DOI 10.15507/2079-6900.22.202001.81-93

УДК 517.9

Об одной нелокальной краевой задаче с наклонной производной

© К. Ж. Назарова[1], Б. Х. Турметов[2], К. И. Усманов[3]

Аннотация. Работа посвящена исследованию вопросов разрешимости нелокальной краевой задачи для уравнения Лапласа. Нелокальное условие вводится с помощью преобразований в пространстве R^n, осуществляемых некоторой ортогональной матрицей. Приведены примеры и свойства таких матриц. Для исследования основной задачи сначала решается вспомогательная нелокальная задача типа Дирихле для уравнения Лапласа. Данная задача сводится к векторному уравнению, элементами которого являются решения классической задачи Дирихле. При выполнении некоторых условий для коэффициентов в граничном условии доказаны теоремы о единственности и существовании решения задачи типа Дирихле. Для решения этой задачи получено также интегральное представление, которое является обобщением классического интеграла Пуассона. Далее основная задача сводится к решению нелокальной задачи типа Дирихле. Доказаны теоремы о существования и единственности решения исследуемой задачи. С помощью известных утверждений о решениях краевой задачи с наклонной производной для классического уравнения Лапласа найдены точные порядки гладкости решения данной задачи. Приведены также примеры невыполнения условий теоремы; при этом решение рассматриваемой задачи не единственно.

Ключевые слова: наклонная производная, нелокальная задача, уравнение Лапласа, ортогональная матрица, класс Гельдера, гладкость, существование, единственность

1. Введение

Пусть $\Omega = \{x \in R^n : \ |x| < 1\}$ — единичный шар, $n \geq 3$, $\partial\Omega = \{x \in \partial\Omega : \ |x| = 1\}$ — единичная сфера; $\Gamma = \{x \in \partial\Omega : \ x_n = 0\}$.

Пусть S — действительная ортогональная матрица $S \cdot S^T = E$; E — единичная матрица. Предположим также, что существует натуральное число l такое, что $S^l = E$. Заметим, что если $x \in \Omega$ или $x \in \partial\Omega$, то для любого натурального числа k имеет место включение $S^k x \in \Omega$, или $S^k x \in \partial\Omega$.

Приведем примеры таких отображений.

Пример 1.1 *Для любой точки $x \in \Omega$ поставим в соответствие точку $Sx = -x$. В этом случае $S = -E$. Ясно, что $S \cdot S^T = -E\,(-E) = E$ и $S^2 = E$, т. е. $l = 2$.*

Пример 1.2 *Пусть $n = 2$, $\varphi = \frac{2\pi}{l}$, $l \geq 1$. Тогда для отображения*

$$S = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

[1]**Назарова Кулзина Жаркимбековна**, доцент кафедры математики, МКТУ имени Х. А. Ясави (161200, Казахстан, г. Туркестан, пр. Б. Саттарханова, д. 29), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2093-1879, gjnazarova@mail.ru

[2]**Турметов Батирхан Худайбергенович**, профессор, МКТУ имени Х. А. Ясави (161200, Казахстан, г. Туркестан, пр. Б.Саттарханова, д. 29), доктор физико-математических наук, http://orcid.org/0000-0001-7735-6484, turmetovbh@mail.ru

[3]**Усманов Кайрат Идрисович**, доцент кафедры математики, МКТУ имени Х. А. Ясави (161200, Казахстан, г. Туркестан, пр. Б. Саттарханова, д. 29), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-1377-4633, y_kairat@mail.ru

получим

$$S^T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $S \cdot S^T = E$ *и* $S^l = E$.

Перейдем к постановке задачи, которую будем исследовать в настоящей работе. Введем оператор $I_S[u](x) \equiv u(Sx)$. Пусть $a_1, a_2, ..., a_l$ – некоторые действительные числа; $g\,(x)$ и $\phi\,(x)$ – функции, заданные на $\partial\Omega$ и Γ соответственно. Рассмотрим в области Ω следующую задачу:

$$\Delta u\,(x) = 0,\ x \in \Omega; \tag{1.1}$$

$$a_1 \frac{\partial u}{\partial x_n}\,(x) + a_2 \frac{\partial u}{\partial x_n}\,(Sx) + ... + a_n \frac{\partial u}{\partial x_n}\left(S^{l-1}x\right) = g\,(x)\,, x \in \partial\Omega; \tag{1.2}$$

$$u\,(\tilde{x}) = \phi\,(\tilde{x})\,, \tilde{x} \in \Gamma. \tag{1.3}$$

Решением задачи (1.1)–(1.3) назовем функцию $u\,(x) \in C^2\,(\Omega) \cap C^1\left(\bar{\Omega}\right)$, удовлетворяющую условиям (1.1)–(1.3) в классическом смысле.

В условии (1.2) выражение $\dfrac{\partial u}{\partial x_n}\left(S^k x\right), k = 1, 2, ..., l-1$ означает

$$\frac{\partial u\left(S^k x\right)}{\partial x_n} = I_{S^k}\left[\frac{\partial}{\partial x_n} u\,(x)\right], k = 1, 2, ..., l-1,$$

и при этом надо отметить, что

$$I_{S^k}\left[\frac{\partial}{\partial x_n} u\,(x)\right] \neq \frac{\partial}{\partial x_n}\left[I_{S^k} u\,(x)\right].$$

Поскольку краевое условие (1.2) задано в виде связи значений производной функции $u\,(x)$ в различных точках, то рассматриваемая задача входит в класс нелокальных задач типа Бицадзе-Самарского [1].

