УДК 517.948.67

О возмущении фредгольмовых собственных значений линейных операторов

© **Д. Г. Рахимов**[1]

Аннотация. На основе метода редукции, предложенного в статьях [6], [7], позволяющего сводить исследование случаев возмущения кратных собственных значений к простым, развит редукционный метод возмущений фредгольмовых точек дискретного спектра линейных оператор-функций спектрального параметра.

Ключевые слова: методы теории бифуркаций решений нелинейных уравнений, дискретный спектр, теория возмущений, уравнение разветвления, обобщенные жордановы цепочки, регуляризация

1. Введение.

Основы теории возмущений собственных значений линейных операторов заложены в работах Ф. Реллиха [1]. Затем эти исследования продолжены в работах Б.Ск.-Надь [2], Т. Като [3], М. И. Вишика и Л. А. Люстерника [4]. В. А. Треногин [5] исследовал эти задачи методами теории ветвления и бифуркаций. Применяя к уравнению разветвления собственного значения метод диаграммы Ньютона им были определены как точное количество собственных значений, так и зависимость этих собственных значений от малых отклонений возмущенного спектрального параметра от невозмушенного. Случай кратного собственного значения рассмотрен в предположении полноты соответствующего обобщенного жорданого набора (ОЖН). Для случая неполного ОЖН предложен метод пополнения данного набора. В дальнейшем этот метод был развит для аналитических оператор-функций Б. В. Логиновым и Ю. Б. Русаком [8]. В данной работе при использовании метода редукции, предложенного в работах [6], [7], случай кратного собственного значения сведен к простому, снято предположение полноты ОЖН и в 2^n раз уменьшен объем вычислений, возникающих при построении уравнения разветвления и нахождении всех возмущенных собственных значений и им соответствующих собственных элементов.

2. Постановка задачи

Пусть E_1, E_2- некоторые банаховы пространства, $A(t) \in L\{E_1, E_2\}$ оператор-функция аналитически зависящая от спектрального параметра $t \in G \subset \mathbb{C}$.

Определение 2.1. *Точка* $\lambda \in G$ *называется регулярной точкой оператор-функции* $A(t)$, *если оператор* $A(\lambda)$ *имеет ограниченный обратный* $A^{-1}(\lambda) \in L\{E_1, E_2\}$. *Совокупность всех регулярных точек* $\rho(A)$, *называют резольвентным множеством* $A(t)$, *а множество* $\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A)$ *спектром оператора* $A(t)$.

[1] Доцент кафедры прикладной математики и информатики, филиал МГУ им.М. В. Ломоносова в г. Ташкенте, г. Ташкент; Davranaka@yandex.ru.

Точка спектра λ_0 называется изолированной, если существует окрестность точки λ_0, все точки которой регулярны.

Если при некотором λ уравнение $A(\lambda)x = 0$ имеет нетривиальное решение $x = \varphi$, то λ называется собственным значением, а решение φ соответствующим собственным элементом оператор-функции $A(t)$. Совокупность всех собственных значений образует дискретный спектр $\sigma_p(A)$ оператора $A(t)$. Множество всех собственных элементов соответствующих собственному значению λ образует собственное подпространство $N(A(\lambda))$ оператора $A(\lambda)$. Собственное подпространство $N^*(A(\lambda))$ оператора $A^*(\lambda)$ называют дефектным подпространством.

