

УДК 517.9

## Сценарий изменения гомотопического типа замыкания инвариантного седлового многообразия

© Е. В. Ноздринова<sup>1</sup>

**Аннотация.** В статье рассматриваются поверхностные градиентно-подобные диффеоморфизмы. Замыкания инвариантных многообразий седловых точек таких систем содержат в своем замыкании узловые точки. В случае, когда такая точка одна, замыкание инвариантного многообразия является замкнутой кривой, гомеоморфной окружности. Сопрягающий гомеоморфизм в общем случае меняет гомотопический тип замкнутой кривой, при этом сами диффеоморфизмы могут остаться в одном изотопическом классе. Это означает, что в пространстве диффеоморфизмов две такие системы соединяются дугой, но любая такая дуга необходимо претерпевает бифуркации. В настоящей работе описан сценарий изменения гомотопического типа замыкания инвариантного седлового многообразия. При этом построенная дуга является устойчивой в пространстве диффеоморфизмов.

**Ключевые слова:** устойчивая дуга, седло-узел, гомотопический тип кривой, бифуркация, многообразия

### 1. Введение и формулировка результата

Напомним, что диффеоморфизм  $f$ , заданный на замкнутом многообразии, является *градиентно-подобным*, если его неблуждающее множество  $\Omega_f$  состоит из конечного числа гиперболических точек и инвариантные многообразия различных седловых точек не пересекаются.

Диффеоморфизм  $f$  называется *полярным*, если множество  $\Omega_f$  содержит ровно две узловые точки, а именно одну стоковую и одну источниковую.

Обозначим через  $G$  класс полярных градиентно-подобных диффеоморфизмов на двумерном торе  $\mathbb{T}^2$ , в предположении, что все неблуждающие точки неподвижны и имеют положительный тип ориентации. Зафиксируем систему образующих фундаментальной группы тора  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ :

$$a = \mathbb{S}^1 \times \{0\} = \langle 1, 0 \rangle; \quad b = \{0\} \times \mathbb{S}^1 = \langle 0, 1 \rangle.$$

Из результатов работ [1–4] следует, что любой диффеоморфизм  $f \in G$  обладает следующими свойствами:

1. Неблуждающее множество  $\Omega_f$  диффеоморфизма  $f$  состоит в точности из четырех неподвижных гиперболических точек: стока  $\omega_f$ , источника  $\alpha_f$  и седел  $\sigma_f^1, \sigma_f^2$ , замыкания инвариантных многообразий которых являются замкнутыми кривыми:

$$c_f^{u1} = cl W_{\sigma_f^1}^u = W_{\sigma_f^1}^u \cup \omega_f, \quad c_f^{s1} = cl W_{\sigma_f^1}^s = W_{\sigma_f^1}^s \cup \alpha_f,$$

$$c_f^{u2} = cl W_{\sigma_f^2}^u = W_{\sigma_f^2}^u \cup \omega_f, \quad c_f^{s2} = cl W_{\sigma_f^2}^s = W_{\sigma_f^2}^s \cup \alpha_f.$$

<sup>1</sup>Ноздринова Елена Вячеславовна, научный сотрудник Международной лаборатории динамических систем и приложений, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5209-377X>, maati@mail.ru

2. Существует единственная унимодулярная целочисленная матрица

$$A_f = \begin{pmatrix} \mu_f^1 & \mu_f^2 \\ \nu_f^1 & \nu_f^2 \end{pmatrix}$$

такая, что кривые  $c_f^{u1}$ ,  $c_f^{s2}$  имеют гомотопический тип  $\langle \mu_f^1, \nu_f^1 \rangle$  и кривые  $c_f^{u2}$ ,  $c_f^{s1}$  имеют гомотопический тип  $\langle \mu_f^2, \nu_f^2 \rangle$  в базисе  $a, b$ .

3. Для любой унимодулярной целочисленной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \mu^1 & \mu^2 \\ \nu^1 & \nu^2 \end{pmatrix}$$

существует диффеоморфизм  $f \in G$  такой, что  $A_f = A$ .

Таким образом, все диффеоморфизмы класса  $G$  лежат в одном изотопическом классе и, следовательно, соединяются дугой в пространстве диффеоморфизмов. Однако в общем случае дуга, соединяющая изотопные диффеоморфизмы, может иметь бесконечное число бифуркаций. Например, таким свойством обладает любая дуга, соединяющая грубые преобразования окружности с разными числами вращения. Кроме того, сами бифуркации на дуге могут оказаться нетипичными, что делает дугу *неустойчивой* – меняющей свои качественные свойства при малом шевелении.

Согласно [5], для диффеоморфизмов замкнутого многообразия  $M^n$  с конечным предельным множеством, устойчивость дуги  $\{f_t \in \text{Diff}(M^n), t \in [0, 1]\}$  характеризуется конечным числом бифуркационных значений  $0 < b_1 < \dots < b_k < 1$ ; при этом бифуркационный диффеоморфизм  $f_{b_i}, i \in \{1, \dots, k\}$  обладает следующими свойствами:

1) диффеоморфизм  $f_{b_i}$  имеет ровно одну негиперболическую периодическую орбиту, а именно флип или некритический седло-узел, при этом дуга проходит через бифуркационное значение типично;

2) все инвариантные многообразия периодических точек диффеоморфизма  $f_{b_i}$  пересекаются трансверсально и диффеоморфизм не имеет циклов.