В случае $a_1 = 1,\ a_j = 0,\ j = 2, 3, ..., l$, получим известную задачу с наклонной производной [2]. Отметим, что вырождающиеся краевые задачи с наклонной производной для эллиптических уравнений исследованы в работах многочисленных авторов (см. например, [3–7]). Отметим, что для уравнения Лапласа в двумерном случае краевые задачи с отображениями из примера 1.2 изучены в работе [8], а в работах [9–10] аналогичные задачи исследованы для полигармонического уравнения. Кроме того, в работах [11–12] для нелокального уравнения Лапласа с отображениями S исследованы вопросы разрешимости основных краевых задач.

2. Вспомогательные утверждения

В данном пункте мы изложим некоторые свойства отображения S, а также приведем вспомогательные утверждения из теории систем алгебраических уравнений. Рассмотрим следующую матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_l \\ a_l & a_1 & ... & a_{l-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & ... & a_1 \end{pmatrix}.$$

Следующие утверждения доказаны в работе [11].

Л е м м а 2.1 *Пусть* $\varepsilon_1 = e^{i\frac{2\pi}{l}}$ *– примитивный корень степени* l *из единицы. Тогда* $\det A = \prod_{k=1}^{l}\left(a_1\varepsilon_0^k + ... + a_l\varepsilon_{l-1}^k\right)$, *где* $\varepsilon_k = e^{i\frac{2\pi k}{l}}$, $k = 0, 1, ..., l-1$.

Л е м м а 2.2 *Пусть* $\mu_k = a_1\varepsilon_0^k + ... + a_l\varepsilon_{l-1}^k \neq 0$, $k = 1, 2, ..., l$, *где* $\varepsilon_k = e^{i\frac{2k\pi}{l}}$. *Тогда существует обратная матрица к матрице* A:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & ... & b_l \\ b_l & b_1 & ... & b_{l-1} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_2 & b_3 & ... & b_1 \end{pmatrix},$$

где

$$b_j = \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{\varepsilon_k^{j-1}\mu_k}, \quad j = 1, 2, ..., l. \tag{2.1}$$

Л е м м а 2.3 *Если* $u(x)$ *– гармоническая функция в* Ω, *то функция* $u(Sx) = I_S u(x)$ *также – гармоническая в* Ω.

Л е м м а 2.4 *Если* $u(x)$ *– гармоническая функция, то она удовлетворяет уравнению*

$$a_1\Delta u(x) + a_2\Delta u(Sx) + ... + a_l\Delta u(S^{l-1}x) = 0. \tag{2.2}$$

Л е м м а 2.5 *Пусть* $u(x) \in C^2(\Omega)$ *удовлетворяет уравнению (2.2). Тогда при выполнении условия* $\det A \neq 0$ *функция* $u(x)$ *является гармонической в области* Ω.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функция $u(x) \in C^2(\Omega)$ удовлетворяет уравнению (2.2). Обозначим

$$v(x) = \sum_{k=1}^{l} a_k u\left(S^{k-1}x\right). \tag{2.3}$$

Очевидно, что $v(x) \in C^2(\Omega)$ и $\Delta v(x) = 0$, $x \in \Omega$, т. е. функция $v(x)$ является гармонической в области Ω. В силу утверждения леммы 2.3, функции $v\left(S^k x\right)$, $k = 1, 2, ..., l$ также являются гармоническими в Ω. С другой стороны, из равенства (2.3), в силу условия $S^l = E$, следуют равенства

$$\begin{cases} v(Sx) = a_l u(x) + a_1 u(Sx) + ... + a_{l-1}u(S^{l-1}x); \\ v\left(S^2x\right) = a_{l-1}u(x) + a_l u(Sx) + ... + a_{l-2}u(S^{l-1}x); \\ .... \\ v\left(S^{l-1}x\right) = a_2 u(x) + a_3 u(Sx) + ... + a_1 u(S^{l-1}x). \end{cases} \tag{2.4}$$

Таким образом, для функций $u(x)$, $u(Sx), ..., u(S^{l-1}x)$ получим систему алгебраических уравнений (2.3) – (2.4) с матрицей A:

$$\begin{pmatrix} v(x) \\ v(Sx) \\ ... \\ v(S^{l-1}x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_l \\ a_l & a_1 & ... & a_{l-1} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_2 & a_3 & ... & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(x) \\ u(Sx) \\ ... \\ u(S^{l-1}x) \end{pmatrix}.$$

По условию леммы, определитель этой системы $\det A$ не обращается в нуль. Если обозначим

$$U = \left(u(x),\ u(Sx), ..., u(S^{l-1}x)\right)^T, V = \left(v(x), v(Sx), ..., v(S^{l-1}x)\right)^T,$$

то система алгебраических уравнений $AU = V$ имеет единственное решение $U = A^{-1}V$. В частности

$$u(x) = \sum_{j=1}^{l} b_j v\left(S^{j-1}x\right), \tag{2.5}$$

где b_j определяются равенством (2.1). Поскольку $v\left(S^{j-1}x\right)$ гармонические функции в Ω, то функция $u(x)$ из (2.5) также является гармонической в Ω. Лемма доказана.