Пусть λ фредгольмова точка $\sigma_p(A)$ и $N(A(\lambda)) = \{\varphi_i\}_1^n$, $N^*(A(\lambda)) = \{\psi_i\}_1^n$. Согласно следствию из теоремы Хана-Банаха существуют системы элементов $\{\gamma_i\}_1^n \subset E_1^*$, $\{z_i\}_1^n \subset E_2$, биортогональные соответственно к $\{\varphi_i\}_1^n$, $\{\psi_i\}_1^n$. Тогда проекторы $P = \sum\limits_{i=1}^n \langle\cdot,\gamma_i\rangle\varphi_i$, $Q = \sum\limits_{i=1}^n \langle\cdot,\psi_i\rangle z_i$ порождают следующие разложения в прямые суммы: $E_1 = E_1^n \oplus E_1^{\infty-n}$, $E_2 = E_{2n} \oplus E_{2,\infty-n}$. Оператор $\tilde{A}(\lambda) = A(\lambda) + \sum\limits_{i=1}^n \langle\cdot,\gamma_i\rangle z_i$ непрерывно обратим, обратный к нему $\Gamma = \tilde{A}^{-1}(\lambda)$ ограничен (лемма Шмидта-Треногина [5]).

Справедливы равенства $\tilde{A}(\lambda)\varphi_i = z_i$, $\Gamma z_i = \varphi_i$, и $\tilde{A}^*(\lambda)\psi_i = \gamma_i$, $\Gamma^*\gamma_i = \psi_i$.

О п р е д е л е н и е 2.2. [5]) *Элементы* $\varphi_i^{(1)} \equiv \varphi_i, \varphi_i^{(2)}, \dots, \varphi_i^{(p_i)}$ *образуют обобщенную* $A(\lambda)$ *-жорданову цепочку длины* p_i, *соответствующую элементу* φ_i, *если выполнены равенства:*

$$A(\lambda)\varphi_i^{(s)} = \sum_{j=1}^{s-1} A_j\varphi_i^{(s-j)},\ s = \overline{2,p_i}, \tag{2.1}$$

где $A_j = \frac{1}{j!}A^{(j)}(\lambda)$, $j = 1,2,3,\dots,$ *при этом для всех* $\psi_l \in N^*(A(\lambda))$ $\langle\sum\limits_{j=1}^{s-1} A_j\varphi_i^{(s-j)},\psi_l\rangle = 0$, $s = \overline{2,p_i}$, *и* $\langle\sum\limits_{j=1}^{p_i} A_j\varphi_i^{(p_i+1-j)},\psi_k\rangle \neq 0$ *хотя бы для одного функционала* $\psi_k \in N^*(A(\lambda))$. *Элементы* $\varphi_i^{(2)},\dots,\varphi_i^{(p_i)}$ *называют* $A(\lambda)$ *-присоединенными элементами.*

Так как уравнения (2.1) разрешимы неоднозначно, требуем, чтобы $\langle\varphi_i^{(s)},\gamma_j\rangle = 0$, $j,i = \overline{1,n}$, $s = \overline{2,p_i}$. Этим $A(\lambda)$-присоединенные элементы $\varphi_i^{(2)},\dots,\varphi_i^{(p_i)}$ определяются единственным образом по рекуррентным формулам

$$\varphi_i^{(s)} = \sum_{s=s_1l_1+s_2l_2+\cdots+s_kl_k} \left[(\Gamma A_{s_1})^{l_1}(\Gamma A_{s_2})^{l_2}\cdots\Gamma A_{s_k})^{l_k}\right]\varphi_i, \tag{2.2}$$

$$s = \overline{2,p_i},\ i = \overline{1,n}.$$

Совокупность элементов $\{\varphi_i^{(s)}\}$, $s = \overline{2,p_i}$, $i = \overline{1,n}$, называется обобщенным $A(\lambda)$ -жордановым набором, а число $N = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ корневым числом оператора $A(\lambda)$.

О п р е д е л е н и е 2.3. [5] *Оператор-функция* $A(t)$ *имеет в точке* λ *полный ОЖН, если*

$$det\left\|\left\langle\sum_{j=1}^{p_i} A_j\varphi_i^{(p_i+1-j)},\psi_l\right\rangle\right\| \neq 0. \tag{2.3}$$

Согласно определению ОЖН будет неполным, если хотя бы одна цепочка имеет бесконечную длину или определитель (2.3) равен нулю.

