P_n \left(a(t) x_n(t) + \frac{b(t)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_n(\tau) d\tau}{(\tau - t)^2} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \tau^2} P_n((1 + \tau^2) h(t, \tau) x_n(\tau)) d\tau \right) = P_n(f(t)).$$

Вычисляя гиперсингулярные интегралы и используя квадратурную формулу (3.4), получим систему уравнений

$$a(t_i) \alpha_i + \frac{2}{2n + 1} b(t_i) \sum_{k=-n}^n \alpha_k \left(\sum_{l=1}^n \frac{2l}{1 + t_k^2} \cos \left(2l \left(\frac{(i - k) \pi}{2n + 1} \right) \right) \right) +$$

$$+ \frac{\pi}{2n + 1} \sum_{k=-n}^n (1 + t_k^2) h(t_i, t_k) \alpha_k = f(t_i), \quad i = -n, \dots, n. \quad (3.5)$$

Системе (3.5) поставим в соответствие систему обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных непрерывным операторным методом:

$$\frac{d\alpha_i(u)}{du} = \lambda_i \left(a(t_i) \alpha_i(u) + \frac{2}{2n + 1} b(t_i) \sum_{k=-n}^n \alpha_k(u) \left(\sum_{l=1}^n \frac{2l}{1 + t_k^2} \cos \left(2l \left(\frac{(i - k) \pi}{2n + 1} \right) \right) \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi}{2n + 1} \sum_{k=-n}^n (1 + t_k^2) h(t_i, t_k) \alpha_k(u) - f(t_i) \right), \quad i = -n, \dots, n. \quad (3.6)$$

Здесь через $\lambda_i = \pm 1, i = -n, \dots, n$, обозначены коэффициенты, подбираемые таким образом, чтобы логрифмическая норма матрицы в левой части системы уравнений (3.5) была отрицательной.

Связь между решением системы уравнений (3.4) и сходимостью системы уравнений (3.6) устанавливается так же, как в случае второй вычислительной схемы.

3.2. Вторая вычислительная схема

Обозначим через A достаточно большое положительное число и аппроксимируем уравнение (3.1) следующим гиперсингулярным интегральным уравнением:

$$a(t)x(t) + b(t) \int_{-A}^A \frac{x(\tau) d\tau}{(\tau - t)^2} + \int_{-A}^A h(t, \tau) x(\tau) d\tau = f(t), \quad -A \leq t \leq A. \quad (3.7)$$

Введем узлы $t_k = -A + \frac{A}{n}k, k = 0, 1, \dots, 2n$, и обозначим через Δ_k интервалы $[t_k, t_{k+1}), k = 0, 1, \dots, 2n - 2, \Delta_{2n-1} = [t_{2n-1}, t_{2n}]$.

Приближенное решение уравнения (3.7) будем искать в виде сплайна

$$x_N(t) = \sum_{k=0}^{2N} \alpha_k \varphi_k(t), \tag{3.8}$$

где $\varphi_k(t), k = 0, 1, \dots, 2N$, множество базисных функций.

Для узлов $t_k, k = 1, \dots, 2N - 1$ – соответствующие базисные функции определяются формулой

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} 0, & t_{k-1} \leq t \leq t_{k-1} + \frac{A}{N^2}, \\ \frac{N^2}{A(N-2)}(t - t_{k-1}) - \frac{1}{N-2}, & t_{k-1} + \frac{A}{N^2} \leq t \leq t_k - \frac{A}{N^2}, \\ 1, & t_k - \frac{A}{N^2} \leq t \leq t_k + \frac{A}{N^2}, \\ -\frac{N^2}{A(N-2)}(t - t_{k+1}) - \frac{1}{N-2}, & t_k + \frac{A}{N^2} \leq t \leq t_{k+1} - \frac{A}{N^2}, \\ 0, & t_{k+1} - \frac{A}{N^2} \leq t \leq t_{k+1}, \\ 0, & t \in [-A, A] \setminus [t_{k-1}, t_{k+1}]. \end{cases} \tag{3.9}$$

Для граничных узлов $t_k, k = 0$ и $k = 2N$ соответствующие базисные функции определяются формулами

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} 1, & -A \leq t \leq -A + \frac{A}{N^2}, \\ -\frac{N^2}{A(N-2)}(t - t_1) - \frac{1}{N-2}, & -A + \frac{A}{N^2} \leq t \leq t_1 - \frac{A}{N^2}, \\ 0, & t_1 - \frac{A}{N^2} \leq t \leq t_1, \\ 0, & [-A, A] \setminus [t_0, t_1]; \end{cases} \tag{3.10}$$

и

$$\varphi_{2N}(t) = \begin{cases} 0, & -A \leq t \leq t_{N-1} + \frac{A}{N^2}, \\ \frac{N^2}{A(N-2)}(t - t_{N-1}) - \frac{1}{N-2}, & t_{N-1} + \frac{A}{N^2} \leq t \leq 1 - \frac{A}{N^2}, \\ 1, & A - \frac{A}{N^2} \leq t \leq A. \end{cases} \tag{3.11}$$

Коэффициенты $\{\alpha_k\}$ определяются из системы алгебраических уравнений

$$a(t_k)\alpha_k + b(t_k) \sum_{l=0}^{2N} \alpha_l \int_{-A}^A \frac{\varphi_l(\tau)}{(\tau - t_k)^2} d\tau + \sum_{l=0}^{2N} \alpha_l h(t_k, t_l) \int_{-A}^A \varphi_l(\tau) d\tau = f(t_k), \tag{3.12}$$

$k = 0, 1, \dots, 2N$.