Хорошо известно, что изотопные диффеоморфизмы Морса-Смейла на многообразиях любой размерности в общем случае не соединяются устойчивой дугой, в отличие от потоков (см., например, [6] для обзора результатов по данной тематике). В частности, в размерности два, препятствия к существованию такой дуги связаны с разницей последовательностей фильтрации [7], периодических данных [6], [8], гетероклинических пересечений [9] и др.

В настоящей работе на примере полярных диффеоморфизмов тора показано, что разница гомотопических типов замыканий инвариантных седловых многообразий не является препятствием к существованию устойчивой дуги. Основным результатом настоящей работы является доказательство следующего факта.

**Т е о р е м а 1.1** *Существует устойчивая дуга  $f_t$  с двумя седло-узловыми бифуркациями, соединяющая диффеоморфизмы  $f_0, f_1 \in G$  такие, что  $A_{f_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,*

$$A_{f_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

## 2. Вспомогательные конструкции

### 2.1. Построение диффеоморфизма $f_0$

Простейшим примером диффеоморфизма из класса  $G$  является прямое произведение двух копий диффеоморфизма источник-сток на окружности  $\mathbb{S}^1$ . Сначала построим диффеоморфизм источник-сток на окружности. Для этого рассмотрим функцию  $\bar{\phi}_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , заданную формулой:

$$\bar{\phi}_0(x) = x - \frac{1}{4\pi} \sin\left(2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right)\right).$$

По построению  $x = \frac{1}{4}$  и  $x = \frac{3}{4}$  – неподвижные точки отображения  $\bar{\phi}_0$  на отрезке  $[0, 1]$  (Рис. 2.1).

Рассмотрим проекцию  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ , заданную формулой  $\pi(x) = e^{2\pi i x}$ . В силу того, что функция  $\bar{\phi}_0$  является строго монотонно возрастающей и периодической с периодом 1, она допускает проекцию на окружность в виде диффеоморфизма

$$\phi_0 = \pi \bar{\phi}_0 \pi^{-1} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1.$$

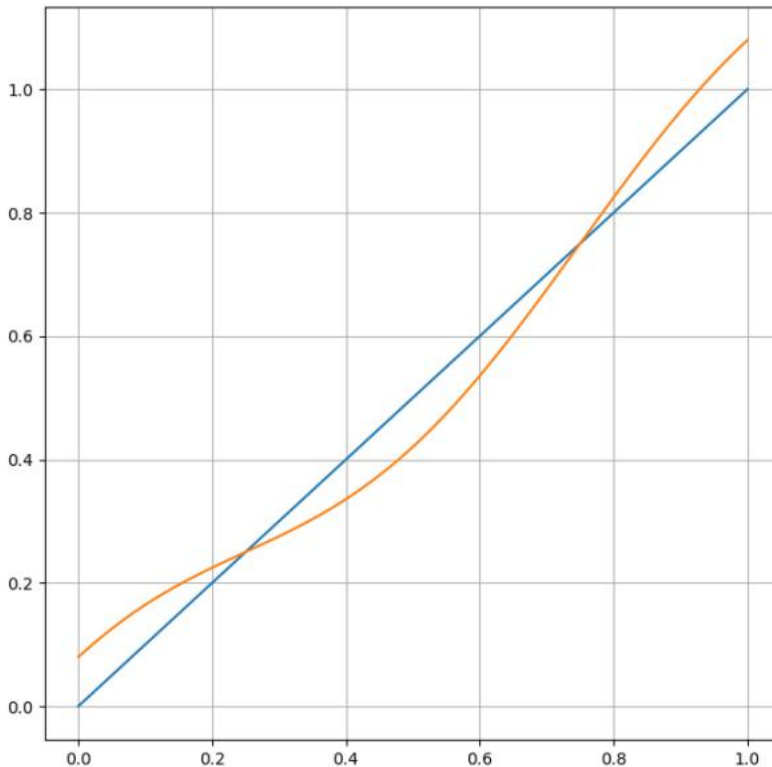


Рис. 2.1. График отображения  $\bar{\phi}_0$

По построению диффеоморфизм  $\phi_0$  имеет неподвижный гиперболический сток в точке  $N = \pi\left(\frac{1}{4}\right)$  и неподвижный гиперболический источник в точке  $S = \pi\left(\frac{3}{4}\right)$ .

