

УДК 517.9

## О глобальной динамике в уравнении Дуффинга при квазипериодическом возмущении

© Т. Н. Драгунов<sup>1</sup>, К. Е. Морозов<sup>2</sup>, А. Д. Морозов<sup>3</sup>

**Аннотация.** Рассмотрено уравнение Дуффинга с малым возмущением, содержащим автономную неконсервативную часть, аналогичную уравнению Ван дер Поля, и двухчастотную квазипериодическую составляющую с иррациональным соотношением частот. Применены методы анализа резонансных зон с помощью процедуры усреднения и анализа поведения решений в области сепаратрисы невозмущенной системы с помощью аналога формулы Мельникова. Установлено, что число «частично проходимых» резонансных уровней конечно, а качественное поведение решений системы в окрестности остальных резонансных уровней определяется автономной частью возмущения. Проанализировано поведение решений, соответствующих предельному циклу в автономной системе. Приведены иллюстрации качественного поведения решений усредненной системы при прохождении предельного цикла, отвечающего трехмерному тору исходной системы, через окрестности резонансных уровней. В случае невозмущенной системы с петлей сепаратрисы с помощью метода Мельникова установлено условие пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий седлового решения, приводящего к существованию двоякоасимптотических решений и нерегулярной динамике в окрестности невозмущенной сепаратрисы. Проведенное исследование позволяет сделать выводы о глобальном поведении решений.

**Ключевые слова:** Динамические системы на плоскости, квазипериодическое возмущение, резонансы, формула Мельникова, метод Мельникова, уравнение Дуффинга, глобальная динамика

### 1. Введение

Рассмотрим уравнение<sup>4</sup>

$$\ddot{x} + \alpha x + x^3 = \varepsilon f(x, \dot{x}, t), \quad (1.1)$$

где  $\varepsilon$  – малый положительный параметр;  $\alpha = \pm 1$ ;  $f = (p_1 - x^2)\dot{x} + p_2 f_1(t)$ ;  $p_1, p_2$  – параметры; функция  $f_1(t)$  – квазипериодическая с частотами  $\omega_1, \dots, \omega_m$ .

Для определенности положим  $m = 2$ . Например,  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = \sqrt{5}$ . Системы типа Дуффинга с квазипериодическими возмущения рассматривались в ряде работ (см.,

<sup>1</sup>Драгунов Тимофей Николаевич, доцент кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа, ФГАУО ВО «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0428-1850>, dtn@mm.unn.ru

<sup>2</sup>Морозов Кирилл Евгеньевич, ассистент кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа, ФГАУО ВО «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9089-6813>, kirwamath@gmail.com

<sup>3</sup>Морозов Альберт Дмитриевич, профессор кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа, ФГАУО ВО «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), доктор физико-математических наук, профессор, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3467-6319>, morozov@mm.unn.ru

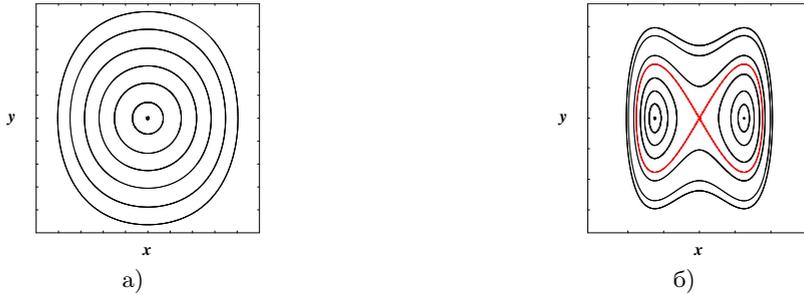
<sup>4</sup>Статья подготовлена по материалам доклада, сделанного авторами на XIV Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании» (г. Саранск, 2019 г.)

например, [1–4]). В работе [5] рассмотрена задача о квазипериодических возмущениях двумерных гамильтоновых систем общего вида.

Случай периодических возмущений рассмотрен наиболее полно (см., например, [7–8]), где приведены решения задачи о глобальном поведении решений). Уравнение (1.1) эквивалентно системе

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\alpha x - x^3 + \varepsilon f(x, y, t).\end{aligned}\tag{1.2}$$

На Рис. 1.1 показаны фазовые портреты невозмущенной системы, когда  $\varepsilon = 0$ .



**Рис. 1.1.** Фазовый портрет невозмущенной системы а) при  $\alpha = 1$  и б) при  $\alpha = -1$

Рассмотрим поведение решений системы (1.2) с начальными условиями из области  $D$ , где: а)  $D$  – компактная часть плоскости  $(x, y)$ , из которой выброшена окрестность состояния равновесия при  $\alpha = 1$ ; б)  $D$  – компактная область вне «восьмерки», из которой выброшена окрестность сепаратрисы или области внутри «восьмерки» с выброшенной окрестностью состояний равновесия и окрестностью сепаратрисы. В области  $D$  фазовое пространство системы заполнено замкнутыми фазовыми кривыми  $H(x, y) = y^2/2 + \alpha x^2/2 + x^4/4 = h$ ,  $h \in [h_-, h_+]$ .

Глобальное исследование системы (1.2) связано с рассмотрением поведения решений как в области  $D$ , так и в окрестности невозмущенных сепаратрис. В свою очередь, исследование в ячейке  $D$  связано с резонансами. Замкнутую фазовую кривую  $H(x, y) = h_{res}$  с частотой  $\omega(h_{res})$  называют резонансой, если частоты  $\omega(h_{res}), \omega_1, \omega_2$  целочисленно зависимы.

