DOI 10.15507/2079-6900.22.202002.200-207

УДК 532.5:536.4:517.9

Асимптотическое исследование процессов тепломассопереноса в слабо закрученных струях

© П. А. Вельмисов[1], У. Д. Мизхер[2], В. Н. Ковальногов[3]

Аннотация. Струйные течения жидкостей и газов применяются в различных областях техники как средство управления процессами тепло- и массообмена; интенсификации и стабилизации процесса горения; защиты конструкций от воздействия тепловых полей, а также для нанесения покрытий и т. д. Струи жидкостей и газов в технике формируются источниками- насадками конечных размеров с разнообразными распределениями начальных скоростей истечения в выходном сечении насадка, поэтому расчет аэродинамических и тепловых характеристик струйных течений сводится к решению неавтомодельных задач. Однако одним из методов решения таких задач является метод асимптотического разложения скоростей и давления в ряды по малому параметру, когда первым членом этого ряда служит автомодельное решение задачи о струе- источнике. В данной статье предлагается асимптотическое разложение для осесимметричных слабозакрученных течений в модели вязкой несжимаемой среды, которое приводит к нелинейным уравнениям «пограничного слоя», отличающимся от известных классических уравнений для течений с конечной закруткой. Построены автомодельные решения этих уравнений, описывающие распределение скорости, давления и температуры в слабозакрученной струе. Представленные в статье результаты дополняют результаты работ расчетом теплового поля в струе.

Ключевые слова: аэрогидродинамика, закрученная струя, вязкость, асимптотическое разложение, автомодельное решение, тепломассоперенос

1. Вывод асимптотических уравнений

Система уравнений Навье-Стокса (уравнения движения, неразрывности и энергии), описывающая осесимметричное движение жидкости (газа) в модели вязкой несжимаемой среды, в цилиндрической системе координат имеет вид [1–2]

$$u_t + uu_x + vu_r = -\frac{1}{\rho}P_x + \nu(u_{xx} + u_{rr} + \frac{1}{r}u_r), \tag{1.1}$$

$$v_t + uv_x + vv_r - \frac{1}{r}w^2 = -\frac{1}{\rho}P_r + \nu(v_{xx} + v_{rr} + \frac{1}{r}v_r - \frac{1}{r^2}v), \tag{1.2}$$

$$w_t + uw_x + vw_r + \frac{1}{r}vw = \nu(w_{xx} + w_{rr} + \frac{1}{r}w_r - \frac{1}{r^2}w), \tag{1.3}$$

[1]**Вельмисов Петр Александрович**, заведующий кафедрой высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (432027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), доктор физико-математических наук, профессор, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7825-7015, velmisov@ulstu.ru

[2]**Мизхер Усама Джавад**, аспирант кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (432027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-8950-9772, usama.mizher@gmail.com

[3]**Ковальногов Владислав Николаевич**, заведующий кафедрой теплоэнергетики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (432027, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), доктор технических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1907-3790, kvn@ulstu.ru

$$u_x + v_r + \frac{v}{r} = 0, \tag{1.4}$$

$$\rho c_v(T_t + uT_x + vT_r) = \lambda(T_{xx} + T_{rr} + \frac{1}{r}T_r) + \mu\Phi, \tag{1.5}$$

где $u(x,r,t)$, $v(x,r,t)$, $w(x,r,t)$ – продольная (вдоль горизонтальной оси Ox), поперечная (радиальная, перпендикулярная оси Ox) и тангенциальная (вращательная) составляющие вектора скорости $\overline{V}$ жидкости соответственно; $T(x,r,t)$ – температура; $P(x,r,t)$ – давление; $\rho, \mu, \nu = \mu\rho^{-1}$ – плотность, динамическая и кинематическая вязкости среды соответственно; c_v, λ – коэффициенты теплоемкости и теплопроводности среды; x, r – цилиндрические координаты; t – время, индексы снизу обозначают частные производные. Диссипативная функция Φ определяется выражением