З а м е ч а н и е 3.1 *Ниже сумма регулярных интегралов в уравнении (3.12) опускается, т. к. она не влияет на дальнейшие рассуждения.*

Используя определения гиперсингулярных интегралов, получим

$$\int_{t_{k-1}}^{t_{k+1}} \frac{\varphi_k(\tau) d\tau}{(\tau - t_k)^2} = -2N^2 \frac{\ln(N-1)}{A(N-2)}, \quad (3.13)$$

$$\int_{-A}^{t_1} \frac{\varphi_0(\tau) d\tau}{(\tau + A)^2} = -N^2 \frac{\ln(N-1)}{A(N-2)}, \quad (3.14)$$

$$\int_{t_{2N-1}}^A \frac{\varphi_{2N}(\tau) d\tau}{(\tau - A)^2} = -N^2 \frac{\ln(N-1)}{A(N-2)}, \quad (3.15)$$

$$\int_{-A}^A \left[\sum_{l=1}^{2N} \varphi_l(\tau) \right] \frac{d\tau}{(\tau + A)^2} = \frac{N^2}{A(N-2)} \ln(N-1) - \frac{1}{2A}, \quad (3.16)$$

$$\int_{-A}^A \left[\sum_{l=0}^{2N-1} \varphi_l(\tau) \right] \frac{d\tau}{(\tau - A)^2} = \frac{N^2}{A(N-2)} \ln(N-1) - \frac{1}{2A}, \quad (3.17)$$

$$\int_{-A}^A \left[\sum'_{l=0}^{2N} \varphi_l(\tau) \right] \frac{d\tau}{(\tau - t_N)^2} = \frac{2N^2}{A(N-2)} \ln(N-1) - \frac{2}{A}. \quad (3.18)$$

Здесь \sum'_l означает суммирование по $l \neq N$. Детали вычислений приведены в [16].

Таким образом, система (3.12) может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} & a(t_k)\alpha_k - b(t_k)2N^2 \frac{\ln(N-1)}{A(N-2)}\alpha_k + \alpha_0 b(t_k) \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(\tau) \frac{d\tau}{(\tau - t_k)^2} + \\ & + b(t_k) \sum_{l=1}^{2N-1} \alpha_l \int_{t_{l-1}}^{t_{l+1}} \varphi_l(\tau) \frac{d\tau}{(\tau - t_k)^2} + \\ & + \alpha_{2N} b(t_k) \int_{t_{2N-1}}^A \varphi_{2N}(\tau) \frac{d\tau}{(\tau - t_k)^2} = f(t_k), \quad k = 1, \dots, 2N-1, \\ & a(t_0)\alpha_0 - b(t_0)N^2 \frac{\ln(N-1)}{A(N-2)}\alpha_0 + \sum_{l=1}^{2N-1} \alpha_l b(t_0) \int_{t_{l-1}}^{t_{l+1}} \varphi_l(\tau) \frac{d\tau}{(\tau + A)^2} + \\ & + \alpha_N b(t_0) \int_{2N-1}^A \varphi_{2N}(\tau) \frac{d\tau}{(\tau + A)^2} = f(t_0), \\ & a(t_{2N})\alpha_{2N} - b(t_{2N})N^2 \frac{\ln(N-1)}{A(N-2)}\alpha_{2N} + \sum_{l=1}^{2N-1} \alpha_l b(t_{2N}) \int_{l-1}^{l+1} \varphi_l(\tau) \frac{d\tau}{(\tau - A)^2} + \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$+\alpha_0 b(t_{2N}) \int_{-A}^{t_1} \varphi_0(\tau) \frac{d\tau}{(\tau - A)^2} = f(t_{2N}).$$

Здесь \sum' означает суммирование по $l \neq k$.