3. Нелокальная задача типа Дирихле

В этом пункте мы исследуем следующую нелокальную задачу типа Дирихле:

$$\Delta v(x) = 0,\ x \in \Omega, \tag{3.1}$$

$$\sum_{k=1}^{l} a_k v\left(S^{k-1}x\right)|_{\partial\Omega} = g(x),\ x \in \partial\Omega. \tag{3.2}$$

Решением задачи (3.1) – (3.2) назовем функцию $v\left(x\right) \in C^2\left(\Omega\right) \cap C\left(\bar{\Omega}\right)$, удовлетворяющую условиям (3.1) – (3.2) в классическом смысле.

В случае $a_1 \neq 0,\ a_k = 0,\ k = 2, 3, ..., l$, получим классическую задачу Дирихле, для уравнения Лапласа.

Теорема 3.1 *Пусть при всех $k = 1, 2, 3, ..., l$ выполняются условия $\mu_k = a_1\varepsilon_0^k + ... + a_l\varepsilon_{l-1}^k \neq 0$. Тогда если решение задачи (3.1) – (3.2) существует, то оно единственно.*

Доказательство. Докажем, что однородная задача (3.1) – (3.2) имеет только нулевое решение. Пусть $v(x)$ – решение однородной задачи (3.1) – (3.2). Как было отмечено выше, если функция $v(x)$ гармоническая, то функции $v(S^{k-1}x), k = 2, 3, ..., l$, – также гармонические. Тогда функция $v(x)$ удовлетворяет и уравнению (2.2).

Рассмотрим функцию

$$w(x) = \sum_{k=1}^{l} a_k v(S^{k-1}x), x \in \Omega.$$

Очевидно, что $w(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Если $\mu_k = a_1\varepsilon_0^k + ... + a_l\varepsilon_{l-1}^k \neq 0$ при $k = 1, 2, ..., l$, то по лемме 2.1 справедливо условие $D = detA \neq 0$. Тогда по лемме 2.3 функция $w(x)$ – гармоническая в области Ω и, следовательно, является решением следующей задачи Дирихле:

$$\Delta w(x) = 0, x \in \Omega;\ \ w(x)|_{\partial\Omega} = 0.$$

В силу единственности решения задачи Дирихле имеем $w(x) \equiv 0, x \in \bar{\Omega}$. Тогда функция $v(x)$, найденная по формуле (2.3), тождественна равна нулю, т. е. $v(x) \equiv 0, x \in \bar{\Omega}$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 3.1 *Если* $\mu_k = 0, k = 1, 2, ..., l \Longleftrightarrow DetA = 0$, *то однородная задача имеет бесконечно много решений. Например, если* $Sx = -x$, *т. е.* $l = 2$, *то* $u(x) = H_{2p}(x)$ *– однородные гармонические полиномы степени* $2p, p = 0, 1, ...$, *удовлетворяют граничному условию*

$$u(x) - u(Sx) = 0, x \in \partial\Omega.$$

Далее исследуем существование решения задачи (3.1) – (3.2). Пусть

$$P(x, y) = \frac{1}{\omega_n} \frac{1 - |x|^2}{|x - y|^n}$$

ядро Пуассона; ω_n – площадь единичной сферы.

Доказательство следующего утверждения приведено в работе [11] .

Л е м м а 3.1 *Пусть функция* $g(x)$ *непрерывна на* $\partial\Omega$. *Тогда для любого* $k \in \mathbb{N}$ *справедливы равенства*

$$\int_{\partial\Omega} g(S^k y)\, ds_y = \int_{\partial\Omega} g(y)\, ds_y.$$

Справедливо следующее утверждение относительно задачи (3.1) – (3.2).

Т е о р е м а 3.2 *Пусть числа* $\{a_k : k = 1, \ldots, l\}$ *такие, что* $\mu_k = a_1\varepsilon_0^k + ... + a_l\varepsilon_{l-1}^k \neq 0$ *при* $k = 1, \ldots, l$, *где* ε_k *– корни степени* l *из единицы;* $g \in C^\lambda(\partial\Omega), 0 < \lambda$ *и* λ*-нецелое. Тогда решение задачи (3.1) – (3.2) существует, единственно, принадлежит классу* $C^\lambda(\bar{\Omega})$ *и представляется в виде*

$$v(x) = \int_{\partial\Omega} P_S(x, y) g(y)\, ds_y, \tag{3.3}$$

где

$$P_S(x, y) = \sum_{q=1}^{l} b_q P(S^{q-1}x, y), \tag{3.4}$$

а b_q *при* $q = 1, \ldots, l$ *находится из (2.1).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим в области Ω для функции $w(x)$ следующую задачу Дирихле:

$$\Delta w(x) = 0,\ x \in \Omega;\quad w(x)|_{\partial\Omega} = g(x),\ x \in \partial\Omega. \tag{3.5}$$