Исследование системы (1.2) в окрестностях индивидуальных резонансных уровней  $H(x, y) = h_{res}$  было проведено в работе [5]. Было показано, что резонансные уровни делятся на проходимые, частично проходимые и непроходимые. Если все уровни  $H(x, y) = h$  являются проходимыми, то качественное поведение решений системы (1.2) в ячейке  $D$  определяется автономной системой

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H(x, y)}{\partial y}, \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} + \varepsilon f_0(x, y),\end{aligned}\tag{1.3}$$

где

$$f_0(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, y, \theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2.$$

В работе [5] были намечены подходы к решению задачи о глобальном поведении решений. В данной статье реализуем эти подходы и проиллюстрируем их на примере уравнения Дуффинга. Прежде всего опишем общую схему глобального исследования, затем перейдем к вычислительной части.

## 2. Поведение решений в области $D$

Система (1.2) в области  $D$  после перехода к переменным действие  $I$  - угол  $\theta$  принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \varepsilon F_1(I, \theta, \theta_1, \theta_2), \\ \dot{\theta} &= \omega(I) + \varepsilon F_2(I, \theta, \theta_1, \theta_2), \\ \dot{\theta}_k &= \omega_k, \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} F_1 &= f(x(I, \theta), y(I, \theta), \theta_1, \theta_2)x'_\theta, \\ F_2 &= -f(x(I, \theta), y(I, \theta), \theta_1, \theta_2)x'_I; \end{aligned} \quad (2.2)$$

функции  $x(I, \theta)$ ,  $y(I, \theta)$  определяют замену переменных;  $\omega(I)$  – частота движения на замкнутых фазовых кривых. Функция  $\omega(I)$  – монотонная и отлична от нуля при  $I \in (I_-, I_+)$ . Далее представим выражения для этих функций.

Система (2.1) определена на прямом произведении интервала  $K = [I_-(h_-), I_+(h_+)]$  и трехмерного тора, где  $h_-, h_+$  определяют границы области  $D$ .

При  $\varepsilon = 0$  четырехмерное фазовое пространство системы (2.1) расслаивается на трехмерные торы  $T^3$ , движение на которых является условно периодическим с частотами  $\omega, \omega_1, \omega_2$ . При  $\varepsilon \neq 0$  некоторые инвариантные торы разрушаются из-за неконсервативности возмущения и/или наличия целочисленной комбинации частот  $\omega, \omega_1, \omega_2$ :

$$n\omega(I) - (k_1\omega_1 + k_2\omega_2) = 0. \quad (2.3)$$

При заданных  $\omega_1, \omega_2$  и фиксированных  $k_1, k_2, n$  соотношение (2.3) рассматривается как уравнение относительно  $I$ . Если данное уравнение на интервале  $[I_-, I_+]$  имеет вещественное решение  $I = I_{n, k_1, k_2}$ , то уровень  $I = I_{n, k_1, k_2}$  (замкнутую фазовую кривую  $H(x, y) = h_{n, k_1, k_2}$  невозмущенной системы) будем называть резонансным. Обозначим через  $\mathbf{k}$  вектор  $(k_1, k_2)$ .

### 2.1. Окрестность резонансного уровня

В работе [5] была получена усредненная система, описывающая поведение решений в окрестностях  $U_\mu = \{(I, \theta) : I_{n\mathbf{k}} - C\mu < I < I_{n\mathbf{k}} + C\mu, 0 \leq \theta < 2\pi, C = \text{const} > 0, \mu = \sqrt{\varepsilon}\}$  индивидуальных резонансных уровней  $I = I_{n\mathbf{k}}$  ( $H(x, y) = h_{n\mathbf{k}}$ ):

$$\begin{aligned} u' &= A(v; I_{n\mathbf{k}}) + \mu\sigma u, \\ v' &= b_1 u + \mu b_2 u^2, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где символ со штрихом означает производную по медленному времени  $\tau = \mu t$ ,  $b_1 = d\omega(I_{n\mathbf{k}})/dI \neq 0$ ,  $b_2 = d^2\omega(I_{n\mathbf{k}})/2dI^2$ ,

$$A(v; I_{n\mathbf{k}}) = \frac{1}{(2\pi n)^2} \int_0^{2\pi n} \int_0^{2\pi n} F_1(I_{n\mathbf{k}}, (v + (\sum_{j=1}^2 k_j \theta_j)/n), \theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2, \quad (2.5)$$

$$\sigma = \frac{1}{(2\pi n)^2} \int_0^{2\pi n} \int_0^{2\pi n} f'_y d\theta_1 d\theta_2. \tag{2.6}$$

Фазовым пространством системы (2.4) является цилиндр  $(u, v \bmod 2\pi/n)$ .

Простым состояниям равновесия усредненной системы соответствуют в исходной системе квазипериодические решения с 2 частотами (двумерные инвариантные торы). Справедлива следующая теорема [5].

**Теорема 2.1** *Предположим, что усредненная система (2.4) имеет простое состояние равновесия  $(v_0, 0)$ , и  $\sigma \neq 0$ . Тогда для достаточно малых  $\varepsilon > 0$  исходная система (1.2) имеет квазипериодическое решение  $x(t), y(t)$  с частотами  $\omega_1/n, \omega_2/n$ . Это решение является асимптотически устойчивым при  $b_1 A'(v_0) > 0, \sigma < 0$  и неустойчивым (седловым) при  $b_1 A'(v_0) < 0$ . Соответственно, система (2.1) имеет 2-мерный устойчивый (или седловой) инвариантный тор  $T^2$ .*

Доказательство этой теоремы опирается на теорему Боголюбова [6].

