DOI 10.15507/2079-6900.22.202001.71-80

УДК 517.938.5, 512.721

Комбинаторный инвариант для поверхностных диффеоморфизмов Морса-Смейла с ориентируемой гетероклиникой

© А. И. Морозов[1], О. В. Починка[2]

Аннотация. В настоящей работе рассматривается класс сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла f, заданных на ориентируемой поверхности M^2. В работах А. А. Безденежных и В. З. Гринеса показано, что такие диффеоморфизмы имеют конечное число гетероклинических орбит. Кроме того, задача классификации рассматриваемых диффеоморфизмов сведена к проблеме различения ориентируемых графов с подстановками, описывающими геометрию гетероклинического пересечения. Однако такие графы в общем случае не допускают полиномиальных различающих алгоритмов. В настоящей статье предлагается новый подход к классификации данных каскадов. Для этого каждому рассматриваемому диффеоморфизму f ставится в соответствие граф, вложимость которого в объемлющую поверхность дает возможность построения эффективного алгоритма различения таких графов.

Ключевые слова: диффеоморфизм Морса-Смейла, сохраняющий ориентацию диффеоморфизм, топологический инвариант диффеоморфизма, поверхностный диффеоморфизм, ориентируемая гетероклиника

1. Порядок Смейла

Диффеоморфизм $f : M^n \to M^n$, заданный на гладком замкнутом связном n-многообразии $(n \geq 1)$ M^n называется *диффеоморфизмом Морса-Смейла*, если

1) неблуждающее множество Ω_f состоит из конечного числа гиперболических орбит;

2) многообразия W^s_p, W^u_q пересекаются трансверсально для любых неблуждающих точек p, q.

Обозначим через $MS(M^n)$ множество таких диффеоморфизмов. В множестве периодических орбит любого диффеоморфизма $f \in MS(M^n)$ можно ввести отношение полного порядка, являющееся продолжением частичного порядка, введенное С. Смейлом [1], а именно, пусть $\mathcal{O}_i, \mathcal{O}_j$ — периодические орбиты диффеоморфизма Морса-Смейла f. Говорят, что орбиты $\mathcal{O}_i, \mathcal{O}_j$ *находятся в отношении* $\prec$ $(\mathcal{O}_i \prec \mathcal{O}_j)$, если

$$W^s_{\mathcal{O}_i} \cap W^u_{\mathcal{O}_j} \neq \emptyset.$$

Последовательность, состоящая из различных периодических орбит $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}_{i_0}$, $\mathcal{O}_{i_1}, ..., \mathcal{O}_{i_k} = \mathcal{O}_j (k \geqslant 1)$, такая что $\mathcal{O}_{i_0} \prec \mathcal{O}_{i_1} \prec \ldots \prec \mathcal{O}_{i_k}$ называется *цепью длины*

[1]**Морозов Андрей Игоревич**, стажер-исследователь Международной лаборатории динамических систем и приложений, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печёрская, д. 25/12), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3125-1825, morozov-lux@yandex.ru

[2]**Починка Ольга Витальевна**, заведующая Международной лаборатории динамических систем и приложений, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печёрская, д. 25/12), доктор физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-6587-5305, olga-pochinka@yandex.ru

k, соединяющей периодические орбиты $\mathcal{O}_i$ *и* $\mathcal{O}_j$. В силу конечности неблуждающего множества для любого диффеоморфизма $f \in MS(M^n)$ корректно определено число, равное длине максимальной седловой цепи, которое обозначается $beh(f)$.

2. Ориентируемость гетероклинического пересечения

Для сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла f, заданных на ориентируемой поверхности M^2, введем понятие ориентируемой гетероклиники следующим образом.