О п р е д е л е н и е 2.4. *Условие отсутствия общих нулей операторов* $A(\lambda_0)$ *и* $\sum\limits_{s=1}^{\infty} A_s(\lambda-\lambda_0)^s$ *назовем "условием снятия вырождения".*

Пусть далее $\varepsilon \in \mathbb{C}$ малый параметр, $|\varepsilon| \leq \varrho_0$ и $A\left(t;\varepsilon\right) = \sum\limits_{k+l=0}^{\infty} A_{lk}\mu^l\varepsilon^k : E_1 \to E_2$, $\mu = t-\lambda_0$, возмущенная оператор-функция такая, что $A\left(t;0\right) = A(t)$, λ_0- фредгольмова точка дискретного спектра оператора $A(t)$ с $N(A(\lambda_0)) = \left\{\varphi_{i0}\right\}_1^n, N^*(A(\lambda_0)) = \left\{\psi_{i0}\right\}_1^n$. Требуется найти собственные значения $\lambda_0+\mu(\varepsilon)$ оператора $A\left(\lambda;\varepsilon\right)$, такие, что $\mu(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon \to 0$, и соответствующие им собственные элементы. Согласно теореме Ф.Реллиха [1] оператор $A\left(\lambda;\varepsilon\right)$ имеет в точности n собственных значений $\lambda_i(\varepsilon)$ (с учетом кратности) с соответствующими собственными функциями $\varphi_i(\varepsilon), \psi_i(\varepsilon)$, причем кратность $\lambda_i(\varepsilon)$ неизвестна. Пусть $\left\{\gamma_{i0}\right\}_1^n, \left\{z_{i0}\right\}_1^n$ биортогональные к $\left\{\varphi_{i0}\right\}_1^n, \left\{\psi_{i0}\right\}_1^n$ системы соответственно. Для каждого $i=\overline{1,n}$ введем оператор

$$\overline{A_i\left(t\right)} = A\left(t\right) + \sum_{j\neq i}\left\langle \cdot, \gamma_{j0}\right\rangle z_{j0}. \qquad (2.4)$$

Точка λ_0 является простой фредгольмовой точкой для совокупности операторов (2.4) с соответствующим собственным элементом φ_{i0} и дефектным функционалом ψ_{i0} для каждого $i=\overline{1,n}$, т.е. $dimN\left(\overline{A_i(\lambda_0)}\right) = dimN^*\left(\overline{A_i(\lambda_0)}\right) = 1$. Заменяя в разложении $A(t;\varepsilon)$ оператор $A(t)$ на $\overline{A_i(t)}$, получим операторы

$$\overline{A_i\left(\lambda;\varepsilon\right)} \equiv A\left(\lambda;\varepsilon\right) + \sum_{j\neq i}\left\langle \cdot, \gamma_{j0}\right\rangle z_{j0}. \qquad (2.5)$$

Т е о р е м а 2.1. *Пусть выполнено условие снятия вырождения (см. определение 2.4). Если* $\lambda_i(\varepsilon)$ *и* $\varphi_i(\varepsilon), \psi_i(\varepsilon), i=\overline{1,n}$ *собственные значения и им соответствующие собственные элементы и дефектные функционалы оператора* $A(t;\varepsilon)$, *то при каждом* $i=\overline{1,n}$ *и достаточно малых* ε $\lambda_i(\varepsilon)$ *является также собственным значением оператора* (2.5) *с соответствующим собственным элементом и дефектным функционалом*

$$\tilde{\varphi}_i(\varepsilon) = \varphi_i + \sum_{s\neq i} c_{is}\varphi_s,\ \tilde{\psi}_i(\varepsilon) = \psi_i + \sum_{s\neq i} d_{is}\psi_s. \qquad (2.6)$$

Доказательство. Если $\lambda_i(\varepsilon)$ является собственным значением (2.5), то соответствующий собственный элемент ищем в виде (2.6), т.е.