Определим диффеоморфизм  $f_0 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  по формуле (Рис.2.2)

$$f_0(z, w) = (\phi_0(z), \phi_0(w)), \quad z, w \in \mathbb{S}^1.$$

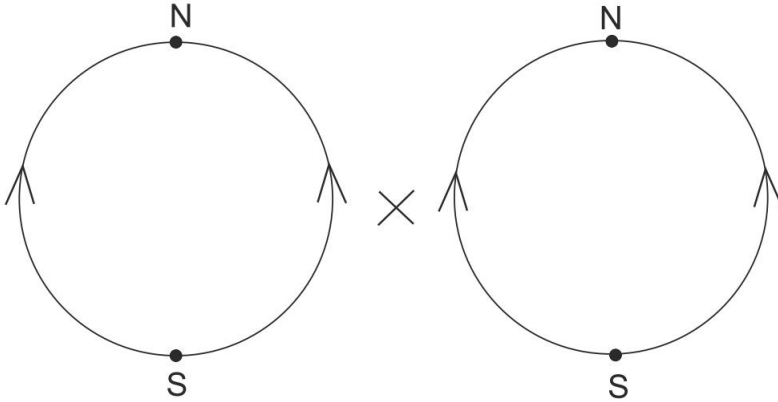


Рис. 2.2. Декартов квадрат диффеоморфизма  $\phi_0$

По построению диффеоморфизм  $f_0$  имеет неподвижный гиперболический сток в точке  $\omega = (N, N)$ , гиперболический источник  $\alpha = (S, S)$  и две седловые точки  $\sigma_1 = (N, S), \sigma_2 = (S, N)$  (Рис.2.3). При этом замыкания инвариантных многообразий каждой из них лежат в классе образующих  $a, b$ . Именно,

$$c_{f_0}^{u1} = cl W_{\sigma_1}^u = \mathbb{S}^1 \times \{S\}, \quad c_{f_0}^{s1} = cl W_{\sigma_1}^s = \{N\} \times \mathbb{S}^1,$$

$$c_{f_0}^{u2} = cl W_{\sigma_2}^u = \{S\} \times \mathbb{S}^1, \quad c_{f_0}^{s2} = cl W_{\sigma_2}^s = \mathbb{S}^1 \times \{N\}.$$

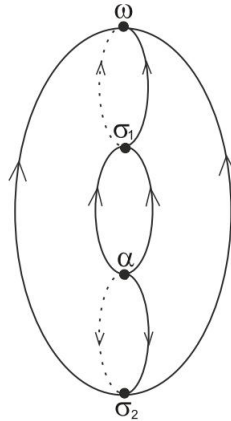


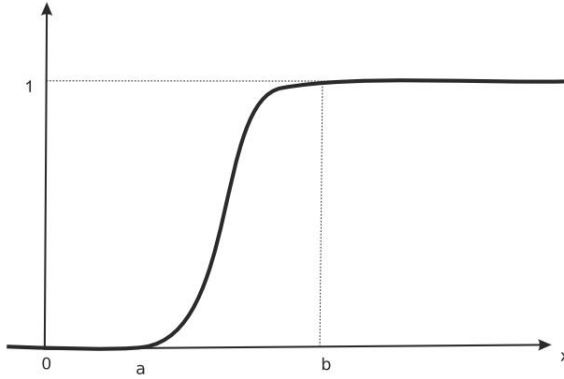
Рис. 2.3. Диффеоморфизм  $f_0$

## 2.2. Построение модельных функций

В этом разделе построены модельные функции, которые в дальнейшем будут использованы в построении устойчивой дуги, соединяющей диффеоморфизм  $f_0$  с диффеоморфизмом  $f_1$ . В основе построения лежит принцип склейки бесконечно гладких функций посредством следующей *сигмоид-функции*.

Пусть  $a < b$  и  $\delta_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  сигмоид-функция, определенная формулой (см. рисунок 2.4)

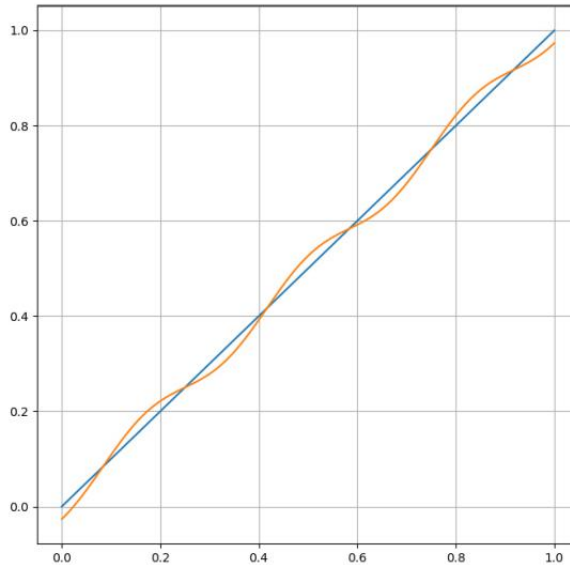
$$\delta_{a,b}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{(a+b)/2-x}{(x-a)^2(x-b)^2}\right)}, & a < x < b, \\ 1, & x \geq b. \end{cases}$$



**Рис. 2.4.** График сигмоид-функции

Определим функцию  $\bar{\phi}_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  по формуле (Рис. 2.5).