$$\Phi = 2\Big[\Big(\frac{\partial V_{(x)}}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial V_{(y)}}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial V_{(z)}}{\partial z}\Big)^2\Big] + \Big(\frac{\partial V_{(x)}}{\partial y} + \frac{\partial V_{(y)}}{\partial x}\Big)^2 + \\ + \Big(\frac{\partial V_{(x)}}{\partial z} + \frac{\partial V_{(z)}}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial V_{(y)}}{\partial z} + \frac{\partial V_{(z)}}{\partial y}\Big)^2, \tag{1.6}$$

где $V_{(x)}, V_{(y)}, V_{(z)}$ – проекции вектора $\overline{V}$ на оси декартовой системы координат x, y, z, при этом имеет место следующая связь между проекциями вектора скорости в декартовой и цилиндрической системах координат:

$$V_{(x)} = u, \quad V_{(y)} = v\sin\theta + w\cos\theta, \quad V_{(z)} = v\cos\theta - w\sin\theta.$$

Здесь $u = \dfrac{dx}{dt}$, $v = \dfrac{dr}{dt}$, $w = r\dfrac{d\theta}{dt}$, при этом r, θ – полярные координаты в плоскости, перпендикулярной оси Ox ($y = r\sin\theta$, $z = r\cos\theta$).

Используя метод малого параметра [3–5], получим асимптотические уравнения для течений с малой радиальной составляющей v вектора скорости. Предполагая составляющую v малой, положим

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, r_*, t)\varepsilon^{k-1}, \;\; v = \varepsilon\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x, r_*, t)\varepsilon^{k-1}, \;\; w = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(x, r_*, t)\varepsilon^{k}, \\ P - P_0 = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(x, r_*, t)\varepsilon^{k-1}, \;\; T - T_0 = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(x, r_*, t)\varepsilon^{k-1}. \tag{1.7}$$

Здесь P_0 – давление в покоящейся среде, $r = \varepsilon r_*$, где ε – малый параметр, определяющий порядок величины кинематической вязкости ν ($\nu = \varepsilon^2\nu_*$), при этом новая переменная r_* и постоянная ν_* имеют порядок единицы. Подставляя (1.7) в (1.1)–(1.6) и оставляя в каждом из уравнений старшие по порядку члены, получим систему уравнений пограничного слоя [1–2].

Предположим, что вращательная составляющая w скорости потока также мала и имеет, как и v, порядок ε, тогда в (1.7) следует положить $w_0 = 0$. В этом случае, задавая дополнительно $\lambda\rho^{-1} = \varepsilon^2\lambda_*$, из (1.1)–(1.5) с учетом (1.6) получим при $\varepsilon \to 0$ асимптотическую систему уравнений

$$u_{1t} + u_1u_{1x} + v_1u_{1r_*} = -\frac{1}{\rho}P_{1x} + \nu_*(u_{1r_*r_*} + \frac{1}{r_*}u_{1r_*}), \tag{1.8}$$

$$v_{1t}+u_1v_{1x}+v_1v_{1r_*}-\frac{1}{r_*}w_1^2=-\frac{1}{\rho}P_{3r_*}+\nu_*(v_{1r_*r_*}+\frac{1}{r_*}v_{1r_*}-\frac{1}{r_*^2}v_1), \tag{1.9}$$

$$w_{1t}+u_1w_{1x}+v_1w_{1r_*}+\frac{1}{r_*}v_1w_1=\nu_*(w_{1r_*r_*}+\frac{1}{r_*}w_{1r_*}-\frac{1}{r_*^2}w_1), \tag{1.10}$$

$$v_{1r_*}+\frac{1}{r_*}v_1+u_{1x}=0, \tag{1.11}$$

$$c_v(T_{1t}+u_1T_{1x}+v_1T_{1r_*})=\lambda_*(T_{1r_*r_*}+\frac{1}{r_*}T_{1r_*})+\nu_*u_{1r_*}^2. \tag{1.12}$$

При этом из уравнения (1.2) следует

$$P_{1r_*}=0,\quad P_{2r_*}=0,$$

значит, P_1 и P_2 зависят от x,t, при этом $P_1(x,t)$ в (1.8) – заданная функция, определяющая продольный градиент давления в первом приближении.