$$0 = \overline{A_i\left(\lambda_i;\varepsilon\right)}\tilde{\varphi}_i(\varepsilon) =$$

$$= A\left(\lambda_i;\varepsilon\right)\varphi_i + \sum_{j\neq i} c_{ij}A\left(\lambda_i;\varepsilon\right)\varphi_j + \sum_{j\neq i}\left\langle\varphi_i, \gamma_{j0}\right\rangle z_{j0} + \sum_{j\neq i}\sum_{s\neq i} c_{is}\left\langle\varphi_s, \gamma_{j0}\right\rangle z_{j0}$$

или

$$0 = \sum_{j\neq i} c_{ij}A\left(\lambda_i;\varepsilon\right)\varphi_j + \sum_{j\neq i}\left\langle\varphi_i, \gamma_{j0}\right\rangle z_{j0} + \sum_{j\neq i}\sum_{s\neq i} c_{is}\left\langle\varphi_s, \gamma_{j0}\right\rangle z_{j0}.$$

После применения функционалов $\psi_{k0}, k\neq i$ имеем

$$\sum_{s\neq i} c_{is}\left[\left\langle\varphi_s, \gamma_{k0}\right\rangle + \left\langle A\left(\lambda_i;\varepsilon\right)\varphi_s, \psi_{k0}\right\rangle\right] = -\left\langle\varphi_i, \gamma_{k0}\right\rangle,\ k\neq i. \qquad (2.7)$$

Здесь $A(\lambda_i;\varepsilon)\varphi_s = A(\lambda_i;\varepsilon)\varphi_i + A(\lambda_i;\varepsilon)(\varphi_s-\varphi_i) = A(\lambda_i;\varepsilon)(\varphi_s-\varphi_i)$. Тогда в силу разложений [1] $\varphi_s(\varepsilon)=\varphi_{s0}+\varepsilon\varphi_{s1}+\varepsilon^2\varphi_{s2}+\cdots$ и $A(\lambda_i;\varepsilon)=A(\lambda_0;0)+O(\varepsilon)$ получаем

$$A(\lambda_i;\varepsilon)(\varphi_s-\varphi_i) = (A(\lambda_0;0)+O(\varepsilon))(\varphi_{s0}-\varphi_{i0}+O(\varepsilon)) = O(\varepsilon).$$

Так как $\langle\varphi_i,\gamma_{k0}\rangle = 1+O(\varepsilon)$, определитель системы (2.7) отличен от нуля, и поэтому она имеет единственное решение. Единственность $\tilde{\psi}_i(\varepsilon)$ доказывается аналогично.

З а м е ч а н и е 2.1. *Все собственные значения операторов* (2.5) *являются также собственными значениями оператора* $A(t;\varepsilon)$.

Условие снятия вырождения требуемое в теореме 2.1. является существенным. Действительно, пусть

Пусть

$$A_0=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix},\quad A_{10}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad A_{01}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Рассматривается задача о возмущении собственного значения:

$$(A_0-\lambda A_{10}-\varepsilon A_{01})\,x=0.$$

Невозмущенная задача $(A_0-\lambda A_{10})\,x=0$ имеет двукратное собственное значение $\lambda_0=1$ с соответствующими собственные векторами $\varphi_{10}=(1,0,0)^T$, $\varphi_{20}=(0,1,0)^T$.

Выписав вековой определитель задачи $det\,(A-\lambda A_{10}-\varepsilon A_{01}) \equiv (2-\lambda)(1-\lambda)(1-2\varepsilon-\lambda)=0$ убеждаемся в том, что в малой окрестности точки $\lambda_0=1$ возмущенная задача имеет два собственных значения $\lambda_1(\varepsilon)=1,\ \lambda_1(\varepsilon)=1-2\varepsilon$ с собственными векторами $\tilde{\varphi}_1(\varepsilon)=(1,-1,0)^T$, $\tilde{\varphi}_2(\varepsilon)=(1,-1,0)^T$ соответственно. Проверим условие снятия вырождения:

$$(A_0-1\cdot A_{10})(\varphi_{10}-\varphi_{20}) = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=0,$$

$$A_{01}(\varphi_{10}-\varphi_{20}) = \begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=0,$$

т.е. $\varphi_{10}-\varphi_{20}\in N(A-1\cdot A_{10})\cap N(A_{01})$. Условие снятия вырождения не выполняется.