Известно (см. например [13]), что если $g(x) \in C^\lambda(\partial\Omega)$, то решение задачи Дирихле (3.5) существует, единственно, принадлежит классу $C^\lambda(\bar{\Omega})$ и представляется в виде

$$w(x) = \int_{\partial\Omega} P(x, y) g(y)\, ds_y. \tag{3.6}$$

Рассмотрим вектор $W = \big(w(x), w(Sx), ..., w(S^{l-1}x)\big)^T$. По лемме 2.2 матрица A^{-1} обладает структурой матрицы A. Поэтому из векторного равенства $V = A^{-1}W$ определим вектор $V = \big(v(x), v(Sx), ..., v(S^{l-1}x)\big)^T$. Поскольку $\mu_k = a_1\varepsilon_0^k + ... + a_l\varepsilon_{l-1}^k \neq 0$, то по лемме 2.1 $\det A \neq 0$ и, значит, $\det A^{-1} \neq 0$. Поскольку $AV = W$, то функция $v(x)$ однозначно определяется через функцию $w(x)$ из (2.3) по формуле

$$v(x) = \sum_{j=1}^{l} b_j w(S^{j-1}x), \tag{3.7}$$

где b_j находится из (2.1). Проверим, что функция $v(x)$, определяемая из (3.7), является решением задачи (3.1) – (3.2). Действительно, $g \in C^{\lambda}(\partial\Omega) \Rightarrow w \in C^{\lambda}(\bar{\Omega}) \Rightarrow v(x) \in$ $\in C^{\lambda}(\bar{\Omega})$. Поэтому, согласно лемме 2.3 и равенству (3.5), в области Ω получим

$$\Delta v(x) = \sum_{j=1}^{l} b_j \Delta w(S^{j-1}x) = 0.$$

Проверим выполнение граничного условия задачи (3.1) – (3.2). При $x \in \partial\Omega$ из равенства (3.7) запишем:

$$v(x)|_{\partial\Omega} = \left.\sum_{q=1}^{l} b_q w(S^{q-1}x)\right|_{\partial\Omega} = \sum_{q=1}^{l} b_q g(S^{q-1}x),$$

$$v(Sx)|_{\partial\Omega} = I_S v(x)|_{\partial\Omega} = I_S\left(\sum_{q=1}^{l} b_q g(S^{q-1}x)\right) = \sum_{q=1}^{l} b_q g(S^q x) = b_l g(x) + \sum_{q=1}^{l-1} b_q g(S^q x) =$$

$$= b_0 g(x) + \sum_{q=2}^{l} b_{q-1} g(S^{q-1}x) = \sum_{q=1}^{l} b_{q-1} g(S^{q-1}x).$$

Тогда по индукции

$$v(S^{k-1}x) = \sum_{q=1}^{l} b_{q-k+1} g(S^{q-1}x), k = 1, 2, ..., l.$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{l} a_k v(S^{k-1}x)|_{\partial\Omega} = \sum_{k=1}^{l} a_k \sum_{q=1}^{l} b_{q-k+1} g(S^{q-1}x) = \sum_{q=1}^{l} g(S^{q-1}x) \sum_{k=1}^{l} a_k b_{q-k+1}.$$

Поскольку по определению чисел b_k

$$\sum_{k=1}^{l} a_k b_{q-k+1} = \begin{cases} 1 & q = 1 \\ 0 & q \neq 1, \end{cases} \tag{3.8}$$

то окончательно получим

$$\sum_{k=1}^{l} a_k v(S^{k-1}x)|_{\partial\Omega} = g(x),$$

т. е. граничное условие (3.2) также выполняется.

Далее, подставляя представление функции $w(x)$ из (3.6) в равенство (3.7) и учитывая при этом формулу (3.4) получим

$$v(x) = \sum_{q=1}^{l} b_q w(S^{q-1}x) = \sum_{q=1}^{l} b_q \int_{\partial\Omega} P(S^{q-1}x, y) g(y)\, ds_y =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left[\sum_{q=1}^{l} b_q P(S^{q-1}x, y)\right] g(y)\, ds_y = \int_{\partial\Omega} P_S(x, y) g(y)\, ds_y.$$

Таким образом, представление (3.3) для функции $v(x)$ доказано. Теорема доказана.

4. Исследование основной задачи

Приступим к изучению основной краевой задачи. Справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 4.1 *Пусть в задаче (1.1) – (1.3) коэффициенты* $a_j,\ j = 1, 2, ..., l$, *такие, что* $\mu_k = a_1\varepsilon_0^k + ... + a_l\varepsilon_{l-1}^k \neq 0$, $k = 1, 2, ..., l$. *Тогда если решение задачи (1.1) – (1.3) существует, то оно единственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $u\,(x)$ – решение однородной задачи (1.1) – (1.3). Обозначим $v(x) = \dfrac{\partial u(x)}{\partial x_n}, x \in \Omega$. Очевидно, что функция $v(x)$ – гармоническая в области Ω. Далее, для любого $k = 1, 2, ..., l$ справедливо равенство

$$v(S^k x) = I_{S^k} v(x) = I_{S^k} \frac{\partial}{\partial x_n} u(x) \equiv \frac{\partial}{\partial x_n} u(S^k x).$$

Тогда из однородного краевого условия (1.2) следует

$$a_1 v\,(x) + a_2 v\,(Sx) + ... + a_n v\left(S^{l-1}x\right) = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Итак, если $u\,(x)$ – решение однородной задачи (1.1) – (1.3), то функция $v(x) = \dfrac{\partial u(x)}{\partial x_n}$, $x \in \Omega$, будет решением однородной задачи (3.1) – (3.2). В силу утверждения теоремы 3.1 решение этой задачи единственно, и, следовательно, $v(x) \equiv 0, x \in \bar{\Omega} \Leftrightarrow \dfrac{\partial u(x)}{\partial x_n} \equiv 0$, $x \in \bar{\Omega}$. Тогда $u(x) = u(\tilde{x}, 0)$ - гармоническая функция зависящая от переменной $\tilde{x} = (x_1, x_2, ..., x_{n-1})$. По условию (1.3) $u(x)|_\Gamma = 0$, тогда $u(x) \equiv 0, x \in \bar{\Omega}$. Теорема доказана.