2. Построение решений, описывающих поля скоростей и давления в струе

Рассмотрим стационарные течения, тогда в уравнениях (1.8)–(1.12) следует опустить производные по времени t. Решение системы уравнений (1.8)–(1.11) в этом случае будем искать в виде

$$\begin{gathered}u_1=\nu_*x^{1-2a}f(\eta),\quad v_1=\nu_*x^{-a}g(\eta),\quad w_1=\zeta\nu_*x^bh(\eta),\\ \frac{1}{\rho}P_3=\zeta^2\nu_*^2x^{2b}Q(\eta)+\nu_*^2x^{-2a}R(\eta),\quad \frac{1}{\rho}P_1=cx^{2-4a},\end{gathered} \tag{2.1}$$

где $\eta=\dfrac{r_*}{x^a}$ – автомодельная переменная; постоянные a,b,c,ζ – произвольные. Предположим, что градиент давления в направлении оси Ox отсутствует ($c=0$). Подставляя (2.1) в (1.8)–(1.11), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для $f(\eta)$, $g(\eta)$, $h(\eta)$, $Q(\eta)$, $R(\eta)$, которая для струйных течений ($a=1$, $b=-2$) принимает вид

$$\begin{gathered}-f(f+\eta f')+gf'=f''+\frac{1}{\eta}f',\\ -f(2h+\eta h')+gh'+\frac{1}{\eta}gh=h''+\frac{1}{\eta}h'-\frac{1}{\eta^2}h,\\ f+\eta f'=g'+\frac{1}{\eta}g,\\ Q'=\frac{1}{\eta}h^2,\\ -R'=-f(g+\eta g')+gg'-(g''+\frac{1}{\eta}g'-\frac{1}{\eta^2}g).\end{gathered}$$

Решение этой системы, соответствующее струйному течению, имеет вид

$$f(\eta)=\frac{2\gamma^2}{\theta^2},\quad g(\eta)=\frac{\gamma^2\eta}{\theta^2}(1-\frac{1}{4}\gamma^2\eta^2),\quad h(\eta)=\frac{\gamma\eta}{\theta^2}, \tag{2.2}$$

$$Q(\eta)=-\frac{2}{3\theta^3},\quad R(\eta)=\frac{2\gamma^2}{\theta^2}(1-\frac{1}{4}\gamma^2\eta^2), \tag{2.3}$$

где $\theta = 1 + \frac{1}{4}\gamma^2\eta^2$; постоянная γ – произвольная. Выражение (2.1) для давления содержит, в отличие от [6–7], два слагаемых. Первое из них, содержащее $Q(\eta)$, определяет часть давления, вызванного закруткой потока w_1 [6–7], а второе слагаемое, содержащее $R(\eta)$, есть часть давления, вызванного продольной u_1 и радиальной v_1 составляющими скорости. Это дополнительное слагаемое возникает в связи с тем, что при малой (порядка ε) закрутке в уравнении (1.2) остаются слагаемые с u_1, v_1. Итак, распределения скорости и давления в струе определяются формулами (2.1)–(2.3).