Пусть σ_i, σ_j — седловые точки диффеоморфизма f такие, что $W^s_{\sigma_i} \cap W^u_{\sigma_j} \neq \emptyset$. Для любой гетероклинической точки $x \in W^s_{\sigma_i} \cap W^u_{\sigma_j}$ определим упорядоченную пару векторов $(\vec{v}^u_x, \vec{v}^s_x)$, где:

- $\vec{v}^u_x$ — касательный вектор к неустойчивому многообразию точки σ_j в точке x;
- $\vec{v}^s_x$ — касательный вектор к устойчивому многообразию точки σ_i в точке x.

Гетероклиническое пересечение диффеоморфизма f называется *ориентируемым* (Рис. 2.1), если упорядоченные пары векторов $(\vec{v}^u_x, \vec{v}^s_x)$ задают одинаковую ориентацию несущей поверхности M^2. В противном случае гетероклиническое пересечение называется *неориентируемым* (Рис. 2.2).

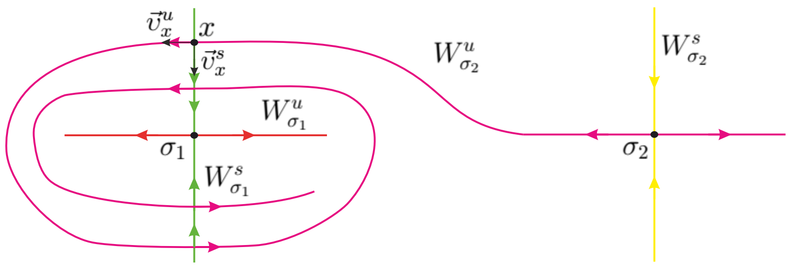

Рис. 2.1. Ориентируемое гетероклиническое пересечение

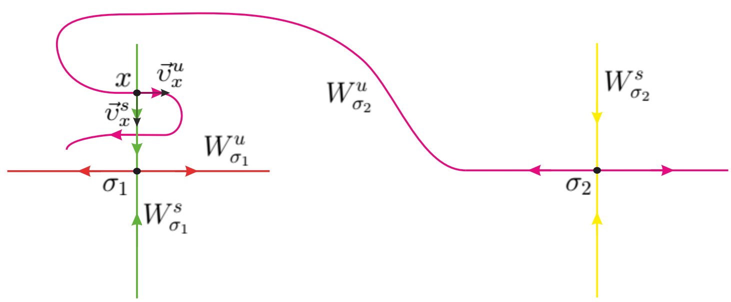

Рис. 2.2. Неориентируемое гетероклиническое пересечение

Обозначим через $G \subset MS(M^2)$ класс диффеоморфизмов с ориентируемым гетероклиническим пересечением.

Задача классификации рассматриваемых диффеоморфизмов в работе [2] сведена к проблеме различения ориентируемых графов с подстановками, описывающими геометрию гетероклинического пересечения. Однако такие графы в общем случае не допускают полиномиальных различающих алгоритмов. В настоящей статье предлагается новый подход к классификации данных каскадов.

Для построения эффективно различаемого графа, соответствующего диффеоморфизму $f \in G$, будем использовать метод факторизации, позволяющий представить динамику диффеоморфизма в виде некоторого набора топологических объектов — схемы диффеоморфизма.

3. Схема диффеоморфизма $f \in G$

Везде далее $f \in G$. В работах [3–4] показано, что $beh(f) = 1$, т. е. диффеоморфизм f имеет конечное число гетероклинических орбит. Поэтому множество Σ_f периодических орбит отображения f можно разбить на подмножества $\Sigma^i_f, i \in \{0,1,2,3\}$ следующим образом:

- Σ^0_f — множество всех стоковых орбит;
- Σ^1_f — множество седловых орбит, чьи неустойчивые многообразия не содержат гетероклинических точек;
- Σ^2_f — множество оставшихся седловых орбит системы;
- Σ^3_f — множество источниковых орбит.