Представим функцию  $A(v)$  в следующем виде:  $A(v; I_{nk}) = B_0(I_{nk}) + \tilde{A}(v; I_{nk})$ , где  $B_0$  – среднее значение этой функции. Уровень  $I = I_{nk}$  назовем уровнем **первого типа**, если  $\max|\tilde{A}(v)| < |B_0|, B_0 \neq 0$ ; **второго типа**, если  $\max|\tilde{A}(v)| > |B_0|, |B_0| \neq 0$ ; **третьего типа**, если  $B_0 = 0, \tilde{A}(v, I_{nk}) \neq 0$ .

Качественное поведение решений системы (2.4) в окрестностях каждого из трех типов установлено в работе [7]. Уровни первого типа были названы проходимыми, уровни второго типа – частично проходимыми, а третьего типа – непроходимыми.

Если в окрестности уровня  $H(x, y) = h_{nk}$  у автономной возмущенной системы существует предельный цикл, то такой резонансный уровень является уровнем третьего типа. Действительно, для системы (1.3) функция  $B_0(I)$  является порождающей функцией Пуанкаре-Потрягина [8] и, следовательно,  $B_0(I_{nk}) = 0$ .

## 2.2. Окрестность нерезонансного уровня

Исследуем систему (2.1) в окрестности индивидуального нерезонансного уровня  $I = I_*$ . Сделав в (2.1) замену  $I = I_* + \mu W$ , получим систему

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \mu F_1(I_*, \theta, \theta_1, \theta_2) + \mu^2 [\partial F_1(\cdot) / \partial I] W + O(\mu^3), \\ \dot{\theta} &= \omega(I_*) + \mu b_1 W + \mu^2 (b_2 W^2 + F_2(I_*, \theta, \theta_1, \theta_2)) + O(\mu^3), \\ \dot{\theta}_k &= \omega_k, \quad k = 1, 2, \end{aligned} \tag{2.7}$$

где  $b_1 = d\omega(I_*)/dI, b_2 = d^2\omega(I_*)/2dI^2$ . Обозначим  $\omega(I_*) = \omega_0$ .

Согласно [5], система (2.7) приводится к виду

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \mu B_0(I_*) + \mu^2 B_1(I_*) u + (O(\mu^3)), \\ \dot{\theta} &= \omega(I_*) + \mu b_1 u + O(\mu^2), \\ \dot{\theta}_k &= \omega_k, \quad k = 1, 2, \end{aligned} \tag{2.8}$$

где

$$\begin{aligned} B_0 &= F_{10} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(I_*, \theta, \theta_1, \theta_2) d\theta d\theta_1 d\theta_2, \\ B_1 &= dB_0/dI = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial F_1(I_*, \theta, \theta_1, \theta_2)}{\partial I} d\theta d\theta_1 d\theta_2. \end{aligned}$$

Пренебрегая членами порядка  $O(\mu^3)$ , приходим к уравнению

$$\dot{u} = \mu B_0(I_*) + \mu^2 B_1(I_*)u, \quad (2.9)$$

которое совпадает с усредненной системой. В рядах замены, связанной с переходом к усредненной системе, присутствуют малые знаменатели  $(\bar{k}, \bar{\omega})$ ,  $\bar{k} = (k_0, k_1, k_2)$ ,  $\bar{\omega} = (\omega_0, \omega_1, \omega_2)$ . Это приводит к оценке, необходимой для сходимости рядов в замене:

$$\left| \sum_{j=0}^2 k_j \omega_j \right| \geq C / \left( \sum_{j=0}^2 |k_j| \right)^3, \quad (2.10)$$

для всех  $(k_0, k_1, k_2) \in \mathbf{Z}^3 \setminus \{0\}$ ;  $C$  – некоторая положительная постоянная.

Если  $B_0 \neq 0$ , то уровень  $I = I_*$  является проходимым. Если  $B_0 = 0$  и  $B_1 = \text{const} \neq 0$ , то, согласно работе [9] простому состоянию равновесия  $u = 0$  уравнения (2.9) в системе (2.1) соответствует квазипериодическое решение с частотами  $\omega_0, \omega_1, \omega_2$  (трехмерный тор). Итак, справедлива следующая теорема.

**Т е о р е м а 2.2** *При достаточно малых  $\varepsilon > 0$  грубому предельному циклу в автономной системе (1.3) с частотой  $\omega_0$ , удовлетворяющей условию (2.10), соответствует в системе (1.2) при  $B_1 \neq 0$  квазипериодическое решение с частотами  $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ . В системе (2.1) этому решению соответствует трехмерный тор, асимптотически устойчивый при  $B_1 < 0$ .*

### 2.3. Глобальное поведение решений в области $D$

Усредненная система (2.4) по виду аналогична усредненной системе при периодических возмущениях. Для периодических возмущений была доказана ограниченность множества резонансных уровней второго типа (частично проходимых) [7–8]. Это доказательство переносится на случай квазипериодических возмущений. Действительно, заменяя в соответствующих формулах из [7, с. 188 – 191] скалярные величины на векторные, приходим к следующей теореме.

**Т е о р е м а 2.3** *Число резонансных уровней второго типа ограничено.*

Это означает, что система  $u' = A(v; I_{nk}), v' = b_1 u$  имеет простые состояния равновесия при  $B_0 \neq 0$  лишь для ограниченного числа резонансных уровней  $I = I_{nk}$ . Для исходного уравнения (1.1) этот факт доказывается непосредственно вычислением функции  $A(v; I_{nk})$  (см. раздел 4).