3. Построение решений, описывающих тепловое поле в струе

Решение уравнения (1.12) для температуры $T_1(x, r_*)$ будем искать в виде

$$T_1(x, r_*) = T_1^0(x, r_*) + \nu_*^2 x^{2-4a} H(\eta), \tag{2.4}$$

где функция T_1^0 удовлетворяет уравнению (1.12), в котором нужно опустить слагаемое $\nu_* u_{1r_*}^2$, а функция $H(\eta)$ находится из обыкновенного дифференциального уравнения, которое для струйного течения ($a = 1$) принимает вид

$$-c_v\left[f(2H + \eta H') - gH'\right] = \frac{\lambda_*}{\nu_*}(H'' + \frac{1}{\eta}H') + f'^2(\eta). \tag{2.5}$$

Уравнение для $T_1^0(x, r_*)$ имеет вид

$$c_v x^{-1}\left[f(\eta)T_{1x}^0 + g(\eta)T_{1r_*}^0\right] = \frac{\lambda_*}{\nu_*}(T_{1r_*r_*}^0 + \frac{1}{r_*}T_{1r_*}^0). \tag{2.6}$$

Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения (2.4) при $\lambda_* = 0$ определяется выражением

$$H(\eta) = \frac{c_0\theta^2}{\eta^4} + \frac{32}{15c_v\eta^4\theta^4}(15\theta^2 - 24\theta + 10),$$

где c_0 – произвольная постоянная. При $\eta \to 0$

$$H(\eta) \sim \frac{1}{\eta^4}\Big(C_0 + \frac{32}{15c_v}\Big) \xrightarrow[\eta\to 0]{} \pm\infty.$$

Из условия конечности значений температуры на оси Ox ($\eta \to 0$, $r \to 0$) найдем $c_0 = -\dfrac{32}{15c_v}$, тогда

$$H(\eta) = -\frac{32}{15c_v\theta^4\eta^4}\big(\theta^6 - 15\theta^2 + 24\theta - 10\big). \tag{2.7}$$

Согласно (2.7), при $\eta \to 0$ имеем

$$H(\eta) = -\frac{2\gamma^6(\eta^2 + O(\eta^4))}{3c_v\theta^4}.$$

Рассмотрим теперь уравнение (2.5) при $\lambda_* \neq 0$. Запишем его, с учетом(2.2), в виде

$$-\frac{\gamma^2 c_v}{\theta}\big(\eta H' + \frac{4}{\theta}H\big) - \frac{\lambda_*}{\nu_*}\big(H'' + \frac{1}{\eta}H'\big) = \frac{4\gamma^8\eta^2}{\theta^6}. \tag{2.8}$$

Введем новую независимую переменную [7]

$$y = \frac{\frac{1}{4}\gamma^2\eta^2}{1+\frac{1}{4}\gamma^2\eta^2}. \tag{2.9}$$

Уравнение (2.8) примет вид

$$-c_v(2yH' + 4H) - \frac{1}{2}\frac{\lambda_*}{\nu_*}\big[2y(1-y)H'' + (2-4y)H'\big] = 16\gamma^4 y(1-y)^3. \tag{2.10}$$

Частное решение уравнения (2.10) будем искать в виде

$$H(y) = a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4. \tag{2.11}$$

Для постоянных a, b, c, d, e получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{gathered}
\big(5\frac{\lambda_*}{\nu_*} - 3c_v\big)e = -4\gamma^4,\\
\big(6\frac{\lambda_*}{\nu_*} - 5c_v\big)d = 8\frac{\lambda_*}{\nu_*}e + 24\gamma^4,\\
\big(6\frac{\lambda_*}{\nu_*} - 8c_v\big)c = 9\frac{\lambda_*}{\nu_*}d - 48\gamma^4,\\
\big(\frac{\lambda_*}{\nu_*} - 3c_v\big)b = 2\frac{\lambda_*}{\nu_*}c + 8\gamma^4,\\
-4c_v a = \frac{\lambda_*}{\nu_*}b,
\end{gathered}$$

из которой последовательно находятся e, d, c, b, a.

Таким образом, распределение температуры в струе определяется формулой $T = \nu_* x^{-2}H(\eta)$, где $H(\eta)$ задается выражением (2.7) при $\lambda_* = 0$, выражением (2.11) при $\lambda_* \neq 0$.