Из свойств введенного порядка $\prec$ следует, что если орбиты $\mathcal{O}_i \in \Sigma^i_f$, $\mathcal{O}_j \in \Sigma^j_f$ связаны отношением $\mathcal{O}_i \prec \mathcal{O}_j$, то $i < j$.

Положим

$$\mathcal{A}_f = \Sigma^0_f \cup W^u_{\Sigma^1_f},\ \mathcal{R}_f = \Sigma^3_f \cup W^s_{\Sigma^2_f},\ V_f = M^2 \setminus (\mathcal{A}_f \cup \mathcal{R}_f).$$

В работе [5] показано, что множества $\mathcal{A}_f$, $\mathcal{R}_f$ являются аттрактором и репеллером системы соответственно. Положим

$$\hat{V}_f = V_f/f.$$

Согласно работе [6], каждая компонента связности пространства орбит $\hat{V}_f$ гомеоморфна двумерному тору. Обозначим через $p_f : V_f \to \hat{V}_f$ естественную проекцию, которая также является накрывающим отображением для пространства $\hat{V}_f$.

Обозначим через $\hat{V}_i, i \in \{1, 2, ..., n\}$ компоненты связности пространства орбит $\hat{V}_f$. Рассмотрим одну из них – $\hat{V}^i_f$. Положим $V_i = p_f^{-1}(\hat{V}_i)$ и обозначим через $p_i : V_i \to \hat{V}_i$ естественную проекцию. Накрытие p_i индуцирует нетривиальный гомоморфизм $\eta_i : \pi_1(\hat{V}_i) \to m_i\mathbb{Z}$, ставящий в соответствие элементу $[\hat{c}] \in \pi_1(\hat{V}_i)$ число μm_i такое, что любое поднятие кривой $\hat{c}$ соединяет точку $x \in V_i$ с точкой $f^{\mu m_i}(x)$.

Обозначим через b_i замкнутую не гомотопную нулю кривую на $\hat{V}_i$ такую, что $\eta_i([\hat{b}_i]) = 0$. Положим

$$\hat{\mathcal{V}}_f = \{(\hat{V}_i, [\hat{b}_i], m_i), i = 1, \dots, n\}.$$

Введем следующие обозначения:

- $\ell^s_\sigma = W^s_\sigma \setminus \sigma$, где $\sigma \in \Sigma^1_f$, аналогично $\ell^u_\sigma = W^u_\sigma \setminus \sigma$, где $\sigma \in \Sigma^2_f$;
- $L^s_f = \bigcup\limits_{\sigma\in\Sigma^1_f} \ell^s_\sigma$ и $L^u_f = \bigcup\limits_{\sigma\in\Sigma^2_f} \ell^u_\sigma$;
- $\mathcal{L}^s_f = \{\ell^s_\sigma,\ \sigma \in \Sigma^1_f\}$ и $\mathcal{L}^u_f = \{\ell^u_\sigma,\ \sigma \in \Sigma^2_f\}$;
- $\hat\ell^s_\sigma = p_f(W^s_\sigma \setminus \sigma)$ и $\hat\ell^u_\sigma = p_f(W^u_\sigma \setminus \sigma)$;
- $\hat L^s_f = \bigcup\limits_{\sigma\in\Sigma^1_f} \hat\ell^s_\sigma$ и $\hat L^u_f = \bigcup\limits_{\sigma\in\Sigma^2_f} \hat\ell^u_\sigma$;
- $\hat{\mathcal{L}}^s_f = \{\hat\ell^s_\sigma,\ \sigma \in \Sigma^1_f\}$ и $\hat{\mathcal{L}}^u_f = \{\hat\ell^u_\sigma,\ \sigma \in \Sigma^2_f\}$.