Поскольку число предельных циклов системы (1.3) ограничено, то число уровней третьего типа (непроходимых) также ограничено. Этот факт и теоремы 2.1 – 2.3 позволяют установить глобальное поведение решений в области  $D$ . Действительно, вне конечного множества окрестностей резонансных уровней второго и третьего типов все уровни  $H(x, y) = \text{const}$  являются проходимыми. Поэтому, зная поведение решений в окрестностях частично проходимых (второго типа) и непроходимых (третьего типа) уровней, мы можем установить качественное поведение решений исходной системы в области  $D$ . Если все уровни  $H(x, y) = \text{const}$  в области  $D$  являются проходимыми, то качественное поведение решений системы (1.2) в  $D$  определяется автономной системой (1.3).

### 3. Расщепление сепаратрисных многообразий

Рассмотрим случай  $\alpha = -1$ , в котором седло невозмущенной системы (при  $\varepsilon = 0$ ) расположено в начале координат:  $x_s = 0, y_s = 0$ . Обозначим устойчивое и неустойчивое многообразия седла  $W_0^s$  и  $W_0^u$  соответственно. Тогда замкнутые фазовые кривые являются проекциями цилиндров  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , а петля сепаратрисы является проекцией сепаратрисного многообразия. Другими словами, эти многообразия являются цилиндрами в пространстве  $R^3 = (x, y, t)$ . Представляет интерес изучение расстояния между сепаратрисными многообразиями  $W_\varepsilon^s$  и  $W_\varepsilon^u$ , совпадающими в невозмущенной системе. В случае периодического возмущения данная задача решена в работе [10]. В работе Дж. Сандерса [11] для достаточно гладких систем применимость формула Мельникова была расширена. В книге С. Уиггинса [12] приводится обобщение на случай квазипериодических возмущений, а в [13] обсуждается построение дискретных отображений для траекторий векторных полей, зависящих от времени; приводятся геометрические иллюстрации. Исследования работы [11] переносятся на квазипериодический случай.

Следуя [11], находим величину, характеризующую расстояние между сепаратрисными многообразиями

$$\Delta_\varepsilon(t'_0) = \varepsilon \Delta_0(t'_0) + O(\varepsilon^2),$$

где

$$\Delta_0(t'_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0(\tau - t'_0), y_0(\tau - t'_0), \tau) x_0(\tau - t'_0) d\tau, \quad (3.11)$$

$x_0(t), y_0(t)$  – решение невозмущенной системы на сепаратрисе;  $f = f(x_0(\tau - t'_0), y_0(\tau - t'_0), \omega_1\tau + \theta_{10}, \omega_2\tau + \theta_{m0})$ ;  $\theta_{10}, \theta_{20}$  – постоянные. Поскольку функция  $f$  – квазипериодическая по  $t$ , то и функция  $\Delta_0(t'_0)$  также будет квазипериодической. Отметим, что  $\Delta_0$  зависит от двух параметров, определяемых гармониками квазипериодического возмущения, что приводит к разнообразию при геометрической интерпретации пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий [13].

Знакопеременность функции  $\Delta_0(t'_0)$  (трансверсальность пересечения  $W^s(t'_0)$  и  $W^u(t'_0)$ ) означает существование двоякоасимптотических (гомоклинических) решений, удовлетворяющих условию  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x_\varepsilon(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} y_\varepsilon(t) = 0$ . Исследование поведения решений в некоторой расширенной окрестности двоякоасимптотического решения проводилось в работе [14] и связано с существованием нетривиального гиперболического множества («нерегулярной динамики»). В некоторых случаях окрестность сепаратрисы является притягивающей. Тогда получаем нерегулярный аттрактор, для которого используют термины «квазиаттрактор» или «странный аттрактор». Подобную ситуацию рассмотрим на примере уравнения (1.1).

### 4. Результаты вычислений и выводы

Рассмотрим уравнение (1.1)

$$\ddot{x} + \alpha x + x^3 = \varepsilon \left[ (p_1 - x^2)\dot{x} + p_2 \sin t \sin \sqrt{5}t \right]. \quad (4.1)$$

В данном уравнении при  $\alpha = -1$  область  $D$  состоит из трех ячеек, а при  $\alpha = 1$  – из одной ячейки. Поэтому при установлении глобального поведения решений уравнения (4.1) в области  $D$  для удобства положим  $\alpha = 1$ , поскольку исследование в трех ячейках при  $\alpha = -1$  принципиально не отличается от исследования в одной ячейке при  $\alpha = 1$  и было проведено в диссипативном случае в работе [5]. Поэтому при  $\alpha = -1$  проведем исследование только в окрестности невозмущенных сепаратрис.

### 4.1. Исследование автономного уравнения

Невозмущенная система (при  $\varepsilon = 0$ ) обладает интегралом энергии

$$H(x, y) = y^2/2 + x^2/2 + x^4/4 = h, h > 0.$$

Решение системы имеет вид

$$x(\theta, I) = x_1 \operatorname{cn}(2\mathbf{K}\theta/\pi), \theta = \omega t, \tag{4.2}$$

где  $\omega = \pi(1 + 4h)^{1/4}/(2\mathbf{K})$  – частота собственных колебаний системы;  $x_1$  – положительное решение уравнения  $x^2/2 + x^4/4 = h$ ;  $\operatorname{cn}(u)$  – эллиптическая функция Якоби;  $\mathbf{K}$  – полный эллиптический интеграл первого рода;  $k = k(h)$  – модуль эллиптического интеграла. Обозначим через  $D$  кольцевую область фазовой плоскости  $0 < h_- < h < h_+ < \infty$ .