Замечание. Укажем некоторые решения уравнения (2.6), которые могут быть полезными при решении различных тепловых задач для струйных течений. Введем в (2.6) новые переменные x, $\eta = r_*/x$:

$$\frac{\gamma^2 c_v}{\theta^2}\big(2xT^0_{1x} - \eta\theta T^0_{1\eta}\big) = \frac{\lambda_*}{\nu_*}\big(T^0_{1\eta\eta} + \frac{1}{\eta}T^0_{1\eta}\big). \tag{2.12}$$

В случае $\lambda_* = 0$ общее решение уравнения (2.12) имеет вид $T^0_1 = F(\xi)$, $\xi = \dfrac{x\eta^2}{\theta}$, где $F(\xi)$ – произвольная функция. Если $\lambda_* \neq 0$, то решение уравнения (2.12) можно найти в виде

$$T^0_1(x,\eta) = \sum_{n=1} x^{\alpha_n} T_{1n}(\eta), \tag{2.13}$$

где α_n – произвольные постоянные, а функции $T_{1n}(\eta)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\lambda_*}{\nu_*}T''_{1n} + \big(\frac{\lambda_*}{\nu_*\eta} + \frac{c_v\gamma^2\eta}{\theta}\big)T'_{1n} - \frac{2c_v\gamma^2\alpha_n}{\theta^2}T_{1n} = 0.$$

Сумма в (2.13) может быть как конечной, так и бесконечной. Тепловое поле в струе при этом определяется формулами (2.4), (2.11), (2.13).

Аналогичные исследования для струйных течений с конечной вращательной составляющей скорости и без построения теплового поля проводились в [6–10]. Для исследования струйных течений на основе полной (неусеченной) системы уравнений Новье-Стокса (1.1)–(1.6) эффективными являются численные методы [11–12], в т. ч. с использованием системы ANSYS Fluent [13].

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ и Ульяновской области (проекты № 18-41-730015, №19-41-730006), гранта Президента РФ (проект НШ-2493.2020.8).

Список литературы

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука; Физматлит, 1978. 736 с.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 742 с.
3. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 296 с.
4. Коул. Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 274 с.
5. Найфе А. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.
6. Лойцянский Л. Г. Распространение закрученной струи в безграничном пространстве, затопленном той же жидкостью // Прикладная математика и механика. 1953. Т. 27, вып. 1. С. 3–16.
7. Фалькович С. В. Распространение закрученной струи в безграничном пространстве, затопленном той же жидкостью // Прикладная математика и механика. 1967. Т. 31, вып. 2. С. 282–288.
8. Коробко В. И. Теория неавтомодельных струй вязкой жидкости. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1977. 216 с.
9. Velmisov P. A., Mizher U. J., Semenova E. P. Asymptotic study of nonlinear viscous gas flows // Proceedings of the 44th International Conference on Applications of Mathematics in Engineering and Economics (AMEE'18). AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 2048, Issue 1. pp. 040012-1–040012-11.
10. Вельмисов П. А., Мизхер У. Д., Семенова Е. П. Исследование струйных течений методом малого параметра // Материалы XIII Международной научной конференции (г. Саранск, 12–16 июля 2017 г.). Саранск: СВМО, 2017. С. 470–475.
11. Hoffman K. A., Chiang S. T. Computational fluid dynamics. – 4th ed. Wichita: Engineering Education System, 2000. Vol. II. 479 p.
12. Chung T. J. Computational fluid dynamics. New York: Cambridge University Press, 2010. 1034 p.
13. Ansys Fluent 12.0. Theory Guide. April, 2009.