Обозначим через k_σ период седловой точки σ. Напомним, что *типом ориентации* седловой точки σ называется число ν_σ, равное $-1\,(+1)$, если диффеоморфизм $f^{k_\sigma}|_{W^u_\sigma}$ меняет (сохраняет) ориентацию. Из монографии [7] следует, что множество $\hat\ell^s_\sigma$ $(\hat\ell^u_\sigma)$ состоит из двух компонент (одной компоненты) связности, если седловая точка σ имеет положительный (отрицательный) тип ориентации. При этом каждая компонента связности l этого множества является гладкой замкнутой кривой, не гомотопной нулю на некотором торе $\hat V_i$ и такой, что $\eta_i([l]) = k_\sigma$, $\eta_i(l) = 2k_\sigma$.

Напомним определение схемы, введеное в работе [6].

Определение 3.1 *Набор $\mathcal{S}_f = (\hat{\mathcal{V}}_f, \hat{\mathcal{L}}^s_f, \hat{\mathcal{L}}^u_f)$ назовем схемой диффеоморфизма $f \in G$.*

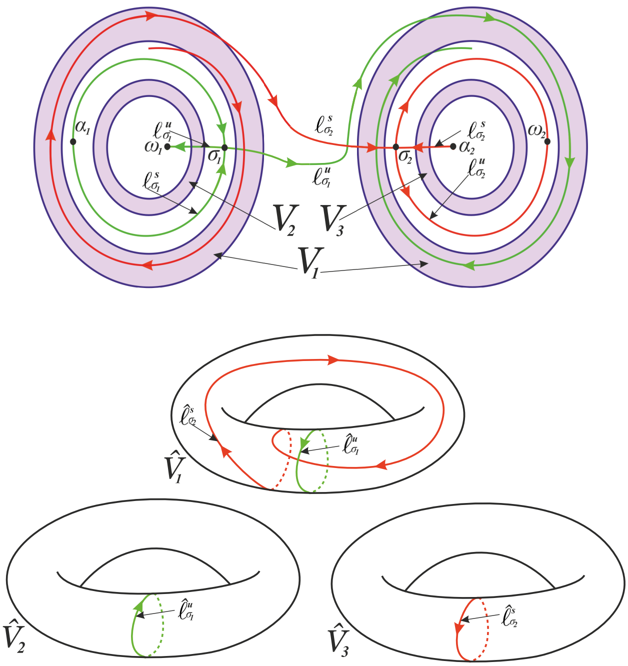

Рис. 3.3. Схема сохраняющего ориентацию диффеоморфизма Морса-Смейла на сфере $\mathbb{S}^2$

Покажем, что схему $\mathcal{S}_f$ можно привести к каноническому виду.

Для этого для каждого $i \in \{1, 2, ..., n\}$ положим $\hat{L}^s_i = \hat{V}_i \cap \hat{L}^s_f$ и $\hat{L}^u_i = \hat{V}_i \cap \hat{L}^u_f$. Обозначим через $\hat{\mathcal{L}}^s_i$ и $\hat{\mathcal{L}}^u_i$ множество компонент связности множеств $\hat{L}^s_i$ и $\hat{L}^u_i$, соответственно. Обозначим через r^s_i, r^u_i мощности этих множеств. Положим $\hat{\mathcal{V}}_i = (\hat{V}_i, m_i)$. Таким образом, схема любого диффеоморфизма $f \in G$ является коллекцией схем

$$\mathcal{S}_i = (\hat{\mathcal{V}}_i, \hat{\mathcal{L}}^s_i, \hat{\mathcal{L}}^u_i).$$

Рассмотрим накрытие тора $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$, связанное с представлением тора в виде факторгруппы по действию группы целочисленных сдвигов на $\mathbb{R}^2$. Положим

$$a = q(Ox),\ b = q(Oy).$$

Тогда кривые a, b являются образующими (параллель, меридиан) на торе с положительным направлением обхода, индуцированным положительным направлением координатных осей. Гомотопический класс $[c]$ любой простой замкнутой кривой $c \subset \mathbb{T}^2$ может быть описан как $[c] =< \mu, \nu >$, $\mu, \nu \in \mathbb{Z}$, где меридиан имеет класс $< 1, 0 >$, а параллель – $< 0, 1 >$. При этом числа μ, ν являются взаимно простыми, $(\mu, \nu) = 1$.