Система (3.19) эквивалентна следующей системе

$$\begin{aligned} &(\operatorname{sgn} b(t_k)) \left(a(t_k)\alpha_k - b(t_k)2N^2 \frac{\ln(N-1)}{A(N-2)}\alpha_k + \alpha_0 b(t_k) \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(\tau) \frac{d\tau}{(\tau - t_k)^2} + \right. \\ &+ \sum_{l=1}^{2N-1} \alpha_l b(t_k) \int_{t_{l-1}}^{t_{l+1}} \varphi_l(\tau) \frac{d\tau}{(\tau - t_k)^2} + \alpha_{2N} b(t_k) \int_{t_{2N-1}}^A \varphi_{2N}(\tau) \frac{d\tau}{(\tau - t_k)^2} \left. \right) = \\ &= (\operatorname{sgn} b(t_k))f(t_k), k = 1, \dots, 2N - 1, \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} &(\operatorname{sgn} b(t_0)) \left(a(t_0)\alpha_0 - b(t_0)N^2 \frac{\ln(N-1)}{A(N-2)}\alpha_0 + \sum_{l=1}^{2N-1} \alpha_l b(t_0) \int_{t_{l-1}}^{t_{l+1}} \frac{\varphi_l(\tau)d\tau}{(\tau + A)^2} + \right. \\ &+ \alpha_N b(t_0) \int_{t_{2N-1}}^A \varphi_{2N}(\tau) \frac{d\tau}{(\tau + A)^2} = (\operatorname{sgn} b(t_0))f(t_0), \\ &(\operatorname{sgn} b(t_{2N})) \left(a(t_{2N})\alpha_{2N} - b(t_{2N})N^2 \frac{\ln(N-1)}{A(N-2)}\alpha_{2N} + \right. \\ &+ \sum_{l=1}^{2N-1} \alpha_l b(t_{2N}) \int_{t_{l-1}}^{t_{l+1}} \varphi_l(\tau) \frac{d\tau}{(\tau - A)^2} + \\ &+ \alpha_0 b(t_{2N}) \int_{-A}^{t_1} \varphi_0(\tau) \frac{d\tau}{(\tau - A)^2} \left. \right) = (\operatorname{sgn} b(t_{2N}))f(t_{2N}). \end{aligned}$$

Запишем систему (3.20) в матричной форме:

$$DX = F,$$

где $D = \{d_{kl}\}$, $k, l = 0, 1, \dots, 2N$, $X = (x_0, x_1, \dots, x_{2N})$, $F = (f_0, f_1, \dots, f_{2N})$. Значения $\{d_{kl}\}$, $\{x_k\}$ и $\{f_k\}$ очевидны.

Диагональные элементы в левой части системы (3.20) имеют следующий вид

$$\begin{aligned} d_{kk} &= (\operatorname{sgn} b(t_k)) \left(a(t_k) - b(t_k)2N^2 \frac{\ln(N-1)}{A(N-2)} \right), k = 1, 2, \dots, 2N - 1, \\ d_{00} &= (\operatorname{sgn} b(t_0)) \left(a(t_0) - b(t_0)N^2 \frac{\ln(N-1)}{A(N-2)} \right), \end{aligned}$$

$$d_{2N,2N} = (\operatorname{sgn} b(t_{2N})) \left(a(t_{2N}) - b(t_{2N})N^2 \frac{\ln(N-1)}{A(N-2)} \right).$$

Кубическая норма матрицы D оценивается выражением

$$\begin{aligned} \Lambda_3(D) = \max & \left(\max_{1 \leq k \leq 2N-1} \left(d_{kk} + \sum_{l=1}^{2N-1} |b(t_k)| \int_{t_{l-1}}^{t_{l+1}} \frac{\varphi_l(\tau) d\tau}{(\tau - t_k)^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + |b(t_k)| \int_{-A}^{t_1} \frac{\varphi_0(\tau) d\tau}{(\tau - t_k)^2} + |b(t_k)| \int_{t_{2N-1}}^A \frac{\varphi_{2N}(\tau) d\tau}{(\tau - t_k)^2} \right), \right. \\ & \left(d_{00} + \sum_{l=1}^{2N-1} |b(t_0)| \int_{t_{l-1}}^{t_{l+1}} \frac{\varphi_l(\tau) d\tau}{(\tau + A)^2} + |b(t_0)| \int_{t_{2N-1}}^A \frac{\varphi_{2N}(\tau) d\tau}{(\tau + A)^2} \right), \\ & \left. \left(d_{2N,2N} + \sum_{l=1}^{2N-1} |b(t_{2N})| \int_{t_{l-1}}^{t_{l+1}} \frac{\varphi_l(\tau) d\tau}{(\tau - A)^2} + |b(t_{2N})| \int_{-A}^{t_1} \frac{\varphi_0(\tau) d\tau}{(\tau - A)^2} \right) \right). \end{aligned}$$

Если $\Lambda_3(D) < 0$, то из теоремы 2.1 следует, что система (3.20) имеет единственное решение $x_N^*(t)$ и $\|D^{-1}\| \leq 1/|\Lambda_3(D)|$.

Очевидно, что $x_N^*(t)$ также является решением системы уравнений (3.20).

Пусть $x^*(t)$ и $x_N^*(t)$ являются решениями уравнений (3.1) и (3.20) соответственно.

Пусть функции $x^*(t), x^{*(1)}(t)$ непрерывно дифференцируемы при $t \in (-\infty, \infty)$ и $\max(\sup_{(-\infty < t < \infty)} |x^*(t)|, \sup_{(-\infty < t < \infty)} |x^{*(1)}(t)|, \sup_{(-\infty < t < \infty)} |x^{*(2)}(t)|) \leq M, 0 < M < \infty$, где M – ограниченная константа.

Легко видеть, что

$$a(t_k)x^*(t_k) + b(t_k) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^*(\tau)}{(\tau - t_k)^2} d\tau = f(t_k),$$

где $k = 0, 1, \dots, 2N$.