Перейдем к исследованию существования и гладкости решения задачи (1.1)–(1.3). Сначала приведем некоторые вспомогательные утверждения, доказанные в работе [3].

В дальнейшем будем считать, что функция $w(x)$ принадлежит классу $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Для любой точки $x \in \Omega$ обозначим символом $\bar{x}$ точку $\partial\Omega$, наименее удаленную от x.

В работе [3] доказаны следующие утверждения.

Л е м м а 4.1 *Пусть* $\lambda \geq 0$ *и* $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$ *– мультииндекс с* $|\beta| > \lambda$. *Пусть* $\Delta w(x) = 0, x \in \Omega$. *Если* $w(x) \in C^\lambda(\bar{\Omega})$, *то*

$$|D^\beta u(x)| \leq C|x - \bar{x}|^{\lambda - \beta}.$$

Л е м м а 4.2 *Пусть функция* $w(x)$ *является решением задачи* $\Delta w(x) = f(x)$, $x \in \Omega$; $w(x)|_{\partial\Omega} = 0$ *с функцией* $f(x)$, *удовлетворяющей условию*

$$|f(x)| \leq C|x - \bar{x}|^{\lambda - 1}.$$

Тогда для любого $\mu < \lambda$ *функция* $w(x)$ *принадлежит классу* $C^{\mu+1}(\bar{\Omega})$.

Л е м м а 4.3 *Пусть* $w(x)$ *– решение задачи (3.5). Если* $g\,(x) \in C^\lambda\,(\partial\Omega)$, *то*

$$h(x) = \int_0^{x_n} w(\tilde{x}, t)dt$$

принадлежит классу $C^{\lambda + \frac{1}{2}}\left(\bar{\Omega}\right)$.

Т е о р е м а 4.2 *Пусть* $\mu_k = a_1\varepsilon_0^k + ... + a_l\varepsilon_0^k \neq 0, \quad k = 1,2,...,l,\ \lambda + \frac{1}{2} > 1,$ *причем число* $\lambda + \frac{1}{2}$ *– нецелое,* $g(x) \in C^{\lambda}(\partial\Omega)$, $\phi(x) \in C^{\lambda+1}(\Gamma)$. *Тогда решение задачи (1.1) – (1.3) существует и принадлежит классу* $C^{\lambda+\frac{1}{2}}\left(\bar{\Omega}\right)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $u(x)$ – решение задачи (1.1) – (1.3).

Обозначим $v(x) = \dfrac{\partial u(x)}{\partial x_n}, x \in \Omega$. Очевидно, что функция $v(x)$ – гармоническая в области Ω, и для любого $k = 1,2,...,l$ справедливо равенство

$$v(S^k x) = I_{S^k}\frac{\partial}{\partial x_n}u(x) \equiv \frac{\partial}{\partial x_n}u(S^k x).$$

Тогда из условия (1.2) для функции $v(x)$ получим задачу (3.1) – (3.2).

Таким образом, если $u(x)$ – решение задачи (1.1) – (1.3), то функция $v(x) = \dfrac{\partial u(x)}{\partial x_n}$, $x \in \Omega$ будет удовлетворять условиям задачи (3.1) – (3.2). Если $g(x) \in C^{\lambda}(\partial\Omega)$, то по теореме 3.1 решение этой задачи существует, единственно и принадлежит классу $C^{\lambda}\left(\bar{\Omega}\right)$.

Покажем, что по функцию $v(x)$ можно построить по решению задачи (1.1) – (1.3). Пусть $v(x)$ удовлетворяет условиям задачи (3.1) – (3.2). Решение задачи (1.1) – (1.3) будем искать в следующем виде:

$$u(x) = \int_0^{x_n} v(\tilde{x}, t)dt + z(\tilde{x}), \tag{4.1}$$

где функция $z(\tilde{x})$ подлежит определению. Пусть $\tilde{\Delta} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \dfrac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2}$. Тогда для интеграла в правой части равенства (4.1) получим:

$$\Delta\left(\int_0^{x_n} v(\tilde{x}, t)dt\right) = \int_0^{x_n} \tilde{\Delta}v(\tilde{x}, t)dt + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\int_0^{x_n} v(\tilde{x}, t)dt =$$
$$= -\int_0^{x_n} \frac{\partial^2 v(\tilde{x}, t)}{\partial t^2}dt + \frac{\partial v(\tilde{x}, x_n)}{\partial x_n} = \frac{\partial v(\tilde{x}, 0)}{\partial x_n}.$$

Отсюда, применяя оператор Лапласа к левой и правой частям равенства (4.1), запишем:

$$\Delta u(x) = \frac{\partial v(\tilde{x}, 0)}{\partial x_n} + \tilde{\Delta}z(\tilde{x})$$

.