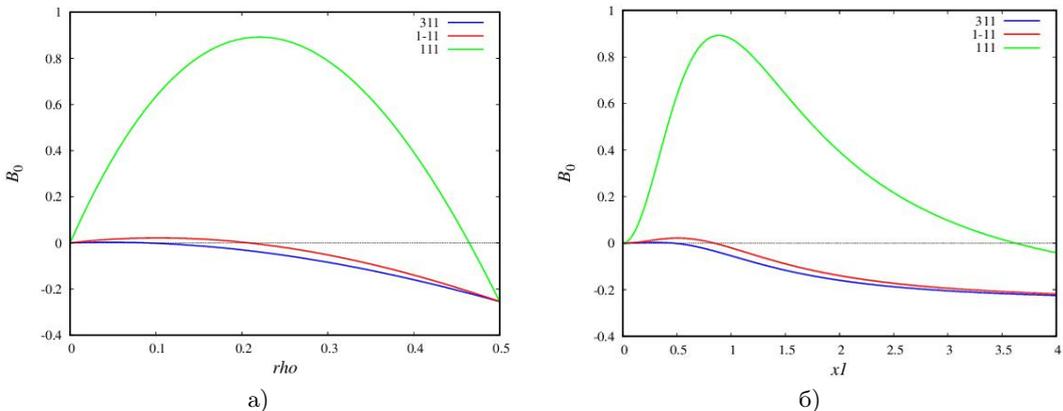
В отсутствие квазипериодической составляющей возмущения ( $p_2 = 0$ ) в системе

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x - x^3 + \varepsilon[(p_1 - x^2)y] \tag{4.3}$$

существует единственный предельный цикл при  $p_1 > 0$ . Это следует из анализа порождающей функции Пуанкаре-Понтрягина, которая с точностью до коэффициента  $4/(3\pi(1 - 2\rho)^{5/2})$  имеет вид

$$B_0(\rho) = p_1 [(1 - \rho)(1 - 2\rho)\mathbf{K} - (1 - 2\rho)^2\mathbf{E}] - \frac{2}{5} [(\rho - 1)(2 - \rho)\mathbf{K} + 2(\rho^2 - \rho + 1)\mathbf{E}],$$

где  $\mathbf{E}$  – это полный эллиптический интеграл второго рода;  $\rho = k^2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4h}}{2\sqrt{1 + 4h}}$ .



**Рис. 4.1.** Зависимости для значений параметра  $p_1$ , соответствующих резонансам (3,1,1), (1,-1,1) и (1,1,1): а)  $B_0(\rho)$  и б)  $B_0(\rho(x_1))$

Пусть  $\rho_* \in (0, 1/2)$  – простой нуль функции  $B(\rho)$ . Если  $p_1 \rightarrow \infty$ , то  $\rho_* \rightarrow 0$ , и при  $p_1 \rightarrow +0$  имеем  $\rho_* \rightarrow 1/2$ . Как известно, величина  $\rho_*$  определяет уровень невозмущенной системы, который порождает грубый предельный цикл в (4.3). При  $B'(\rho_*) < 0$  и  $\varepsilon > 0$  цикл является устойчивым. Знак величины  $B'(\rho_*)$  совпадает со знаком  $\sigma(\rho_*)$ , где

$$\sigma(\rho) = p_1 - \frac{2}{(1-2\rho)\mathbf{K}} [\mathbf{E} - (1-\rho)\mathbf{K}]. \quad (4.4)$$

На Рис. 4.1 показана зависимость  $B_0(\rho; p_1)$  для различных значений параметра  $p_1$ , где  $p_{13}$  находится из условия  $B_0(\rho; p_{13}) = 0$  при  $\rho = \rho(h_{3\mathbf{k}})$ , а  $p_{11}$  – из условия  $B_0(\rho; p_{11}) = 0$  при  $\rho = \rho(h_{1\mathbf{k}})$ ; показана также соответствующая зависимость от величины  $x_1$ . Простому состоянию равновесия уравнения  $B_0(\rho; p_1) = 0$  отвечает грубый предельный цикл в системе (4.3) [8].

## 4.2. Вычисление усредненной системы

Поведение решений уравнения (1.1) в окрестностях индивидуальных резонансных уровней описывается усредненной системой (2.4), где

$$A(v) = B_0 + \frac{p_2}{4\pi^2 n^2} \int_0^{2\pi n} \int_0^{2\pi n} \sin \theta_1 \sin \theta_2 x'_\theta (v + (k_1 \theta_1 + k_2 \theta_2)/n) d\theta_1 d\theta_2 =$$

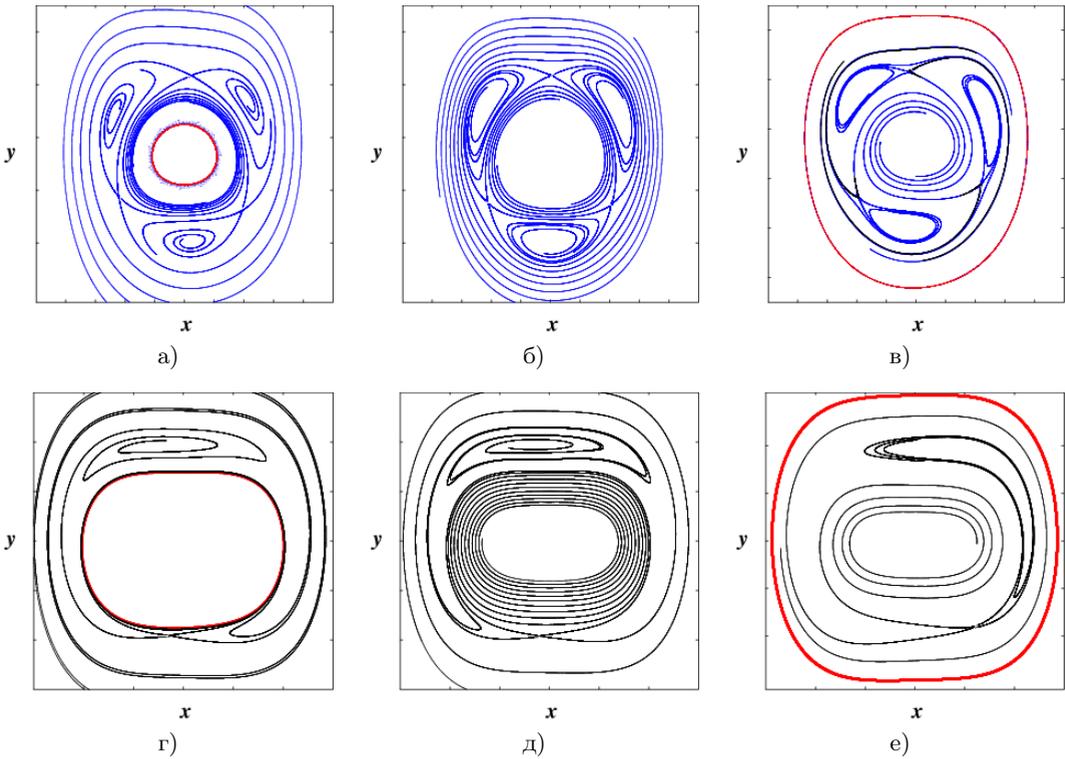
$$= \begin{cases} B_0 + p_2 \sqrt{2} (k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2) \frac{a^{n/2}}{1 + a^n} \sin nv & \text{при } n \text{ нечетных, } k_1 = \pm 1, k_2 = 1, \\ B_0 & \text{при } n \text{ четных или } k_1 \neq \pm 1, k_2 \neq 1. \end{cases}$$