Следовательно,

$$(\operatorname{sgn} b(t_k))(a(t_k)x^*(t_k) + b(t_k) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^*(\tau)}{(\tau - t_k)^2} d\tau) = (\operatorname{sgn} b(t_k))f(t_k), \tag{3.21}$$

где $k = 0, 1, \dots, 2N$.

Пусть $x_N^*(t)$ – решение уравнения (3.20). Вычтем (3.20) из (3.21) и представим результат в следующем виде:

$$\begin{aligned} (\operatorname{sgn} b(t_k))(a(t_k)(x^*(t_k) - x_N^*(t_k)) + b(t_k) \sum_{l=0}^{2N} (x^*(t_l) - x_N^*(t_l)) \int_{-A}^A \frac{\varphi_l(\tau)}{(\tau - t_k)^2} d\tau) = \\ = (\operatorname{sgn} b(t_k))g(t_k), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 g(t_k) &= \sum_{l=0}^{2N} b(t_k) x^*(t_l) \int_{-A}^A \frac{\varphi_l(\tau)}{(\tau - t_k)^2} d\tau - b(t_k) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^*(\tau)}{(\tau - t_k)^2} d\tau = \\
 &= -b(t_k) \int_{-\infty}^{-A} x^*(\tau) \frac{d\tau}{(\tau - t_k)^2} - b(t_k) \int_A^{\infty} x^*(\tau) \frac{d\tau}{(\tau - t_k)^2} - \\
 &- b(t_k) \sum_{l=0}^{2N} \int_{\Delta_l} [x^*(\tau) - x^*(t_l) \varphi_l(\tau)] \frac{d\tau}{(\tau - t_k)^2} = i_1(k) + i_2(k) + i_3(k), \\
 &k = 0, 1, \dots, 2N.
 \end{aligned}$$

Поскольку матрица D обратима, то

$$\|\bar{x}^* - \bar{x}_N^*\| \leq \|D^{-1}\| \|G\|, \tag{3.22}$$

где $\bar{x}^* = (x^*(t_0), x^*(t_1), \dots, x^*(t_{2N}))$, $\bar{x}_N^* = (x_N^*(t_0), x_N^*(t_1), \dots, x_N^*(t_{2N}))$. Структура вектора G очевидна.

Оценим нормы векторов $I_j = (i_j(0), i_j(1), \dots, i_j(2N))$, $j = 1, 2, 3$. Норма $\|I_2\|$ оценена в [9] при $A = 1$. Перенос полученной оценки на случай произвольного A не вызывает затруднения. Из условий, наложенных на функцию $x^*(t)$, следует, что $\|I_1\| + \|I_2\| \leq C/A$.

Таким образом, при $N \rightarrow \infty$ и при $A \rightarrow \infty$ справедлива оценка $\|x^* - x_N^*\| \rightarrow 0$.

3.3. Третья вычислительная схема

Обозначим через t_k узлы $t_k = \frac{k\pi}{2n+1}$, $k = -n, \dots, n$ и введем интервалы $\Delta_{-n-1} = (-\infty, t_{-n})$, $\Delta_{-k} = [t_{-k}, t_{-k+1})$, $k = n, n-1, \dots, 1$, $\Delta_k = [t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $\Delta_n = [t_n, \infty)$.

Приближенное решение уравнения (3.1) будем искать в виде функции

$$x_n(t) = \sum_{k=-n-1}^n \alpha_k \psi_k(t),$$

где

$$\psi_k(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Delta_k, \\ 0, & t \in (-\infty, \infty) \setminus \Delta_k, \end{cases} \quad k = -n-1, -n, \dots, n.$$

Коэффициенты $\{\alpha_k\}$ будем искать из решения системы линейных уравнений

$$a(\bar{t}_i) \alpha_i + b(\bar{t}_i) \alpha_{-n-1} \int_{-\infty}^{t_{-n}} \frac{d\tau}{(t - \bar{t}_i)^2} + b(\bar{t}_i) \sum_{k=-n}^{n-1} \alpha_k \int_{\Delta_k} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_i)^2} + \tag{3.23}$$

$$+ b(\bar{t}_i) \alpha_n \int_{t_n}^{\infty} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_i)^2} + \frac{\pi}{2n+1} \sum_{k=-n}^n (1 + \bar{t}_k^2) h(\bar{t}_i, \bar{t}_k) \alpha_k = f(\bar{t}_i), \quad i = -n-1, \dots, n,$$

где $\bar{t}_{-n-1} = t_{-n} - 1$, $\bar{t}_k = (t_{k+1} + t_k)/2$, $k = -n, \dots, n$, $\bar{t}_{n+1} = t_n + 1$.

Преобразование системы уравнений (3.23) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений проводится по аналогии с первой и второй вычислительными схемами.

По аналогии с проведенными выше рассуждениями, можно показать в случае отрицательной логарифмической нормы матрицы, стоящей в левой части системы уравнений (3.23), однозначную разрешимость последней. Доказать сходимость решений последовательности уравнений (3.23) при $n \rightarrow \infty$ к решению уравнения (3.1) не удастся, хотя при решении модельных примеров подобный метод продемонстрировал свою эффективность [17].