Пусть $\phi_i : \hat{V}_i \to \mathbb{T}^2$ – диффеоморфизм такой, что $\phi_{i*}([b_i]) = [b]$. Положим $\tilde{L}^s_i = \phi_i(\hat{L}^s_i)$, $\tilde{L}^u_i = \phi_i(\hat{L}^u_i)$. Поскольку кривые в множестве $\tilde{L}^s_i$ $(\tilde{L}^u_i)$ попарно не пересекаются, то для любой кривой $\hat{l}^s_i \subset \hat{L}^s_i$ $(\hat{l}^s_i \subset \hat{L}^s_i)$ кривая $\tilde{l}^s_i = \phi_i(\hat{l}^s_i)$ $(\tilde{l}^u_i = \phi_i(\hat{l}^u_i))$ имеет гомотопический тип $< \mu^s_i, \nu^s_i >$ $(< \mu^u_i, \nu^u_i >)$, где $\mu^s_i = \eta_i(\hat{l}^s_i)/m_i$ $(\mu^u_i = \eta_i(\hat{l}^u_i)/m_i)$ и числа μ^s_i, ν^s_i (μ^u_i, ν^u_i) являются взаимно простыми.

Таким образом, число μ^s_i (μ^u_i) определено однозначно диффеоморфизмом f и не зависит от выбора сепаратрисы и диффеоморфизма ϕ_i, тогда как число ν^s_i (ν^u_i) определено только с точностью до слагаемого кратного μ^s_i (μ^u_i), как показывает следующая лемма, доказанная в [8].

Лемма 3.1 *Пусть $c \subset \mathbb{T}^2$ не гомотопная нулю простая замкнутая кривая на торе такая, что $[c] =< \mu, \nu >$, и $\varphi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ – гомеоморфизм такой, что $\phi_*([b]) = [b]$. Тогда $\varphi(c)$ имеет гомотопический тип $< \mu, \tilde{\nu} >$, где $\tilde{\nu} \equiv \nu \pmod{\mu}$. Обратно, для любого $\tilde{\nu} \equiv \nu \pmod{\mu}$ существует единственный (с точностью до изотопии) гомеоморфизм $\varphi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ такой, что $\varphi(c)$ имеет гомотопический тип $< \mu, \nu >$.*

Таким образом, существует диффеоморфизм $\phi_i : \hat{V}_i \to \mathbb{T}^2$ такой, что $\phi_{i*}([b_i]) = [b]$, и кривая $\tilde{l}^s_i$ имеет гомотопический тип $< \mu^s_i, \nu^s_i >$, где $(\mu^s_i, \nu^s_i) = 1$ и $0 \le \nu^s_i < \mu^s_i$. Такой диффеоморфизм однозначно определяет гомотопический тип $< \mu^u_i, \nu^u_i >$ кривой $\tilde{l}^u_i$. При этом поскольку множества $\hat{L}^s_i, \hat{L}^u_i$ пересекаются ориентируемым образом, то $\dfrac{\nu^s_i}{\mu^s_i} \neq \dfrac{\nu^u_i}{\mu^u_i}$.

Везде далее используем однозначно определенные для схемы $\mathcal{S}_i$ пары взаимно простых целых чисел μ^s_i, ν^s_i; μ^u_i, ν^u_i такие, что

$$0 \le \nu^s_i < \mu^s_i; \quad \mu^u_i > 0; \quad \frac{\nu^s_i}{\mu^s_i} \neq \frac{\nu^u_i}{\mu^u_i}.$$

Для $r \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{Z}$ зададим на плоскости $\mathbb{R}^2$ семейство прямых $\Gamma_{r,\mu,\nu}$ следующим образом:

$$\Gamma_{r,\mu,\nu} = \left\{ (x, y) : y(x) = \left(\frac{\nu}{\mu} x + \frac{k}{\mu r} \right),\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Положим $\hat{\Gamma}_{r,\mu,\nu} = q(\Gamma_{r,\mu,\nu})$.