Производим регуляризацию

$$\widetilde{A_1}=\begin{pmatrix}1-\lambda-\varepsilon&-\varepsilon&0\\-\varepsilon&1-\lambda-\varepsilon&0\\0&0&2-\lambda\end{pmatrix}+\langle\cdot,\varphi_{20}\rangle\varphi_{20}=\begin{pmatrix}1-\lambda-\varepsilon&-\varepsilon&0\\-\varepsilon&2-\lambda-\varepsilon&0\\0&0&2-\lambda\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{A_2}=\begin{pmatrix}1-\lambda-\varepsilon&-\varepsilon&0\\-\varepsilon&1-\lambda-\varepsilon&0\\0&0&2-\lambda\end{pmatrix}+\langle\cdot,\varphi_{10}\rangle\varphi_{10}=\begin{pmatrix}2-\lambda-\varepsilon&-\varepsilon&0\\-\varepsilon&1-\lambda-\varepsilon&0\\0&0&2-\lambda\end{pmatrix}.$$

Видно, что $\lambda_1(\varepsilon)=1$, и $\lambda_1(\varepsilon)=1-2\varepsilon$ не являются собственными значениями для $\widetilde{A_1}$ и $\widetilde{A_2}$, что противоречит теореме 2.1.

3. Возмущение собственных значений

В случае отсутствия обобщенных жордановых цепочек, т.е. $\langle A_1\varphi_{i0}, \psi_{i0}\rangle \neq 0, i = \overline{1,n}$, пусть $\tilde{\varphi}_i(\varepsilon)$ - собственный элемент оператора $\overline{A_i\left(\lambda_i;\varepsilon\right)}$ соответствующий собственному значению $\lambda_i(\varepsilon)$. Тогда $\overline{A_i\left(\lambda_i;\varepsilon\right)}\tilde{\varphi}_i(\varepsilon) = 0$ можно записать в виде

$$A(\lambda_0)\tilde{\varphi}_i(\varepsilon) = \overline{A}\left(\mu_i(\varepsilon)\right)\tilde{\varphi}_i(\varepsilon) + H_i\left(\lambda_i(\varepsilon);\varepsilon\right)\tilde{\varphi}_i(\varepsilon) - \sum_{j\neq i}\langle\tilde{\varphi}_i(\varepsilon), \gamma_{j0}\rangle z_{j0}, \tag{3.8}$$

где $\overline{A}\left(\mu_i(\varepsilon)\right) = A(\lambda_0) - A\left(\lambda_i(\varepsilon)\right),\ H_i\left(\lambda_i(\varepsilon);\varepsilon\right) = A\left(\lambda_i(\varepsilon)\right) - A\left(\lambda_i(\varepsilon);\varepsilon\right)$. Применение оператора Э.Шмидта $\tilde{A}(\lambda_0)$, $\Gamma = \tilde{A}^{-1}(\lambda_0)$, сводит (3.8) к эквивалентной системе

$$\begin{cases} \tilde{A}(\lambda_0)\tilde{\varphi}_i(\varepsilon) = \overline{A}\left(\mu_i(\varepsilon)\right)\tilde{\varphi}_i(\varepsilon) + H_i\left(\lambda_i(\varepsilon);\varepsilon\right)\tilde{\varphi}_i(\varepsilon) + \xi_i z_{i0}, \\ \xi_i = \langle\tilde{\varphi}_i(\varepsilon), \gamma_{i0}\rangle. \end{cases} \tag{3.9}$$

Записав первое уравнение системы (3.9) в виде

$$\tilde{\varphi}_i(\varepsilon) = \xi_i\left[I - \Gamma\overline{A}\left(\mu_i(\varepsilon)\right) - \Gamma H_i\left(\lambda_i(\varepsilon);\varepsilon\right)\right]^{-1}\varphi_{i0} \tag{3.10}$$