Величина  $\sigma(I_{n\mathbf{k}})$  определяется формулой (4.4).

Из условий  $\omega = (\pm 1 + \sqrt{5})/n$  и  $\omega > 1$  следует, что существуют только три «расщепляемых» резонансных уровня  $H(x, y) = h_{311}$ ,  $H(x, y) = h_{1,-1,1}$  и  $H(x, y) = h_{111}$ , причем  $h_{311} < h_{1,-1,1} < h_{111}$ . Это доказывает утверждение теоремы 2.3 для уравнения (4.1).

Таким образом, почти для всех резонансных уровней справедливо выражение  $u' = B_0(I_{n\mathbf{k}}) + \mu\sigma u$ . Если  $B_0 \neq 0$ , то соответствующий резонансный уровень  $I = I_{n\mathbf{k}}$  является проходным; если же  $B_0 = 0$ , то  $u' = \mu\sigma u$ . Поскольку  $\sigma = dB_0/dI \neq 0$ , то  $u \rightarrow 0$  при  $\sigma < 0$ . Это означает существование устойчивой инвариантной кривой, охватывающей цилиндр усредненной системы (2.4) и трехмерного устойчивого тора в системе (2.1) (теорема 2.2). Соответственно, у автономной системы (1.3) существует устойчивый предельный цикл. При изменении параметра  $p_1$  можно наблюдать прохождение предельного цикла (отвечающего трехмерному тору системы (2.1)) через резонанс.

На Рис. 4.2 показано качественное поведение траекторий усредненной системы (2.4) в окрестностях расщепляемых резонансов с  $n = 3$  и  $n = 1$ , а также вне этих окрестностей. При  $\varepsilon = 0, 1$  и  $p_1 = 0, 005$  внутри резонансной зоны с  $n = 3$  существует замкнутая инвариантная кривая (устойчивый предельный цикл) у усредненной системы, Рис. 4.2, а. В исходной системе (2.1) данной кривой отвечает трехмерный тор. С увеличением  $p_1$  этот цикл попадает в окрестность резонансного уровня  $I = I_{311}$  ( $H(x, y) = h_{311}$ ). На Рис. 4.2, б цикл отсутствует, и имеет место синхронизация квазипериодических колебаний с частотами  $\omega_1/3, \omega_2/3$ . Далее, при увеличении  $p_1$ , появляется цикл вне резонансной зоны (Рис. 4.2, с, где  $p_1 = 0, 06$ ). При дальнейшем увеличении параметра  $p_1$ , цикл растет по величине, приближаясь к резонансной зоне с  $n = 1$  ( $H(x, y) = h_{1,-1,1}$ ) и далее проходит эту зону. Затем цикл проходит резонансную зону резонанса  $H(x, y) = h_{111}$  (Рис. 4.2, d – f). Качественное поведение решений усредненной системы в окрестности резонансного уровня  $H(x, y) = h_{1,-1,1}$  аналогично поведению решений в окрестности уровня  $H(x, y) = h_{111}$ .



**Рис. 4.2.** Схематическое представление фазовых портретов системы (2.4) в окрестности уровня  $H(x, y) = h_{311}$ : а) цикл подходит к резонансному уровню со стороны начала координат; б) цикл совпадает с резонансным уровнем; в) цикл вне резонансного уровня и в окрестности уровня  $H(x, y) = h_{111}$ ; г) цикл подходит к резонансному уровню; д) цикл совпадает с резонансным уровнем; е) цикл вне резонансного уровня.