Используя результаты работ [8–9], докажем следующий факт.

Л е м м а 3.2 *Существует диффеоморфизм $\phi_i : \hat{V}_i \to \mathbb{T}^2$ такой, что $\phi_{i*}([b_i]) = [b]$ и $\phi_i(\hat{L}^s_i) = \hat{\Gamma}_{r^s_i,\mu^s_i,\nu^s_i}$, $\phi_i(\hat{L}^u_i) = \hat{\Gamma}_{r^u_i,\mu^u_i,\nu^u_i}$.*

Обозначим через Φ отображение, составленное из диффеоморфизмов $\phi_1, \dots, \phi_n$. Положим

$$\mathbf{V}_i = (\mathbb{T}^2, [b], m_i),\ \mathbf{S}_i = (\mathbf{V}_i, \hat{\Gamma}_{r^s_i,\mu^s_i,\nu^s_i}, \hat{\Gamma}_{r^u_i,\mu^u_i,\nu^u_i}).$$

Назовем коллекцию

$$\mathbf{S}_f = (\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, ..., \mathbf{S}_n)$$

стандартной схемой диффеомофризма f класса G.

Две окружности в стандартной схеме, являющиеся образом относительно Φ элемента множества $\mathcal{L}^s_f \cup \mathcal{L}^u_f$, назовем *парными*.

4. Граф диффеоморфизма $f \in G$

Конечным графом называется упорядоченная пара (B, E), для которой выполнены следующие условия: B – непустое конечное множество *вершин*; E – множество пар вершин, называемых *ребрами*.

Построим граф T_f, соответствующий диффеоморфизму f класса G, следующим образом (см. Рис. 4.4).

I. Геометрическая составляющая графа T_f.

1. Если множество $\hat{\Gamma}_{r^s_i,\mu^s_i,\nu^s_i}$ не пусто, то на плоскости $\mathbb{R}^2$ для каждой компоненты $\mathbf{S}_i$ стандартной схемы $\mathbf{S}_f$ выберем окружность

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x - 5(i-1))^2 + y^2 = 1\}$$

и для $j \in \{1, ..., r^s_i\}$ разместим на ней вершины графа $\alpha^s_{i,j}$, взаимно однозначно соответствующие окружностям множества $\hat{\Gamma}_{r^s_i,\mu^s_i,\nu^s_i}$ в порядке, соответствующем порядку пересечения этих окружностей с параллелью $\hat{b}$ в положительном направлении обхода. Каждую пару вершин $\alpha^s_{i,j}, \alpha^s_{i,j+1}$ ($\alpha^s_{i,r^s_i+1} = \alpha^s_{i,1}$) соединим ребром $\rho^s_{i,j}$. Положим

$$c^s_i = \{\alpha^s_{i,1}\rho^s_{i,1}, \alpha^s_{i,2}\rho^s_{i,2} \dots, \rho^s_{i,r^s_i}, \alpha^s_{i,1}\},\ C^s_f = \{c^s_i | i \in \{1, ..., n\}\},$$

$$A^s_f = \{\alpha^s_{i,j} | i \in \{1, ..., n\}, j \in \{1, ..., r^s_i\}\},\ R^s_f = \{\rho^s_{i,j} | i \in \{1, ..., n\}, j \in \{1, ..., r^s_i\}\}.$$

Окрасим ребра множества R^s_f в цвет s.