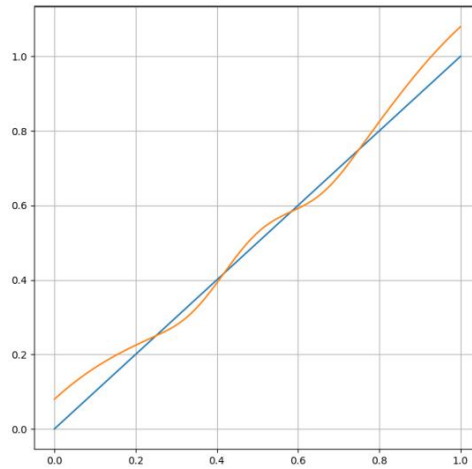
$$\bar{\phi}_1(x) = x - \frac{1}{12\pi} \sin\left(6\pi\left(x - \frac{1}{4}\right)\right).$$



**Рис. 2.5.** График функции  $\bar{\phi}_1(x)$

Определим функцию  $\bar{g}_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (Рис. 2.6) по формуле

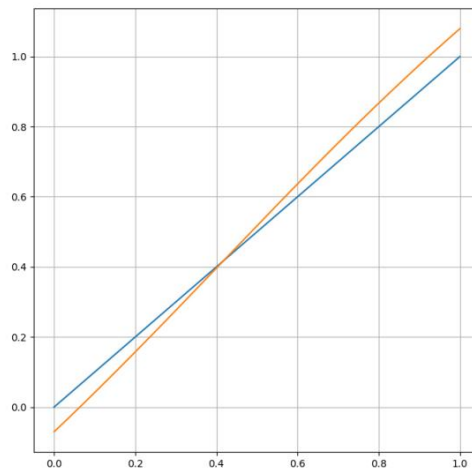
$$\bar{g}_1(x) = \begin{cases} \bar{\phi}_0(x), & 0 \leq x \leq 0,26, \\ (1 - \delta_{0,26;0,27}(x))\bar{\phi}_0(x) + \delta_{0,26;0,27}(x)\bar{\phi}_1(x), & 0,26 < x < 0,27, \\ \bar{\phi}_1(x), & 0,27 \leq x \leq 0,76, \\ (1 - \delta_{0,76;0,77}(x))\bar{\phi}_1(x) + \delta_{0,76;0,77}(x)\bar{\phi}_0(x), & 0,76 < x < 0,77, \\ \bar{\phi}_0(x), & 0,77 \leq x \leq 1 \end{cases}$$



**Рис. 2.6.** График функции  $\bar{g}_1(x)$

Определим функцию  $\bar{\phi}_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (Рис. 2.7) по формуле

$$\bar{\phi}_2(x) = x + \frac{1}{4\pi} \sin\left(\frac{5}{6}\pi\left(x - \frac{5}{12}\right)\right).$$



**Рис. 2.7.** График функции  $\bar{\phi}_2(x)$

Определим функцию  $\bar{g}_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (см. Рис. 2.8) по формуле

$$\bar{g}_2(x) = \begin{cases} \bar{g}_1(x), & 0 \leq x \leq 0,42, \\ (1 - \delta_{0,42;0,43}(x))\bar{g}_1(x) + \delta_{0,42;0,43}(x)\bar{\phi}_2(x), & 0,42 < x < 0,43, \\ \bar{\phi}_2(x), & 0,43 \leq x \leq 0,98, \\ (1 - \delta_{0,98;0,99}(x))\bar{\phi}_2(x) + \delta_{0,98;0,99}(x)\bar{g}_1(x), & 0,98 < x < 0,99, \\ \bar{g}_1(x), & 0,99 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

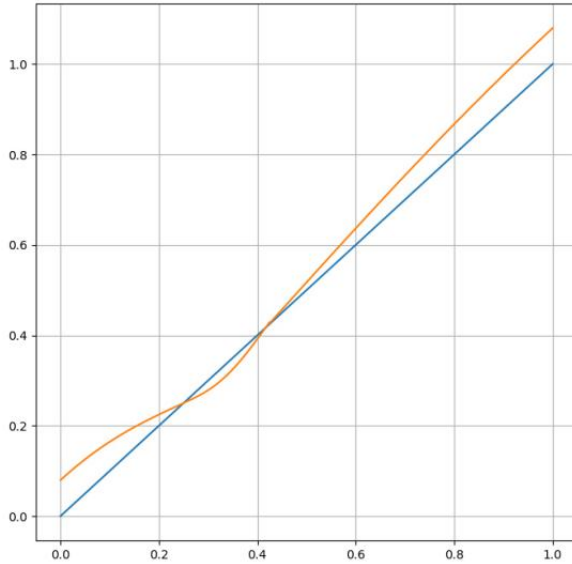


Рис. 2.8. График функции  $\bar{g}_2(x)$

### 3. Построение устойчивой дуги (доказательство Теоремы 1.1)

Устойчивая дуга  $f_t$ , соединяющая диффеоморфизм  $f_0$  с некоторым диффеоморфизмом  $f_1$  таким, что  $A_{f_1} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , является произведением дуг  $\Gamma_t^1$  и  $\Gamma_t^2$ , построенных в шаге 1 и шаге 2 ниже. Везде далее в этом разделе отображения без черты являются проекциями на  $\mathbb{S}^1$  посредством  $\pi$  отображения с чертой, заданного на прямой  $\mathbb{R}$ .