и подставив $\tilde{\varphi}_i(\varepsilon)$ во второе уравнение (3.9) получим уравнение разветвления собственного значения λ_0:

$$\langle\left[\overline{A}\left(\mu_i(\varepsilon)\right) + H_i\left(\lambda_i(\varepsilon);\varepsilon\right)\right]\left[I - \Gamma\overline{A}\left(\mu_i(\varepsilon)\right) - \Gamma H_i\left(\lambda_i(\varepsilon);\varepsilon\right)\right]^{-1}\varphi_{i0}, \psi_{i0}\rangle = 0. \tag{3.11}$$

или учитывая аналитичность оператора $A(t;\varepsilon)$ в окрестности точки $(\lambda_0, 0)$, после разложения в степенной ряд согласно формуле (2.2)

$$\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} L_{sli}\mu_i^s\varepsilon^l = 0, \quad L_{sli} = \sum_{(s,l)=(s_1,l_1)+\dots+(s_k,l_k)}\langle A_{s_1l_1}\Gamma A_{s_2l_2}\dots\Gamma A_{s_kl_k}\varphi_{i0}, \psi_{i0}\rangle. \tag{3.12}$$

При наших предположениях коэффициент $L_{10} = \langle A_1\varphi_{i0}, \psi_{i0}\rangle$ отличен от нуля. Поэтому $\mu_i(\varepsilon)$ для всех $i = \overline{1,n}$ определяются из уравнения (3.12) в виде ряда по целым степеням ε. Определив $\mu_i(\varepsilon)$ и подставляя его в формулу (3.10), находим соответствующий собственный элемент $\tilde{\varphi}_i(\varepsilon)$ в виде ряда по целым степеням ε. Тем самым доказана

Теорема 3.1. *Если* $dimN\left(A(\lambda_0)\right) = dimN^*\left(A(\lambda_0)\right) = n$ *и* $\langle A_1\varphi_{i0}, \psi_{i0}\rangle \neq 0$ *для всех* $i = \overline{1,n}$, *то для достаточно малых* ε *существуют ровно* n *простых собственных значений* $\lambda_i(\varepsilon)$ $(\lambda_i(0) = \lambda_0)$ *и соответствующие им собственные элементы* $\tilde{\varphi}_i(\varepsilon)$ *и дефектные функционалы* $\tilde{\psi}_i(\varepsilon)$, *аналитические по* ε.

Теперь рассмотрим случай наличия ОЖЦ $\left\{\varphi_{i0}^{(j)}\right\}_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,p_i}}$, таких, что $\langle\sum\limits_{k=1}^{p_i} A_k\varphi_{i0}^{(p_i+1-k)}, \psi_{i0}\rangle \neq 0$ для всех $i = \overline{1,n}$. Это значит, что все ОЖЦ конечны. Тогда в (3.12) согласно (2.2) $L_{p_i0} = \langle\sum\limits_{k=1}^{p_i} A_k\varphi_{i0}^{(p_i+1-k)}, \psi_{i0}\rangle \neq 0$.

Убывающая часть диаграммы Ньютона, построенной для уравнения разветвления (3.12) состоит либо из отрезка, соединяющего точки $(1,1)$ и $(p_i, 0)$ (так будет, если все L_{0j} равны нулю и $L_{11} \neq 0$), либо из двух отрезков: указанного выше и отрезка, соединяющего точки $(1,1)$ и $(0, q_i)$ где q_i- номер первого отличного от нуля члена в последовательности $\{L_{0j}\}$. Первому отрезку отвечает показатель $\frac{1}{p_i-1}$, а второму отрезку в любом случае–целочисленный показатель. Следовательно, оператор $A(\lambda, \varepsilon)$ для достаточно малых ε, имеет ровно $N = \sum_{i=1}^{n} p_i$ ($N-$ корневое число) различных непрерывных по ε собственных значений $\lambda_i(\varepsilon)$, $\lambda_i(0) = \lambda_0$, причем n собственных значений представляются сходящимися рядами по целым степеням ε и $N-n$ собственных значений по степеням $\varepsilon^{\frac{1}{p_i-1}}$. Каждому $\lambda_i(\varepsilon)$ отвечает собственный элемент $\tilde{\varphi}_i(\varepsilon)$ представимый сходящимся рядом по тем же степеням ε, что и соответствующие ему $\lambda_i(\varepsilon)$. Таким образом, доказан следующий результат.