2. Если множество $\hat{\Gamma}_{r^u_i,\mu^u_i,\nu^u_i}$ не пусто, то аналогичным образом разместим вершины графа $\alpha^u_{i,j}, j \in \{1, ..., r^u_i\}$ на окружности $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x - 5(i-1))^2 + y^2 = 4\}$ и соединим их ребрами $\rho^u_{i,j}$. Положим

$$c^u_i = \{\alpha^u_{i,1}\rho^u_{i,1}, \alpha^u_{i,2}\rho^u_{i,2} \dots, \rho^u_{i,r^u_i}, \alpha^u_{i,1}\},\ C^u_f = \{c^u_i | i \in \{1, ..., n\}\},$$

$$A^u_f = \{\alpha^u_{i,j} | i \in \{1, ..., n\}, j \in \{1, ..., r^u_i\}\},\ R^u_f = \{\rho^u_{i,j} | i \in \{1, ..., n\}, j \in \{1, ..., r^u_i\}\}.$$

Окрасим ребра множества R^u_f в цвет u.

3. Если множество $\hat{\Gamma}_{r^u_i,\mu^u_i,\nu^u_i}$ не пусто и множество $\hat{\Gamma}_{r^s_i,\mu^s_i,\nu^s_i}$ не пусто, то разместим вершину графа δ_i на окружности $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x - 5(i-1))^2 + y^2 = 3\}$ и соединим ее ребром с каждой вершиной циклов c^s_i и c^u_i. Обозначим через P_f множество таких ребер. Положим

$$D_f = \{\delta_i,\ i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

4. Вершины $v, w \in R^s_f$ (R^u_f) соединим ребром $q_{v,w}$, если соответствующие им окружности на торах являются парными. Обозначим через Q_f множество таких ребер.

Таким образом, $B_f = A^s_f \cup A^u_f \cup D_f$ — множество вершин графа T_f и $E_f = R^s_f \cup R^u_f \cup$ $\cup P_f \cup Q_f$ — множество его ребер.

II. Оснащение графа T_f.

1. Оснастим каждый цикл $c = c^s_i$ весом $M_c = (m_c, \mu_c, \nu_c) = (m_i, \mu^s_i, \nu^s_i)$. Аналогичным образом оснастим весом M_c каждый цикл $c = c^u_i$.

2. Если вершины v^s, w^s, инцидентные ребру $q^s \in Q_f$, принадлежат циклу c^s_i и $\mu^s_i m_i > 1$, то оснастим вершину v^s весом $M_{v^s} = (k_{v^s}, l_{v^s})$, где $k_{v^s} \in \{0, \ldots, m_i - 1\}$, $l_{v^s} \in$ $\in \{1, \ldots, \mu^s_i\}$, по следующему правилу: для устойивой сепаратрисы ℓ_{w^s} седла σ, принадлежащей компоненте связности W множества V_i, вторая устойчивая сепаратриса ℓ_{v^s} седла σ принадлежит компоненте $f^{k_{v^s}}(W)$ множества V_i и лежит в компоненте связности множества $f^{k_{v^s}}(W) \setminus (\bigcup\limits_{j=0}^{\mu^s_i - 1} f^{k_{v^s} + j m_i}(\ell_{w^s}))$ с номером l_{v^s}, считая от сепаратрисы $f^{k_{v^s}}(\ell_{w^s})$ в положительном направлении обхода вдоль кривой $p^{-1}_i(\hat{b}_i)$. Аналогичным образом оснастим весом $M_{w^s} = (k_{w^s}, l_{w^s})$ вершину w^s. Оснастим аналогичными весами вершины v^u, w^u, инцидентные ребру $q^u \in Q_f$ и принадлежащие циклу c^u_i, для которого $\mu^u_i m_i > 1$.