#### Шаг 1. Первая седло-узловая бифуркация

##### 1. Рождение седло-узловой точки

Начнем с диффеоморфизма  $f_0 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ , определенного по формуле

$$f_0(z, w) = (\phi_0(z), \phi_0(w)), \quad z, w \in \mathbb{S}^1.$$

Положим

$$\bar{\eta}_t^1(x) = (1 - t)\bar{\phi}_0(x) + t\bar{g}_1(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, 1]$$

и

$$\bar{\eta}_{t,\tau}^1(x) = (1 - \tau)\bar{\eta}_t^1(x) + \tau\bar{\phi}_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, 1], \quad \tau \in [0, 1].$$

Определим гладкую дугу  $H_t^1 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ ,  $t \in [0, 1]$  по формуле

$$H_t^1(w, z) = \begin{cases} (\phi_0(\pi(x)), \eta_{t, |8x-2|}^1(z)), & x \in \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right), z \in \mathbb{S}^1, \\ f_0(\pi(x), z), & x \in \left(-\frac{5}{8}, \frac{1}{8}\right), z \in \mathbb{S}^1 \end{cases}$$

При  $t = \frac{3}{4}$ , диффеоморфизм  $H_{\frac{3}{4}}^1$  имеет седло-узловую точку  $p = (N, \pi(0))$ , чье устойчивое многообразие диффеоморфно полуплоскости, границей которой является дуга  $\gamma_p$  (Рис. 3.9).

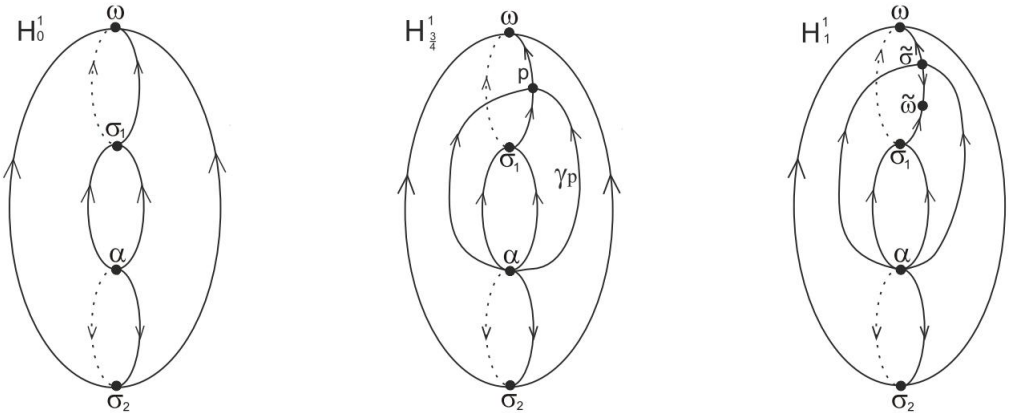


Рис. 3.9. Изотопия  $H_t^1$  на торе

**2. Поворот сепаратрисы седла  $\sigma_2$**

Рассмотрим фундаментальную область  $K = \left[ \pi(0), \pi\left(\frac{1}{4\pi}\right) \right] \times \mathbb{S}^1$  ограничения диффеоморфизма  $f_0$  на  $V = \left[ \pi\left(-\frac{1}{4}\right), \pi\left(\frac{1}{4}\right) \right] \times \mathbb{S}^1$ . Положим  $\hat{V} = V/f_0$ . Тогда  $\hat{V}$  – двумерный тор, полученный из  $K$  отождествлением границ в силу отображения  $f_0$ . Обозначим через  $q : V \rightarrow \hat{V}$  естественную проекцию. Положим  $\hat{\gamma}_2 = q(W_{\sigma_2}^u \cap V)$  и  $\hat{\gamma}_1 = q(W_{\sigma_1}^s \cap V)$ . Поскольку диффеоморфизм  $H_t$  при всех  $t \in [0, 1]$  совпадает с  $f_0$  на кольце  $\left[ \pi\left(-\frac{1}{4}\right), \pi\left(\frac{1}{8}\right) \right] \times \mathbb{S}^1$ , то корректно определена окружность  $\hat{\gamma}_p = q(\gamma_p \cap K)$ .

Положим  $W = \left[ \pi\left(-\frac{1}{4}\right); \pi\left(\frac{1}{4}\right) \right] \times \left[ \pi\left(-\frac{1}{4}\right); \pi\left(\frac{1}{4}\right) \right]$  и  $\hat{W} = p(W)$ . По построению окружность  $\hat{\gamma}_p$  делит кольцо  $\hat{W}$  на два кольца, замыкания которых обозначим через  $\hat{W}_1, \hat{W}_2$ , полагая, что  $\hat{\gamma}_1 \subset \hat{W}_1$  и  $\hat{\gamma}_2 \subset \hat{W}_2$  (Рис. 3.10).

Выберем не гомотопную нулю окружность  $\hat{\gamma} \subset \text{int } \hat{W}_1$ . Согласно работе [4], существует гладко изотопный тождественному диффеоморфизм  $\hat{h}_1 : \hat{V} \rightarrow \hat{V}$  такой, что  $\hat{h}_1(\hat{\gamma}_2) = \hat{\gamma}$ .