### 4.3. Исследование в окрестности сепаратрисы

Седло невозмущенной системы расположено в начале координат. Для того чтобы зафиксировать седловое решение в начале координат при наличии возмущения, необходимо сделать замену  $x = \xi + \varepsilon x_1(t) + O(\varepsilon^2)$ . Затем, отбросив слагаемые порядка  $O(\varepsilon^2)$ , получим следующее уравнение:

$$\ddot{\xi} - \xi + \xi^3 = \varepsilon \left[ (p_1 - \xi^2)\dot{\xi} - 3\xi^2 x_1(t) \right], \tag{4.5}$$

где

$$x_1(t) = \frac{p_2}{2} \left[ \frac{\cos(1 - \nu)t}{1 + (1 - \nu)^2} + \frac{\cos(1 + \nu)t}{1 + (1 + \nu)^2} \right].$$

Из (3.11) следует, что

$$\Delta_\varepsilon(t_0) = \varepsilon \Delta_0(t_0) + O(\varepsilon^2),$$

где

$$\Delta_0(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} [(p_1 - \xi_s^2(t - t_0))\dot{\xi}_s(t - t_0) - 3\xi_s^2(t - t_0)x_1(t)]\dot{\xi}_s(t - t_0)dt. \tag{4.6}$$

Здесь

$$\xi_s(t) = \pm\sqrt{2}/\cosh t, \quad \dot{\xi}_s(t) = \mp\sqrt{2}\sinh(t)/ch^2(t) \tag{4.7}$$

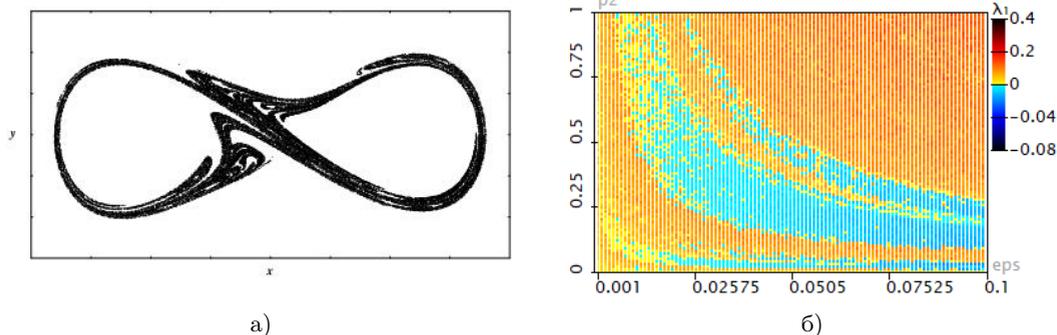
является решением невозмущенного уравнения для сепаратрисы. Знак «+» соответствует правой петле сепаратрисы, а знак «-» – левой.

В результате получим [15]:

$$\Delta_0(t_0) = 5p_1 - 4 + p_2 \frac{\pi\sqrt{2}}{2} [B_1 \sin(1 + \nu)t_0 + B_2 \sin(1 - \nu)t_0], \tag{4.8}$$

где

$$B_{1,2} = \frac{(1 \pm \nu)}{\cosh((1 \pm \nu)\pi/2)}.$$



**Рис. 4.3.** а) нерегулярное отталкивающее множество отображения Пуанкаре;  
 б) диаграмма старшего ляпуновского показателя

Заметим, что функция Мельникова, как и возмущение, является квазипериодической. Из (4.8) следует, что если выполнено условие  $|p_1| < (3/8)\sqrt{2}\pi|p_2|\sqrt{B_1^2 + B_2^2}$ , то функция  $\Delta_0(t_0)$  – знакопеременная, следовательно,  $W_\varepsilon^s \cap W_\varepsilon^u \neq \emptyset$ . Это означает, что существуют двоякоасимптотические решения к седловому решению. Они соответствуют гомоклиническим траекториям отображения Пуанкаре. Структура расширенной окрестности таких траекторий рассмотрена в работе Шильникова [14].

Заметим также, что неустойчивый предельный цикл автономной возмущенной системы ( $p_2 = 0$ ) стремится к сепаратрисе и образует неустойчивую петлю сепаратрисы при  $p_1 = 4/5$ . В этом случае свободный член  $\Delta_0$  равен нулю, и может возникнуть нерегулярное отталкивающее множество<sup>5</sup>. Изображение такого множества приведено на Рис. 4.3, а для  $\varepsilon = 0,1$ ,  $p_1 = 0,799$ ,  $p_2 = 0,8$  (дробная часть ляпуновской размерности составляет  $\approx 0,826$ ). На Рис. 4.3, б приведена диаграмма расчета старшего ляпуновского показателя  $\lambda_1$  на плоскости  $(\varepsilon, p_2)$  при  $p_1 = 0,8$ . На рисунке видно, что имеются области с  $\lambda_1 < 0$ , которые соответствуют регулярному асимптотическому поведению решений ( $t \rightarrow -\infty$ ) в окрестности невозмущенной сепаратрисы (неустойчивых квазипериодических решений).

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 18-01-00306) и Российского научного фонда (грант 19-11-00280).

<sup>5</sup> Данное отталкивающее множество можно сделать притягивающим (т. н. квазиаттрактор [8]), если заменить  $t$  на  $-t$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jing Z., Wang R. Complex dynamics in Duffing system with two external forcings // Chaos, Solitons and Fractals. 2005. Vol. 23, No. 2. pp. 399 – 411.
2. Jing Z., Huang J., Deng J. Complex dynamics in three-well duffing system with two external forcings // Chaos, Solitons and Fractals. 2007. Vol. 33, No. 3. pp. 795 – 812.
3. Yagasaki K. Second-order averaging and chaos in quasiperiodically forced weakly nonlinear oscillators // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1990, Vol. 44, No. 3. pp. 445 – 458.
4. Belogortsev A. B. Quasiperiodic resonance and bifurcations of tori in the weakly nonlinear Duffing oscillator // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1992. Vol. 59, No. 4. pp. 417 – 429.
5. Морозов А. Д., Морозов К. Е. О квазипериодических возмущениях двумерных гамильтоновых систем // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 12. С. 1607 – 1615
6. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М: Физматгиз, 1958. 408 с.
7. Morozov A. D. Quasi-conservative systems: cycles, resonances and chaos. World Sci. 1998. Vol. 30. 325 p.
8. Морозов А. Д. Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах. - М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2005. 424 с.
9. Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука, 1973. 512 с.
10. Мельников В. К. Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // Тр. Моск. мат. об-ва. 1963. Т. 12. С. 3 – 52
11. Sanders J. Melnikov's method and averaging // Celestial Mechanics. 1982. Vol. 28, No. 1-2, pp. 171 – 181
12. Wiggins S. Global bifurcations and chaos, analytical methods. - Springer-Verlag: New York, Heidelberg, Berlin, 1988.
13. Wiggins S. Chaotic transport in dynamical systems. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1992. 301 p.
14. Шильников Л. П. Об одной задаче Пуанкаре–Биркгофа // Матем. сб. Т. 74(116), № 3. С. 378-397.
15. Morozov A. D., Dragunov T. N. On quasi-periodic perturbations of Duffing equation // Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity. 2016. Vol. 5, No. 4. pp. 377 – 386.