4. Приближенное решение нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений типа Пейерлса теории дислокации

Рассмотрим частные случаи нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений, определенных на числовой оси, – уравнения Пейерлса-Набарро и Бенжамина-Оно, играющие важную роль в теории дислокации и теории волн на водной поверхности.

Эти уравнения имеют сходную конструкцию:

1) уравнение Пейерлса-Набарро –

$$\frac{1}{1-v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} + \sin \frac{2\pi x(t)}{b} = 0, \quad (4.1)$$

где b, v – вещественные константы, $b > 0$, $0 < v < 1$;

2) уравнение Бенжамина-Оно –

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} + x(t) - x^2(t) = 0.$$

Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением уравнения Пейерлса-Набарро. Для приближенного решения уравнения (4.1) рассмотрим три вычислительные схемы и сравним их погрешность.

4.1. Первая вычислительная схема

Приближенное решение уравнения (4.1) будем искать в виде функции

$$x_n(t) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k \psi_k(t), \quad (4.2)$$

где

$$\psi_k(t) = \frac{2}{2n+1} \left(\frac{1}{2} + \sum_{l=1}^n c_l(t) c_l(t_k) + s_l(t) s_l(t_k) \right),$$

$$c_l(t) = \cos(2l \arctg t), s_l(t) = \sin(2l \arctg t), t_k = tg \frac{k\pi}{2n+1}, k = -n, \dots, n.$$

В соответствии с технологией метода коллокации коэффициенты $\{\alpha_k\}$ находятся из системы уравнений

$$\frac{2}{2n+1} \sum_{k=-n}^n \alpha_k \left(\sum_{l=1}^n 2l \frac{1}{1+t_k^2} (c_l(t_i) c_l(t_k) + s_l(t_i) s_l(t_k)) \right) + \sin \frac{2\pi \alpha_i}{b} = 0, \quad i = -n, \dots, n. \quad (4.3)$$

Проведя в системе (4.3) несложные преобразования, получим:

$$\frac{2}{2n+1} \sum_{k=-n}^n \alpha_k \left(\sum_{l=1}^n \frac{2l}{1+t_k^2} \cos \left(2l \left(\frac{i\pi - k\pi}{2n+1} \right) \right) \right) + \sin \frac{2\pi\alpha_i}{b} = 0, \quad i = -n, \dots, n. \quad (4.4)$$

Для решения уравнения (4.4) воспользуемся непрерывным операторным методом. Введем вспомогательную переменную u и поставим системе (4.4) в соответствие систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\alpha_i(u)}{du} = \gamma_i \left(\frac{2}{2n+1} \sum_{k=-n}^n \alpha_k(u) \left(\sum_{l=1}^n \frac{2l}{1+t_k^2} \cos \left(2l \left(\frac{i\pi - k\pi}{2n+1} \right) \right) \right) \right) + \sin \frac{2\pi\alpha_i(u)}{b}, \quad i = -n, \dots, n. \quad (4.5)$$

Здесь значения $\gamma_i = \pm 1$, $i = -n, \dots, n$, подбираются таким образом, чтобы логарифмическая норма якобиана, стоящего в правой части системы уравнений (4.5), была бы отрицательной в некотором банаховом пространстве.

В этом случае система (4.5) при $u \rightarrow \infty$ сходится к решению системы (4.4) по норме пространства, в котором логарифмическая норма отрицательна.

4.2. Вторая вычислительная схема

Воспользуемся сплайн-коллокационным методом со сплайнами первого порядка для приближенного решения уравнения (4.1).

Обозначим через A достаточно большое положительное число и аппроксимируем уравнение (4.1) следующим гиперсингулярным интегральным уравнением

$$\int_{-A}^A \frac{x(\tau) d\tau}{(\tau - t)^2} + \sin \frac{2\pi x(t)}{b} = 0. \quad (4.6)$$

Введем узлы $t_k = -A + \frac{A}{n}k$, $k = 0, 1, \dots, 2n$, и обозначим через Δ_k интервалы $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, 2n-2$, $\Delta_{2n-1} = [t_{2n-1}, t_{2n}]$.

Приближенное решение уравнения (4.6) будем искать в виде функции

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{2n} \alpha_k \varphi_k(t),$$

где базисные функции φ_k определены выражениями (3.9)–(3.11).

Коэффициенты $\{\alpha_k\}$ находим из системы алгебраических уравнений

$$\frac{1}{1-v} \sum_{k=0}^{2n} \int_{-A}^A \frac{\alpha_k \varphi_k(\tau)}{(\tau - t_l)^2} d\tau + \sin \frac{2\pi\alpha_l \varphi_l(t_l)}{b} = 0, \quad l = 0, 1, \dots, 2n, \quad (4.7)$$

где $k = 0, 1, \dots, 2n$.