Для  $x_i \in [-\frac{1}{4}; 0]$  положим  $K_i = [\pi(x_i); (\pi(\bar{\phi}_0^{-1}(x_i)))] \times \mathbb{S}^1$ . Выберем открытое покрытие  $D = \{D_1, \dots, D_{k_1}\}$  тора  $\mathbb{T}^2$  такое, что компонента связности  $\bar{D}_i$  множества  $q^{-1}(D_i)$  является подмножеством  $K_i$  для некоторых  $x_i < \bar{\phi}_0^{-1}(x_{i-1})$ . Согласно лемме о фрагментации [10] существуют гладко изотопные тождественному диффеоморфизмы  $\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_{k_1} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  со следующими свойствами:



i) для каждого  $i \in \{1, \dots, k_1\}$  существует гладкая изотопия  $\{\hat{w}_{i,t}\}$ , тождественная вне  $D_i$  и соединяющая тождественное отображение и  $\hat{w}_i$ ;

ii)  $\hat{h}_1 = \hat{w}_1 \dots \hat{w}_{k_1}$ .

Пусть  $w_{i,t} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  – диффеоморфизм, который совпадает с  $(q|_{K_i})^{-1} \hat{w}_{i,t} q$  на  $K_i$  и с тождественным отображением вне  $K_i$ . Положим

$$\zeta_t = w_{1,t} \dots w_{k_1,t} f_0, \quad G_t^1 = \begin{cases} \zeta_{2t}, & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ \zeta_1, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

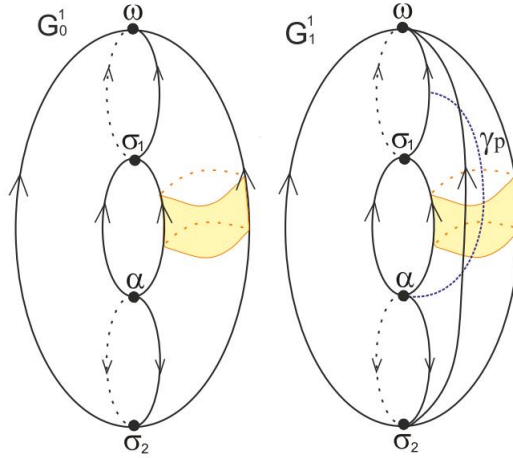


Рис. 3.10. Изотопия  $G_t^1$  на торе

**3. Объединение изотопий  $H_t^1$  и  $G_t^1$**

Определим гладкую дугу  $\Gamma_t^1 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2, t \in [0, 1]$  по формуле (см. Рис. 3.11):

$$\Gamma_t^1(z, w) = \begin{cases} H_t^1(\pi(x), w), & x \in \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right), z \in \mathbb{S}^1, \\ G_t^1(\pi(x), w), & x \in \left(-\frac{1}{4}, 0\right), z \in \mathbb{S}^1, \\ f_0(\pi(x), w), & x \in \left[-\frac{5}{8}, -\frac{1}{4}\right] \cup \left[0, \frac{3}{8}\right], z \in \mathbb{S}^1. \end{cases}$$

**Шаг 2. Вторая седло-узловая бифуркация**

**1. Слияние седловой и узловой точек**

Для всех  $t \in [0; 1]$  положим  $\bar{\eta}_t^2(x) = t\bar{g}_2(x) + (1 - t)\bar{g}_1(x), x \in \mathbb{R}$  и

$$\bar{\eta}_{t,\tau}^2(x) = (1 - \tau)\bar{\eta}_t^2(x) + \tau\bar{\phi}_0(x), x \in \mathbb{R}, t \in [0, 1], \tau \in [0, 1].$$

Определим гладкую дугу  $H_t^2 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2, t \in [0, 1]$  по формуле:

$$H_t^2(w, z) = \begin{cases} (\phi_0(\pi(x)), \eta_{t, |8x-2|}^2(z)), & x \in \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right), z \in \mathbb{S}^1, \\ \Gamma_1(\pi(x), z), & x \in \left(-\frac{5}{8}, \frac{1}{8}\right), z \in \mathbb{S}^1. \end{cases}$$

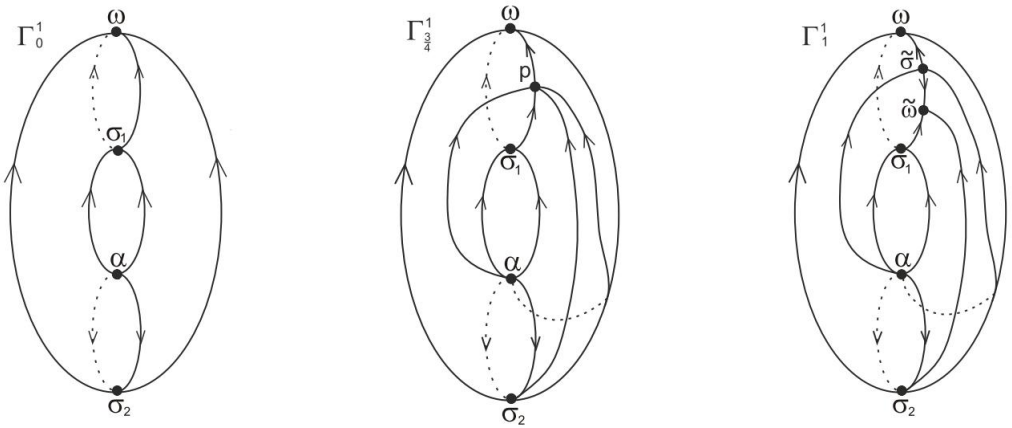


Рис. 3.11. Изотопия  $\Gamma_t^1$  на торе

Дуга  $H_t^2$  реализует слияние стока  $\tilde{\omega}$  и седла  $\sigma_1$  в седло-узловую точку  $\tilde{p}$  и дальнейшее ее исчезновение. Обозначим через  $\beta_{\tilde{p}}$  границу устойчивого многообразия седло-узла  $\tilde{p}$ .