Т е о р е м а 3.2. *Пусть при наличии ОЖЦ* $L_{p_i0} = \langle \sum_{k=1}^{p_i} A_k \varphi_{i0}^{(p_i+1-k)}, \psi_{i0} \rangle \neq 0$ *для всех* $i = \overline{1,n}$. *Если* $L_{0j} = 0, j = \overline{1,\infty}$ *и* $L_{11} \neq 0$, *то существуют* N *простых собственных значений и отвечающих им собственных элементов, представимых в виде рядов по степеням* $\varepsilon^{\frac{1}{p_i-1}}$. *Если же* $L_{0j} = 0, j = \overline{1, q_i - 1}, L_{0q_i} \neq 0, L_{11} \neq 0$, *то существуют ровно* N *собственных значений, причем* n *из них с соответствующими собственными элементами представимыми по целым степеням* ε, *а остальные* $N-n$ *с соответствующими собственными элементами представимыми по степеням* $\varepsilon^{\frac{1}{p_i-1}}$.

З а м е ч а н и е 3.1. *Когда* $L_{0j} = 0, j = \overline{1,\infty}$ *и* $L_{11} = 0$, *метод диаграммы Ньютона позволяет определить все собственные значения с соответствующими собственными элементами представимых сходящимися рядами по дробным степеням* ε, *по отличному от нуля первому коэффициенту из ряда* $\{L_{1j}\}$.

Список литературы

1. F. Rellich. *Stőrungstheory der Spektalzerlegung.* I, Math. Ann., **113**, (1936), 600–619; II, Math. Ann., **113**, (1936), 677–685; III, Math. Ann., **116**, (1939), 555–570.

2. Sz.-Nagy *Perturbation des transformation lineaires fermees.* Acta Sci. Math. Szeged., **11**, (1951), 125-137.

3. Т. Като.*Теория возмущений линейных операторов*, Мир, Москва, 1972.

4. М. И. Вишик, Л. А. Люстерник. *Решение некоторых задач возмущений в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений.* Успехи матем. наук,(1960),**15**, no. 3,3–80.

5. М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. *Теория ветвления решений нелинейных уравнений.* М., Наука, 1969.

6. Д.Г. Рахимов. О вычислении кратных собственных значений редукционным методом ложных возмущений, Жур. СВМО, 2010, № 3, стр. 106-112.

7. Д.Г. Рахимов. О регуляризации кратных собственных значений редукционным методом ложных возмущений. Вестник Самарского Государственного Университета, Естественнонаучная серия, 2012, № 6(97), стр. 35-41.

8. Б. В. Логинов, Ю. Б. Русак. *Обобщенная жордановая структура в теории ветвления.* В сб."Прямая и обратная задачи для дифференциальных уравнений в частных производных и их приложения (под ред. М. С. Салахитдинова.). "Фан Ташкент, 1978, 133–148.

On Fredholm eigenvalues perturbations for linear operators.

© D. G. Rakhimov[2]

Abstract. In work on the basis of the reduction method, developed in works [6], [7], allowing to reduce cases of the multiple eigenvalues to simple, the problem of perturbation of the Fredholm points of a discrete spectrum of linear operator-functions is investigated.

Key Words: bifurcation theory methods, perturbation theory, branching equation,generalized Jordan chains, regularization

[2] Associate Professor of department of applied mathematics and informatics, Branch of the Moscow State University after M.V. Lomonosov in Tashkent, davranaka@yandex.com