Применение к системе (4.7) непрерывного метода решения операторных уравнений приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\alpha_l(u)}{du} = \gamma_l \left(\frac{1}{1-v} \sum_{k=0}^{2n} \int_{-A}^A \frac{\alpha_k(u) \varphi_k(\tau)}{(\tau - t_l)^2} d\tau + \sin \frac{2\pi\alpha_l(u) \varphi_l(t_l)}{b} \right), \quad l = 0, 1, \dots, 2n. \quad (4.8)$$

Значения γ_i , $\gamma_i = \pm 1$, – константы, подбираемые таким образом, чтобы логарифмическая норма якобиана оператора, стоящего в правой части системы уравнений (4.8), была бы отрицательной в метрике некоторого банахова пространства. В этом банаховом пространстве система (4.8) имеет при $u \rightarrow \infty$ решение, сходящееся к решению системы уравнений (4.7).

4.3. Третья вычислительная схема

Обозначим через t_k узлы $t_k = \frac{k\pi}{2n+1}$, $k = -n, \dots, n$, и введем интервалы $\Delta_{-n-1} = (-\infty, t_{-n})$, $\Delta_{-k} = [t_{-k}, t_{-k+1})$, $k = n, n-1, \dots, 1$, $\Delta_k = [t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $\Delta_n = [t_n, \infty)$.

Приближенное решение уравнения (4.1) будем искать в виде функции

$$x_n(t) = \sum_{k=-n-1}^n \alpha_k \psi_k(t),$$

где

$$\psi_k(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Delta_k, \\ 0, & t \in (-\infty, \infty) \setminus \Delta_k, \end{cases} \quad k = -n-1, -n, \dots, n.$$

Коэффициенты $\{\alpha_k\}$ будем искать из решения системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{-n-1}}{1-v} \int_{-\infty}^{t_{-n}} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_l)^2} + \frac{1}{1-v} \sum_{k=-n}^{n-1} \alpha_k \int_{\Delta_k} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_l)^2} + \frac{\alpha_n}{1-v} \int_{t_n}^{\infty} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_l)^2} + \\ + \sin \frac{2\pi\alpha_l}{b} = 0, \quad l = -n-1, -n, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Здесь $\bar{t}_{-n-1} = t_{-n} - 1$; $\bar{t}_k = (t_k + t_{k+1})/2$, $k = -n, -n+1, \dots, n-1$, $\bar{t}_n = t_n + 1$.

Воспользовавшись определением гиперсингулярных интегралов, систему (4.9) представим в виде

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha_{-n-1}}{1-v} - \frac{1}{1-v} \sum_{k=-n}^{n-1} \alpha_k \left(\frac{1}{t_{k+1} - t_{-n} + 1} - \frac{1}{t_k - t_{-n} + 1} \right) + \\ + \frac{\alpha_n}{1-v} \frac{1}{2t_n + 1} + \sin \frac{2\pi\alpha_{-n-1}}{b} = 0, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha_{-n-1}}{1-v} \frac{1}{t_{-n} - \bar{t}_l} - \frac{1}{1-v} \sum_{k=-n}^{n-1} \alpha_k \left(\frac{1}{t_{k+1} - \bar{t}_l} - \frac{1}{t_k - \bar{t}_l} \right) + \\ + \sin \frac{2\pi\alpha_l}{b} = 0, \quad l = -n, -n+1, \dots, n-1, \end{aligned}$$

$$\frac{\alpha_{-n-1}}{1-v} \frac{1}{2t_n + 1} - \frac{1}{1-v} \sum_{k=-n}^{n-1} \alpha_k \left(\frac{1}{t_{k+1} - \bar{t}_{n+1}} - \frac{1}{t_k - \bar{t}_{n+1}} \right) - \frac{\alpha_n}{1-v} + \sin \frac{2\pi\alpha_n}{b} = 0.$$

Системе (4.10) поставим в соответствие систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\alpha_{-n-1}(u)}{du} = \lambda_{-n-1} \left(-\frac{\alpha_{-n-1}(u)}{1-v} - \frac{1}{1-v} \sum_{k=-n}^{n-1} \alpha_k(u) \left(\frac{1}{t_{k+1} - t_{-n} + 1} - \frac{1}{t_k - t_{-n} + 1} \right) + \right. \\ \left. \sin \frac{2\pi\alpha_{-n-1}}{b} \right) \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\alpha_n(u)}{1-v} \frac{1}{2t_n+1} + \sin \frac{2\pi\alpha_{-n-1}(u)}{b} \Big) + \frac{\alpha_n(u)}{1-v} \frac{1}{2t_n+1} + \sin \frac{2\pi\alpha_{-n-1}(u)}{b} \Big), \\
 \frac{d\alpha_l(u)}{du} & = \lambda_l \left(-\frac{\alpha_{-n-1}(u)}{1-v} \frac{1}{t_{-n}-\bar{t}_l} - \frac{1}{1-v} \sum_{k=-n}^{n-1} \alpha_k(u) \left(\frac{1}{t_{k+1}-\bar{t}_l} - \frac{1}{t_k-\bar{t}_l} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \sin \frac{2\pi\alpha_l(u)}{b} \right), \quad l = -n, -n, \dots, n-1, \\
 \frac{d\alpha_n(u)}{du} & = \lambda_{n+1} \left(\frac{\alpha_{-n-1}(u)}{1-v} \frac{1}{2t_n+1} - \frac{1}{1-v} \sum_{k=-n}^{n-1} \alpha_k(u) \left(\frac{1}{t_{k+1}-\bar{t}_{n+1}} - \frac{1}{t_k-\bar{t}_{n+1}} \right) - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\alpha_n(u)}{1-v} + \sin \frac{2\pi\alpha_n(u)}{b} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

где $\lambda_j = \pm 1, j = -n-1, \dots, n$.