**2. Поворот сепаратрисы седла  $\sigma_2$**

Поскольку диффеоморфизм  $H_t^2$  при всех  $t \in [0, 1]$  совпадает с  $f_0$  на кольце  $K$ , то корректно определены окружности  $\hat{\beta}_2 = q(W_{\sigma_2}^u \cap K)$ ,  $\hat{\beta}_1 = q(W_{\sigma_1}^s \cap K)$  и  $\hat{\beta}_{\tilde{p}} = q(\beta_{\tilde{p}} \cap K)$ .

Положим  $\hat{W}_3 = \hat{V} \setminus \hat{W}$ . Выберем не гомотопную нулю окружность  $\hat{\beta} \subset \text{int } \hat{W}_3$ . Согласно работе [4], существует гладко изотопный тождественному диффеоморфизм  $\hat{h}_2 : \hat{V} \rightarrow \hat{V}$  такой, что  $\hat{h}_2(\hat{\beta}_2) = \hat{\beta}$  и  $\hat{h}_2(\hat{\beta}_1) = \hat{\beta}_1$ .

Выберем открытое покрытие  $U = \{U_1, \dots, U_{k_2}\}$  тора  $\mathbb{T}^2$  такое, что компонента связности  $\bar{U}_i$  множества  $q^{-1}(U_i)$  является подмножеством  $K_i$  для некоторых  $x_i < \bar{\phi}_0^{-1}(x_{i-1})$ . Согласно лемме о фрагментации [10], существуют гладко изотопные тождественному диффеоморфизмы  $\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_{k_2} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  со следующими свойствами:

- i) для каждого  $i \in \{1, \dots, k_2\}$  существует гладкая изотопия  $\{\hat{v}_{i,t}\}$ , тождественная вне  $U_i$  и соединяющая тождественное отображение и  $\hat{v}_i$ ;
- ii)  $\hat{h}_2 = \hat{v}_1 \dots \hat{v}_{k_2}$ .

Пусть  $v_{i,t} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  – диффеоморфизм, который совпадает с  $(q|_{K_i})^{-1} \hat{v}_{i,t} q$  на  $K_i$  и с тождественным отображением вне  $K_i$ . Положим

$$\xi_t = v_{1,t} \dots v_{k_2,t} \Gamma_1, \quad G_t^2 = \begin{cases} \xi_{2t}, & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ \xi_1, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

**3. Объединение изотопий  $H_t^2$  и  $G_t^2$**

Определим гладкую дугу  $\Gamma_t^2 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ ,  $t \in [0, 1]$  (см. Рис. 3.11) по формуле

$$\Gamma_t^2(z, w) = \begin{cases} H_t^2(\pi(x), w), & x \in \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right), z \in \mathbb{S}^1, \\ G_t^2(\pi(x), w), & x \in \left(-\frac{1}{4}, 0\right), z \in \mathbb{S}^1, \\ f_0(\pi(x), w), & x \in \left[-\frac{5}{8}, -\frac{1}{4}\right] \cup \left[0, \frac{3}{8}\right], z \in \mathbb{S}^1. \end{cases}$$