Следовательно, для функции $z(\tilde{x})$ получим следующую задачу Дирихле:

$$\tilde{\Delta}z(\tilde{x}) = -\frac{\partial v(\tilde{x}, 0)}{\partial x_n}, |\tilde{x}| < 1,\ z(\tilde{x})|_{\Gamma} = \phi(\tilde{x}). \tag{4.2}$$

При гладких данных $\dfrac{\partial v(\tilde{x}, 0)}{\partial x_n}$ и $\phi(\tilde{x})$ решение этой задачи существует. Покажем, что функция (4.1) формально удовлетворяет всем условиям задачи (1.1) – (1.3). Действительно, по построению $\Delta u(x) = 0, x \in \Omega$; $u(x)|_{\Gamma} = z(\tilde{x})|_{\Gamma} = \phi(\tilde{x})$, т. е. условия (1.1) и (1.3) выполняются. Далее

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} = v(x), \frac{\partial u\left(S^k x\right)}{\partial x_n} = I_{S^k}\left[\frac{\partial}{\partial x_n}u(x)\right] = I_{S^k}v(x) = v\left(S^k x\right), k = 1,2,...,l-1.$$

Значит,

$$a_1 \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) + a_2 \frac{\partial u}{\partial x_n}(Sx) + ... + a_n \frac{\partial u}{\partial x_n}\left(S^{l-1}x\right) =$$

$$= a_1 v(x) + a_2 v(Sx) + ... + a_n v\left(S^{l-1}x\right) = g(x), x \in \partial\Omega,$$

т. е. граничное условие (1.2) также выполняется.

Остается исследовать гладкость решения задачи (4.2).

Введем функцию

$$h(x) = \int_0^{x_n} v(\tilde{x}, t)dt. \tag{4.3}$$

Далее, используя формулу (3.7), представим функцию $v(x)$ из (4.3) через решение задачи (3.5). Тогда

$$h(x) = \sum_{j=1}^{l} b_j \int_0^{x_n} w_j(\tilde{x}, t)dt,$$

где $w_j(\tilde{x}, t) = w\left(S^{j-1}(\tilde{x}, t)\right)$. Очевидно, что функции $w(S^k x), k = 1, 2, ..., l-1$, будут решениями задачи

$$\Delta w(x) = 0,\ x \in \Omega;\ \ w(S^k x)\big|_{\partial\Omega} = g(S^k x),\ x \in \partial\Omega. \tag{4.4}$$

Поскольку задача (4.4) эквивалентна задаче Дирихле, то по утверждению леммы (4.3) функции $\int_0^{x_n} w_j(\tilde{x}, t)dt, j = 1, 2, ..., l-1$, принадлежат классу $C^{\lambda+\frac{1}{2}}\left(\bar{\Omega}\right)$, а значит, функция $h(x)$ из (4.3) также принадлежит классу $C^{\lambda+\frac{1}{2}}\left(\bar{\Omega}\right)$.

Остается исследовать гладкость решения задачи (4.2). Если $\lambda > 1$, то при условии $g(x) \in C^{\lambda}(\partial\Omega)$ функция $v(x) \in C^{\lambda}\left(\bar{\Omega}\right)$, и поэтому $\dfrac{\partial v(\tilde{x}, 0)}{\partial x_n} \in C^{\lambda-1}\left(\bar{\Omega}\right)$. Тогда решение задачи (4.2) существует, единственно и при выполнении условии $\phi(x) \in C^{\lambda+1}(\Gamma)$ принадлежит классу $C^{\lambda+1}\left(\bar{\Omega}\right)$ (см., например, [13]).

Пусть $\lambda < 1$. Представим функцию $z(x)$ в виде $z(x) = z_1(x) + z_2(x)$, где

$$\tilde{\Delta} z_1(\tilde{x}) = 0, |\tilde{x}| < 1,\ z_1(\tilde{x})|_{\Gamma} = \phi(\tilde{x}). \tag{4.5}$$

$$\tilde{\Delta} z_2(\tilde{x}) = -\frac{\partial v(\tilde{x}, 0)}{\partial x_n}, |\tilde{x}| < 1,\ z_2(\tilde{x})|_{\Gamma} = 0. \tag{4.6}$$

Если $\phi(x) \in C^{\lambda+1}(\Gamma)$, то решение задачи (4.5) существует и принадлежит классу $C^{\lambda+1}\left(\bar{\Omega}\right)$. Для функции $v(x)$ в этом случае в силу леммы 4.1 получим оценку

$$\left|\frac{\partial v(x)}{\partial x_n}\right| \leq C|x - \bar{x}|^{\lambda-1}.$$

Тогда для задачи (4.6), применяя лемму 4.2 с функцией $f(x) = \dfrac{\partial v(\tilde{x}, 0)}{\partial x_n}$, получим $z_2 \in C^{\lambda+1-\varepsilon}(|x| \leq 1)$, и если положим $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, то $z_2 \in C^{\lambda+1/2}(|x| \leq 1)$. Таким образом, решение задачи (1.1) – (1.3) принадлежит классу $C^{\lambda+1/2}\left(\bar{\Omega}\right)$. Теорема доказана.