Константы $\lambda_j, j = -n-1, \dots, n$, подбирают таким образом, чтобы логарифмическая норма якобиана оператора, стоящего в правой части системы уравнений (4.9), была бы отрицательной.

В случае, если логарифмическая норма отрицательна в некотором банахово пространстве, решение системы дифференциальных уравнений (4.11) сходится при $u \rightarrow \infty$ к решению системы уравнений (4.9).

З а м е ч а н и е 4.1 Для решения систем дифференциальных уравнений (4.5), (4.8), (4.11) может быть использован любой численный метод.

5. Модельные примеры

В качестве модельного примера возьмем уравнение уравнение Пейрлса-Набарро (4.1), т. к. известно его точное решение [14–15]: $x(t) = -\frac{b}{\pi} \arctg \frac{2(1-v)t}{b}$.

Уравнение (4.1) решалось методом сплайн-коллокации (4.7)–(4.8). Результаты вычислений при $A = 1000, n = 51$, числе итераций метода Эйлера $m = 500$ представлены на Рис. 5.1.

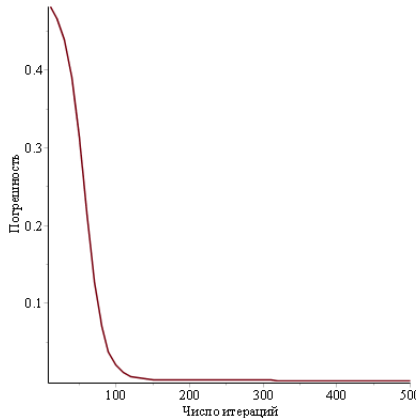


Рис. 5.1. Зависимость погрешности решения от числа итераций в методе Эйлера

Благодарности. Статья подготовлена при финансовой поддержке конкурса «Ректорские гранты», договор № 1/РГ от 08.04.2020.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. 351 с.
2. Некрасов А. И. Теория крыла в нестационарном потоке. М.: Изд-во АН СССР, 1947. 65 с.
3. Бисплингхофф Р., Эшли Х., Халфмен Р. Аэроупругость. М.: Иностран. лит., 1958. 283 с.
4. Лэндал Э. Х. М. Аэродинамика крыльев и корпусов летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1969. 129 с.
5. Чикин Л. А. Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений // Уч. записки Казан. гос. ун-та. 1953. Т. 1136, № 10. С. 57 - 105.
6. Вайникко Г. М., Лифанов И. К., Полтавский Л. Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. М.: Янус-К, 2001. 508 с.
7. Бойков И. В. Аналитические и численные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений // Динамические системы. 2019. Т. 9. №3. С. 244 - 272.
8. Gregor J.. O aproximaci obrazu v Hilbertove transformaci ortogonalnimi radami racionalnich lomenych funkci. Aplik. Matem. Ceskoslovenska Akademie VED. 1961. vol.6, No 3, pp. 214 - 240.
9. Boykov I. V., Rudnev V. A., Boykova A.I., Baulina O. A. New iterative method for solving linear and nonlinear hypersingular integral equations. Applied Numerical Mathematics. 2018. vol. 127. pp. 280-305.
10. Boykov I. V., Rudnev V. A., Boykova A.I., Approximate Methods for Solving Linear and Nonlinear Hypersingular Integral Equations. Axioms. 2020. vol. 9, No 3/
11. Бойков И. В. Об одном непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 9. С. 1308-1314.
12. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 535 с.
13. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1988. 334 с.
14. Peierls R. The size of a dislocations. Proc. Phys. Soc. 1940. Vol. 52, pp. 34-40.
15. Karlin V., Maz'ya V. G., Movchan A. B., Willis J. R., Bullough R. Numerical Solution of Nonlinear Hypersingular Integral Equations of the Peierls Type in Dislocation Theory. SIAM J. Appl. Math. 2000. Vol. 60, No 2. pp. 664 - 678.

16. Boykov I. V., Ventsel E. S., Roudnev V. A., Boykova A. I. An approximate solution of nonlinear hypersingular integral equations. Applied Numerical Mathematics. 2014. vol. 86, pp. 1-21.
17. Boykov I. V., Ventsel E. S., Boykova A. I. An approximate solution of hypersingular integral equations. Applied Numerical Mathematics. 2010. vol. 60, pp. 607-628.