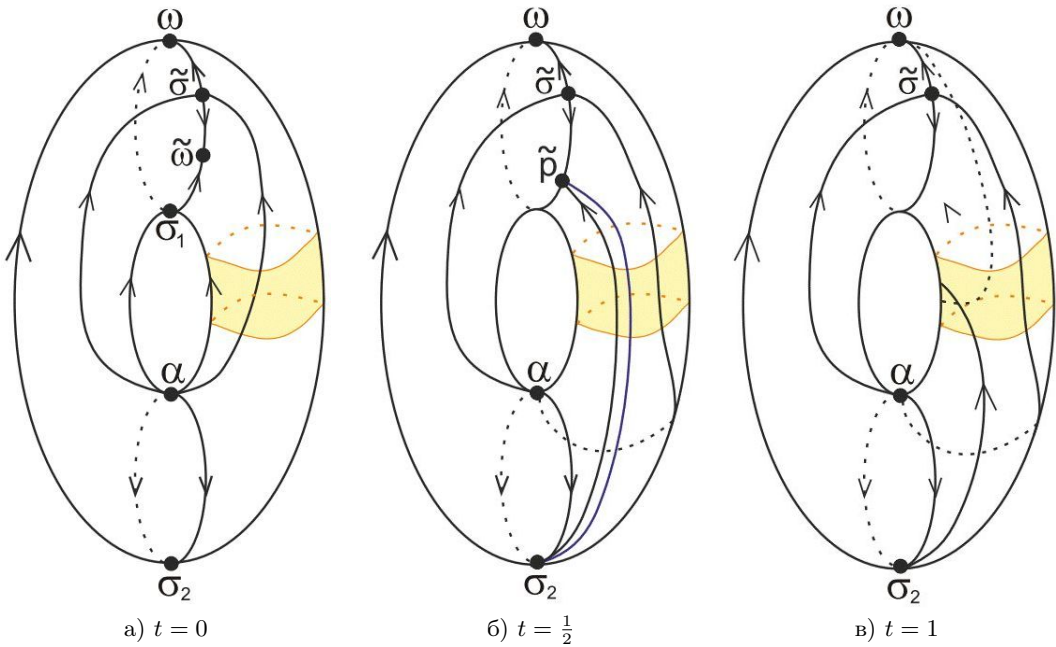


Рис. 3.12. Изотопия  $\Gamma_t^1$  на торе

**Благодарности.** Автор благодарит О. В. Починку за внимательное прочтение рукописи. Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. V. Grines V., T. Medvedev, O. Pochinka Dynamical systems on 2- and 3-manifolds // Switzerland, Springer. 2016. 313 p.
2. Милнор Дж. Теория Морса. М.: Мир, 1965. 184 с.
3. Nozdrinova E., Pochinka O. On the existence of a smooth arc without bifurcations joining source-sink diffeomorphisms on the 2-sphere // Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 990. No. 1. pp. 1–7.
4. Rolfsen D. Knots and links // Bull. Amer. Math. Soc. 1977. Vol. 83, No. 5 pp. 931–935.
5. Newhouse S. E., Palis J., Takens F. Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms // Publications Mathematiques de l'I.H.E.S. 1983. Vol. 57 pp. 5–71.
6. Nozdrinova E., Pochinka O. Solution of the 33rd Palis-Pugh problem for gradient-like diffeomorphisms of a two-dimensional sphere // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2020.
7. Blanchard P. Invariants of the NPT isotopy classes of Morse-Smale diffeomorphisms of surfaces // Duke Mathematical Journal. 1980. Vol. 47, No. 1. pp. 33–46.

8. Newhouse S., Peixoto M. There is a simple arc joining any two Morse-Smale flows // *Aserisque*. 1976. Vol. 31. pp. 15–41.
9. Matsumoto S. There are two isotopic Morse-Smale diffeomorphisms which cannot be joined by simple arcs // *Inventiones Mathematicae*. 1979. Vol. 51. pp. 1–7.
10. Banyaga A. The structure of the group of equivariant diffeomorphism // *Topology*. 1977. Vol. 16. pp. 279–283.

*Поступила 24.07.2020*

MSC2020 37B35

## A scenario of the homotopy type changing of the invariant saddle manifold closure

© E. V. Nozdrinova<sup>1</sup>

**Abstract.** The paper deals with surface gradient-like diffeomorphisms. The closures of the invariant manifolds of saddle points of such systems contain nodal points in their closure. In the case when there is only one such point, the closure of the invariant manifold is a closed curve that is homeomorphic to the circle. In a general case the conjugating homeomorphism changes the homotopy type of the closed curve, while the diffeomorphisms themselves may remain in the same isotopic class. This means that in the space of diffeomorphisms two such systems are connected by an arc, but every such arc necessarily undergoes bifurcations. In this paper, we describe a scenario for changing the homotopy type of the closure of the invariant saddle manifold. Moreover, the constructed arc is stable in the space of diffeomorphisms.

**Key Words:** stable arc, saddle-node, homotopy type of curve, bifurcation, manifold

### REFERENCES

1. V. Grines T. Medvedev, O. Pochinka, *Dynamical systems on 2- and 3-manifolds*, Springer, Switzerland, 2016, 313 p.
2. J. Milnor, [*Morse theory*], Moscow Mir Publ., 1965, 184 p.
3. E. Nozdrinova, O. Pochinka, “On the existence of a smooth arc without bifurcations joining source-sink diffeomorphisms on the 2-sphere”, *Journal of Physics: Conference Series*, **990**:1 (2018), 1–7.
4. D. Rolfsen, “Knots and links”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **83**:5 (1977), 931–935.
5. S. E. Newhouse, J. Palis, F. Takens, “Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms”, *Publications Mathématiques de l’I.H.E.S.*, **57** (1983), 5–71.
6. E. Nozdrinova, O. Pochinka, “Solution of the 33rd Palis-Pugh problem for gradient-like diffeomorphisms of a two-dimensional sphere”, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2020.

---

<sup>1</sup>**Elena V. Nozdrinova**, Research Fellow, International Laboratory of Dynamical Systems and Applications, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhnii Novgorod 603155, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5209-377X>, [maati@mail.ru](mailto:maati@mail.ru)

7. P. Blanchard, “Invariants of the NPT isotopy classes of Morse-Smale diffeomorphisms of surfaces”, *Duke Mathematical Journal*, **47**:1 (1980), 33–46.
8. S. Newhouse, M. Peixoto, “There is a simple arc joining any two Morse-Smale flows”, *Asterisque*, **31** (1976), 15–41.
9. S. Matsumoto, “There are two isotopic Morse-Smale diffeomorphisms which cannot be joined by simple arcs”, *Inventiones Mathematicae*, **51** (1979), 1–7.
10. A. Banyaga, “The structure of the group of equivariant diffeomorphism”, *Topology*, **16** (1977), 279–283.

*Submitted 24.07.2020*