Можно доказать, что показатель гладкости решения задачи (1.1)-(1.3) полученный в теореме 4.2, нельзя улучшить. Данное утверждение докажем на примере отображения $Sx = -x$. Справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 4.3 *Пусть* $Sx = -x, \lambda > 0$, *причем число* $\lambda + \dfrac{1}{2}$ *– нецелое. Существует функция* $g(x) \in C^{\lambda}(\bar{\Omega})$ *такая, что решение задачи (1.1) – (1.3) при любом* $\varepsilon > 0$ *не принадлежит классу* $C^{\lambda+1/2+\varepsilon}(\bar{\Omega})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $Sx = -x$. Предположим, что функция $v(\tilde{x})$ является решением задачи

$$\Delta v(\tilde{x}) = 0, |x| < 1; \, v(\tilde{x})|_{\Gamma} = \phi(\tilde{x}). \tag{4.7}$$

Выберем функцию $\phi(\tilde{x}) \in C^{\lambda}(\Gamma)$ так, чтобы $v(\tilde{x}) \in C^{\lambda}(|x| \leq 1)$ и чтобы для любого $\varepsilon > 0$ выполнялось условие $v(\tilde{x}) \notin C^{\lambda+\varepsilon}(|x| \leq 1)$. Что касается функции $u(x) = x_n v(\tilde{x})$, то она будет удовлетворять условиям следующей задачи:

$$\Delta u(x) = 0, \; x \in \Omega; \;\; \left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_n}\right|_{\partial\Omega} = \phi, \; u(x)|_{\Gamma} = 0.$$

В работе [3] доказано, что при выборе такой функции $v(\tilde{x})$ функция $u(x)$ принадлежит классу $C^{\lambda+1/2}(\bar{\Omega})$ и $u(x) \notin C^{\lambda+1/2+\varepsilon}(\bar{\Omega}), \varepsilon > 0$.

Справедливы следующие равенства

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} = v(\tilde{x}), \frac{\partial u(Sx)}{\partial x_n} = v(-\tilde{x}).$$

Из них следует, что

$$a_1 \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} + a_2 \frac{\partial u(Sx)}{\partial x_n} = a_1 v(\tilde{x}) + a_2 v(-\tilde{x})|_{\Gamma} = a_1 \phi(\tilde{x}) + a_2 \phi(-\tilde{x}) \equiv g(x).$$

Таким образом, функция $u(x) = x_n v(\tilde{x})$ принадлежит классу $C^{\lambda+1/2}(\bar{\Omega})$ и $u(x) \notin$ $\notin C^{\lambda+1/2+\varepsilon}(\bar{\Omega}), \varepsilon > 0$, а также удовлетворяет условиям

$$\Delta u(x) = 0, \; x \in \Omega; \;\; a_1 \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} + a_2 \left.\frac{\partial u(Sx)}{\partial x_n}\right|_{\partial\Omega} = g(x), \; u(x)|_{\Gamma} = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

З а м е ч а н и е 4.1 *Если в задаче (1.1)-(1.3) коэффициенты* $a_k, \;\; k = 1, 2, ..., l$ *такие, что* $\det A = 0$*, то можно показать, что однородная задача имеют ненулевые решения. Например, пусть* $Sx = -x$ *и* $0 = \det A = a_1^2 - a_2^2 \Leftrightarrow a_1 = \pm a_2$*. Если рассмотрим функцию* $u(x) = x_n v(\tilde{x})$*, где* $v(\tilde{x})$ *- решение задачи 4.7, то* $\Delta u(x) = 0, \; x \in$ $\in \Omega$; $u(x)|_{\Gamma} = 0$.

Если функция $v(\tilde{x})$ *дополнительно обладает свойством четности* $v(\tilde{x}) = v(-\tilde{x})$*, то функция* $u(x) = x_n v(\tilde{x})$ *будет удовлетворять граничному условию*

$$a_1 \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} + a_2 \left.\frac{\partial u(Sx)}{\partial x_n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \; \textit{когда } a_1 = -a_2,$$

а если $v(-\tilde{x}) = -v(\tilde{x})$*, то*

$$a_1 \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} + a_2 \left.\frac{\partial u(Sx)}{\partial x_n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \; \textit{когда } a_1 = a_2.$$

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант № AP05131268).

Список литературы

1. Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Доклады АН СССР. 1969. Т. 185, № 4. С. 739–740.

2. Бицадзе А. В. Об однородной задаче наклонной производной для гармонических функций в трехмерных областях // Доклады АН СССР. 2003. Т. 148, № 4. С. 749–752.

3. Алимов Ш. А. Об одной задаче с наклонной производной // Дифференциальные уравнения. 1981. Т. 17, № 10. С. 1738–1751.

4. Бояркин Д. И. Краевая задача с вырождением на границе вдоль многообразия соразмерности $k > 2$ // Журнал СВМО. 2016. Т. 18, № 2. С. 7–10.

5. Егоров Ю. В., Кондратьев В. А. О задаче с косой производной // Математический сборник. 1969. Т. 78 (120), № 1. С. 148–176.

6. Мазья В. Г. О вырождающейся задаче с косой производной // Журнал УМН. 1970. Т. 25, № 2 (152). С. 275–276.

7. Popivanov P. Boundary value problems for the biharmonic operator in the unit ball // AIP Conference Proceedings. 2019. Vol. 2159, no. 030028. DOI: https://doi.org/10.1063/1.5127493

8. Przeworska-Rolewicz D. Some boundary value problems with transformed argument // Commentationes Mathematicae. 1974. Vol. 17, no. 2. pp. 451–457.

9. Karachik V. V., Turmetov B. Kh. On solvability of some nonlocal boundary value problems for polyharmonic equation // Kazakh Mathematical Journal. 2019. Vol. 19, no. 1. pp. 39–49.