Поступила 27.04.2020

MSC2020 76D05 80A19 35B40

Asymptotic study of heat and mass transfer in weakly twisted jets

© P. A. Velmisov[1], U. J. Mizher[2], V. N. Kovalnogov[3]

Abstract. Jet flows of liquids and gases are used in various fields of technology as means of controlling the processes of heat and mass transfer, for the intensification and stabilization of the combustion process, as means of protecting structures from exposure to thermal fields, for coating, etc. The jets of liquids and gases in technology are formed by sources-nozzles of finite sizes with various distributions of the initial outflow velocities in the outlet section of the nozzle, therefore, the calculation of the aerodynamic and thermal characteristics of jet flows is reduced to solving non-self-similar problems. However, one of the methods for solving such problems is the method of asymptotic expansion of velocities and pressure in series in a small parameter, when the first member of this series is a self-similar solution to the jet source problem. This article proposes an asymptotic expansion for axisymmetric weakly swirling flows in a model of a viscous incompressible medium, which leads to nonlinear «boundary layer» equations that differ from the well-known classical equations [1]–[4] for flows with finite swirl. Self-similar solutions of these equations are constructed that describe the distribution of speed, pressure, and temperature in a weakly swirling jet. The results presented in the article complement the results of [3]–[7] by calculating the thermal field in the jet.

Key Words: aerohydrodynamics, swirling jet, viscosity, asymptotic expansion, self-similar solutions, heat and mass transfer

References

1. L. G. Loitsyansky, *[Mechanics of fluid and gas]*, Nauka Publ., Fizmatlit Publ., Moscow, 1978 (In Russ.), 736 p.
2. G. Schlichting, *[The theory of the boundary layer]*, Nauka Publ., Moscow, 1969 (In Russ.), 742 p.
3. M. Van Dyke, *[Methods of perturbations in fluid mechanics]*, Mir Publ., Moscow, 1967 (In Russ.), 296 p.
4. J. Cole, *[Methods of perturbations in applied mathematics]*, Mir Publ., Moscow, 1972 (In Russ.), 274 p.
5. A. Nayfe, *[Methods of perturbations]*, Mir Publ., Moscow, 1976 (In Russ.), 456 p.
6. L. G. Loitsyansky, "[Propagation of a swirling jet in an unlimited space flooded by the same liquid]", *PMM*, **27**:1 (1953), 3–16 (In Russ.).
7. S. V. Falkovich, "[Propagation of a swirling jet in an unlimited space flooded by the same liquid]", *PMM.*, **31**:2 (1967), 282–288 (In Russ.).

[1]**Peter A. Velmisov**, Head of the Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 432027, Russia), Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7825-7015, velmisov@ulstu.ru

[2]**Usama J. Mizher**, Postgraduate Student, Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 432027, Russia), Postgraduate Student, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-8950-9772, usama.mizher@gmail.com

[3]**Vladislav N. Kovalnogov**, Head of the Department of Thermal Power Engineering, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 432027, Russia), Doctor of Technical Sciences, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1907-3790, kvn@ulstu.ru

8. V. I. Korobko, *[Theory of non-self-propelled viscous fluid jets]*, Saratov State University Publ., Saratov, 1977 (In Russ.), 216 c.

9. P. A. Velmisov, U. J. Mizher, E. P. Semenova, "[Asymptotic study of nonlinear viscous gas flows]", *AIP Conference Proceedings*, **2048**:1 (2018), 040012-1–040012-11.

10. P. A. Velmisov, U. J. Mizher, E. P. Semenova, "[Investigation of jet flows by the small parameter method]", 2017, 470–475 (In Russ.).

11. K. A. Hoffman, S. T. Chiang, *[Computational Fluid Dynamics]. – 4th ed.*, **II**, Engineering Education System, Wichita, 2000, 479 c.

12. T. J. Chung, *[Computational fluid dynamics]*, Cambridge University Press, New York, 2010, 1034 c.

13. *ANSYS FLUENT 12.0. Theory Guide*, April, 2009.

Submitted 27.04.2020