Поступила 2.09.2020

MSC2020 65R30

Approximate solution of hypersingular integral equations on the number axis

© I. V. Boykov¹, P. V. Aykashev², A. I. Boykova³

Abstract. In the paper we investigate approximate methods for solving linear and nonlinear hypersingular integral equations defined on the number axis. We study equations with the second-order singularities because such equations are widely used in problems of natural science and technology. Three computational schemes are proposed for solving linear hypersingular integral equations. The first one is based on the mechanical quadrature method. We used rational functions as the basic ones. The second computational scheme is based on the spline-collocation method with the first-order splines. The third computational scheme uses the zero-order splines. Continuous method for solving operator equations has been used for justification and implementation of the proposed schemes. The application of the method allows to weaken the requirements imposed on the original equation. It is sufficient to require solvability for a given right-hand side. The continuous operator method is based on Lyapunov's stability for solutions of systems of ordinary differential equations. Thus it is stable for perturbations of coefficients and of right-hand sides. Approximate methods for solving nonlinear hypersingular integral equations are presented by the example of the Peierls - Naborro equation of dislocation theory. By analogy with linear hypersingular integral equations, three computational schemes have been constructed to solve this equation. The justification and implementation are based on continuous method for solving operator equations. The effectiveness of the proposed schemes is shown on solving the Peierls - Naborro equation.

Key Words: linear and nonlinear hypersingular integral equations, continuous operator method, collocation method, mechanical quadrature method

REFERENCES

1. Zh. Adamar, [*Cauchy problem for linear partial derivative equations of hyperbolic type*], Nauka Publ., Moscow, 1978 (In Russ.), 351 p.
2. A. I. Nekrasov, [*Wing theory in non-stationary flow*], AN SSSR Publ., Moscow, 1947 (In Russ.), 65 p.

¹**Ilya V. Boykov**, Head of the Department of Higher and Applied Mathematics, Head of the Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (40 Krasnaya St., Penza 440026, Russia), D.Sc. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6980-933X>, i.v.boykov@gmail.com

²**Pavel V. Aykashev**, assistant of the Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (40 Krasnaya St., Penza 440026, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8076-4662>, aikashev.pavel@mail.ru

³**Alla I. Boykova**, Associate Professor, Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (40 Krasnaya St., Penza 440026, Russia), Ph.D.(Physics and Mathematics), ORCID: 0000-0003-0436-0460, allaboikova@mail.ru

3. R. Bisplinghoff, Kh. E. R. Khalpmen, [*Aeroelasticity*], Inostr. Lit. Publ., Moscow, 1958 (In Russ.), 283 p.
4. Kh. E. M. Lendal, [*Aerodynamics of aircraft wings and hulls*], Mashinostroyeniye Publ, Moscow, 1969 (In Russ.), 129 p.
5. L. A. Chikin, “[Special cases of the Riemann boundary value problem and singular integral equations]”, *Uchenyye zapiski Kazanskogo gosudarstvennogo universiteta*, **113**:10 (1953), 57–105 (In Russ.).
6. G. M. Vaynikko. I. K. Lifanov. L. N. Poltavskiy, [*Numerical methods in hypersingular integral equations and their applications*], Yanus-K Publ., Moscow, 2001 (In Russ.), 508 c.
7. I. V. Boykov, “[Analytical and numerical methods for solving hypersingular integral equations]”, *Dinamicheskoye sistemy*, **9**:3 (2009), 244–272 (In Russ.).
8. J. Gregor, “O aproximaci obrazu v Hilbertove transformaci ortogonalnimi radami racionalnich lomenych funkci”, *Applik. Matem. Ceskoslovenska Akademie VED*, **6**:3 (1961), 214–240.
9. I. V. Boykov, V. A. Roudnev, A. I. Boykova, O. A. Baulina, “New iterative method for solving linear and nonlinear hypersingular integral equations”, *Applied Numerical Mathematics*, **127** (2018), 280–305.
10. I. V. Boykov, V. A. Roudnev, A. I. Boykova, “Approximate Methods for Solving Linear and Nonlinear Hypersingular Integral Equations”, *Axioms*, **9**:3 (2020), 1–18.
11. I. V. Boykov, “[On a single continuous Method for solving nonlinear operator equations]”, *Differentsialnyye uravneniya*, **48**:9 (2012), 1308–1314 (In Russ.).
12. Yu. L. Daletskiy. M. G. Kreyn, [*Stability of solutions of differential equations in Banach space*], Nauka Publ., Moscow, 1970 (In Russ.), 535 c.
13. K. Dekker. Ya. Verver., *Ustoychivost metodov Runge-Kutty dlya zhestkikh nelineynykh differentsialnykh uravneniy* [*Stability of Runge-Kutta methods for rigid nonlinear differential equations*], Mir Publ, Moscow, 1988 (In Russ.), 334 c.
14. R. Peierls, “The size of a dislocations”, *Proc. Phys. Soc.*, **52** (1940), 34–40.
15. V. Karlin, V. G. Maz'ya, A. B. Movchan, J. R. Willis, R. Bullough, “Numerical Solution of Nonlinear Hypersingular Integral Equations of the Peierls Type in Dislocation Theory”, *SIAM J. Appl. Math.*, **60**:2 (2000), 664–678.
16. I. V. Boykov, E. S. Ventsel, V. A. Roudnev, A. I. Boykova, “An approximate solution of nonlinear hypersingular integral equations”, *Applied Numerical Mathematics*, **86** (2014), 1–21.
17. I. V. Boykov, E. S. Ventsel, A. I. Boykova, “An approximate solution of hypersingular integral equations”, *Applied Numerical Mathematics*, **60**:6 (2010), 607–628.

Submitted 2.09.2020