10. Turmetov B. Kh., Muratbekova M., Ahmedov A. On solvability of some boundary value problems for the non-local polyharmonic equation with boundary operators of the Hadamard Type // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1366, 012065.

11. Karachik V. V., Sarsenbi A., Turmetov B. Kh. On solvability of the main boundary value problems for a non-local Poisson equation // Turkish Journal of Mathematics. 2019. Vol. 43, no. 3. pp. 1604–1625.

12. Turmetov B. Kh., Shamsiev R. N. On a boundary problem for a non-local Poisson equation with boundary operators of the Hadamard type // AIP Conference Proceedings. 2019. Vol. 2183, no. 070027. DOI: https://doi.org/10.1063/1.5136189

13. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука ; Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 464 с.

Поступила 07.01.2020

MSC2020 35J25

On a nonlocal boundary value problem with an oblique derivative

© **K. Zh. Nazarova**[1], **B. Kh. Turmetov**[2], **K. I. Usmanov**[3]

Abstract. The work studies the solvability of a nonlocal boundary value problem for the Laplace equation. The nonlocal condition is introduced using transformations in the R^n space carried out by some orthogonal matrices. Examples and properties of such matrices are given. To study the main problem, an auxiliary nonlocal Dirichlet-type problem for the Laplace equation is first solved. This problem is reduced to a vector equation whose elements are the solutions of the classical Dirichlet probem. Under certain conditions for the boundary condition coefficients, theorems on uniqueness and existence of a solution to a problem of Dirichlet type are proved. For this solution an integral representation is also obtained, which is a generalization of the classical Poisson integral. Further, the main problem is reduced to solving a non-local Dirichlet-type problem. Theorems on existence and uniqueness of a solution to the problem under consideration are proved. Using well-known statements about solutions of a boundary value problem with an oblique derivative for the classical Laplace equation, exact orders of smoothness of a problem's solution are found. Examples are also given of the cases where the theorem conditions are not fulfilled. In these cases the solution is not unique.

Key Words: oblique derivative, nonlocal problem, Laplace equation, orthogonal matrix, Helder class, smoothness of solution, existence of solution, uniqueness of solution

References

1. A. V. Bitsadze, A. A. Samarskii, "Some elementary generalizations of linear elliptic boundary value problems", *Doklady AN SSSR*, **185**:4 (1969), 739–740 (In Russ.).

2. A. B. Bitsadze, "[On the homogeneous problem of the inclined derivative of harmonic functions in three-dimensional domains]", *Doklady AN SSSR*, **148**:4 (2003), 749–752 (In Russ.).

3. Sh. A. Alimov, "On a problem with an oblique derivative", *Differensialnye uravneniya*, **17**:10 (1981), 1738–1751 (In Russ.).

4. D. I. Boyarkin, "A boundary value problem with degeneration on the boundary along the manifold of codimension $k > 2$", *Zhurnal SVMO*, **18**:2 (2016), 7–10 (In Russ.).

5. Yu.V. Egorov., V. A. Kondratev, "The oblique derivative problem", *Math. USSR-Sb.*, **7**:1 (1969), 139–169.

6. V. G. Mazya, "[The degenerate problem with oblique derivative]", *UMN*, **25**:2 (152) (1970), 275–276 (In Russ.).

[1]**Kulzina Zh. Nazarova**, Associate Professor of Mathematics, Akhmet Yassawi University (29 Sattarkhanov Av., Turkistan 161200, Kazakhstan), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2093-1879, gjnazarova@mail.ru

[2]**Batirkhan Kh. Turmetov** , Professor of Mathematics, Akhmet Yassawi University (29 Sattarkhanov Av., Turkistan 161200, Kazakhstan), Dr. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2093-1879, turmetovbh@mail.ru

[3]**Kairat Id. Usmanov**, Associate Professor of Mathematics, Akhmet Yassawi University (29 Sattarkhanov Av., Turkistan 161200, Kazakhstan), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2093-1879, y_kairat@mail.ru

7. P. Popivanov, “Boundary value problems for the biharmonic operator in the unit ball”, *AIP Conference Proceedings*, **2159**:030028, https://doi.org/10.1063/1.5127493 (2019).

8. D. Przeworska-Rolewicz, “Some boundary value problems with transformed argument”, *Commentationes Mathematicae*, **17:2** (1974), 451 – 457.

9. V. V. Karachik , B. Kh. Turmetov, “On solvability of some nonlocal boundary value problems for polyharmonic equation”, *Kazakh Mathematical Journal*, **19**:1 (2019), 39 – 49..

10. B. Kh. Turmetov, M. Muratbekova , A. Ahmedov, “On solvability of some boundary value problems for the non-local polyharmonic equation with boundary operators of the hadamard type”, *Journal of Physics: Conference Series*, **1366** (2019).

11. V. V. Karachik , A. Sarsenbi, B. Kh. Turmetov, “On solvability of the main boundary value problems for a non-local Poisson equation”, *Turkish Journal of Mathematics*, **43**:3 (2019), 1604 – 1625.

12. B. Kh. Turmetov, R. N. Shamsiev, “On a boundary problem for a nonlocal Poisson equation with boundary operators of the Hadamard type”, *AIP Conference Proceedings*, **2183**:070027, https://doi.org/10.1063/1.5136189 (2019).

13. D. Gilbarg , N. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag, Berlin, 1977, 401 p.

Submitted 07.01.2020