*Поступила 19.03.2020*

MSC2020 34C15

# On Global Dynamics in Duffing Equation with Quasiperiodic Perturbation

© T. N. Dragunov<sup>1</sup>, K. E. Morozov<sup>2</sup>, A. D. Morozov<sup>3</sup>

**Abstract.** We consider Duffing equation with small perturbation consisting of time-independent nonconservative part similar to Van der Pol equation and quasiperiodic two-frequency part with irrational frequency ratio. Similarly to the analysis of time-periodic perturbation we apply analysis of resonances implying averaging. To study solutions near unperturbed separatrix we apply adapted Melnikov's method. We establish that the number of "partly passable" resonance levels is finite and qualitative behavior of solutions near other resonance levels is determined by the autonomous part of perturbation. We also study solutions corresponding to a limit cycle generated by the autonomous part of the perturbation. We demonstrate how solutions of the averaged system behave when a limit cycle corresponding to a three-dimensional torus of the original system goes through a neighborhood of a resonance level. In the case when the unperturbed system has a separatrix loop we use Melnikov formula to establish the transversal intersection of the stable and unstable manifolds of a saddle solution. This fact implies the existence of homoclinic solutions and nonregular dynamics in a neighborhood of the unperturbed separatrix. Applying all these techniques allows us to describe the global behavior of solutions.

**Key Words:** two-dimensional dynamical systems, quasiperiodic perturbation, resonances, averaging, homoclinic solutions, Melnikov's formula, Melnikov method, Duffing equation, global dynamics

## REFERENCES

1. Z. Jing, W. Ruiqi, "Complex dynamics in Duffing system with two external forcings", *Chaos, Solitons and Fractals*, **23**:2 (2005), 399–411.
2. Z. Jing, J. Huang, J. Deng, "Complex dynamics in three-well duffing system with two external forcings", *Chaos, Solitons and Fractals*, **33**:3 (2007), 795–812.
3. K. Yagasaki, "Second-order averaging and chaos in quasiperiodically forced weakly nonlinear oscillators", *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **44**:3 (1990), 445–458.
4. A. B. Belogortsev, "Quasiperiodic resonance and bifurcations of tori in the weakly nonlinear Duffing oscillator", *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **59**:4 (1992), 417–429.
5. A. D. Morozov, K. E. Morozov, "[On quasiperiodic perturbations of two-dimensional Hamiltonian systems]", *Differentsialnye uravneniya*, **53**:12 (2017), 1607–1615 (In Russ.).
6. N. N. Bogolyubov, Yu. A. Mitropolskiy, [*Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations*], Fizmatgiz Publ., Moscow, 1958 (In Russ.), 408 p.

<sup>1</sup>**Timofey N. Dragunov**, Associate Professor, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Gagarin Av., Nizhny Novgorod 603950, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0428-1850>, [dtm@mm.unn.ru](mailto:dtm@mm.unn.ru)

<sup>2</sup>**Kirill E. Morozov**, Assistant Professor, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Gagarin Av., Nizhny Novgorod 603950, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9089-6813>, [kirwamath@gmail.com](mailto:kirwamath@gmail.com)

<sup>3</sup>**Albert D. Morozov**, Professor, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Gagarin Av., Nizhny Novgorod 603950, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3467-6319>, [morozov@mm.unn.ru](mailto:morozov@mm.unn.ru)

7. A. D. Morozov, *Quasi-conservative systems: cycles, resonances and chaos.*, **30**, World Scientific, 1998, 325 p.
8. A. D. Morozov, [*Resonances, cycles and chaos in quasiconservative systems*], NIC "Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika" Publ., Institut kompyuternykh issledovaniy, Moscow-Izhevsk, 2005 (In Russ.), 424 p.
9. Ju. A. Mitropolskiy, O. B. Lykova, *Integral manifolds in nonlinear mechanics*, Nauka Publ., Moscow, 1973 (In Russ.), 512 p.
10. V. K. Melnikov, "[On stability of a center under time-periodic perturbations]", *Trudy Moskovskogo matematicheskogo obschestva*, **12** (1963), 3–52 (In Russ.).
11. J. Sanders, "Melnikov's method and averaging", *Celestial Mechanics*, **28**:1–2 (1982), 171–181.
12. S. Wiggins, *Global bifurcations and chaos: analytical methods*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1988, 495 p.
13. S. Wiggins, *Chaotic transport in dynamical systems*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1992, 301 p.
14. L. P. Shilnikov, "[On a Poincarè-Birkhoff problem]", *Mathematicheskiiy sbornik*, **74**:3 (1967), 378–397 (In Russ.).
15. A. D. Morozov, T. N. Dragunov, "On quasi-periodic perturbations of Duffing equation", *Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity*, **5**:4 (2016), 377–386.

*Submitted 19.03.2020*