3. Если вершины v^s, w^s, инцидентные ребру $q^s \in Q_f$, принадлежат различным циклам c^s_i, $c^s_{\bar{i}}$ и $\mu^s_i m_i > 1$, то оснастим ребро q^s весом $m_{q^s} \in \mathbb{N}$ по следующему правилу: удалим из аттрактора неусточивое многообразие орбиты седловой точки σ, соответствующее вершинам v^s, w^s. Получим новый аттрактор $\mathcal{A}_f$, его бассейн W_f и пространство орбит $\hat{W}_f$. Тогда проекция неустойчивого многообразия точки σ лежит в одной компоненте связности W, период которой равен m_{q^s}. Положим $\mu_{q^s} = \dfrac{\mu^s_i m_i}{m_{q^s}}$. Далее, аналогично п. 2, оснастим вершины v^s, w^s весами $M_{v^s} = (k_{v^s}, l_{v^s})$, $M_{w^s} = (k_{w^s}, l_{w^s})$, где $k_{v^s}, k_{w^s} \in \{0, \ldots, m_{q^s} - 1\}$, $l_{v^s}, l_{w^s} \in \{1, \ldots, \mu_{q^s}\}$. Оснастим аналогичными весами вершины v^u, w^u, инцидентные ребру $q^u \in Q_f$ и принадлежащие разным циклам c^u_i, $c^u_{\bar{i}}$, для которых $\mu^u_i m_i > 1$.

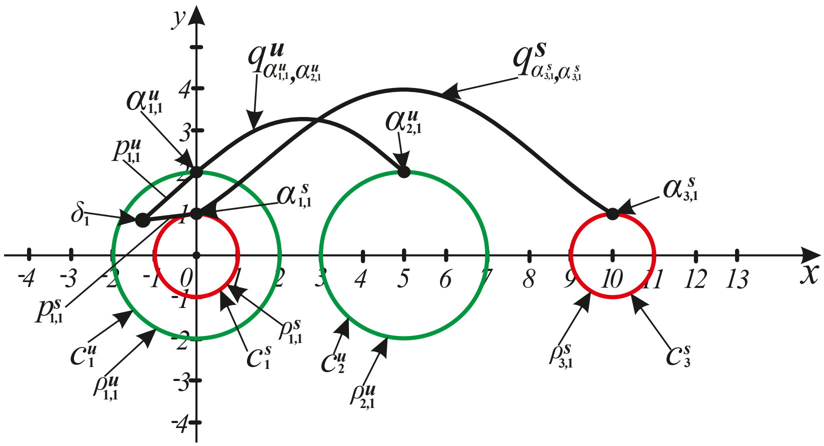

Рис. 4.4. Пример графа T_f для диффеоморфизма $f \in G$, фазовый портрет которого изображен на Рис. 3.3; здесь $M_{c^s_1} = (1, 1, 1)$, $M_{c^u_1} = (1, 1, 0)$, $M_{c^u_2} = (1, 1, 0)$, $M_{c^s_3} = (1, 1, 0)$

Определение 4.1 *Графы T_f, $T_{f'}$ $f, f' \in G$ назовем изоморфными, если существует изоморфизм ξ, переводящий вершины и ребра графа T_f в вершины и ребра графа $T_{f'}$ с сохранением цветности и весов.*

Теорема 4.1 *Диффеоморфизмы f, f' из класса G топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их графы изоморфны.*

Благодарности. Исследование поддержано Международной Лабораторией динамических систем и приложений, НИУ ВШЭ, грант правительства РФ, договор 075-15-2019-1931. Работа также поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

Список литературы

1. Smale S. Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 6. No. 73. pp. 747–817.

2. Grines V. Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms with finite set of heteroclinic trajectories on surfaces // Math. Notes. 1993. Vol. 54, No. 3. pp. 881–889.

3. Безденежных А.Н. Топологическая классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла с ориентируемым гетероклиническим множеством на двумерных многообразиях. : дисс.... канд. физ.-мат. наук. Горький: Горьковский гос. ун. им. Н. И. Лобачевского, 1985. 124 с.

4. Pochinka O., Morozov A. Morse-Smale surfaced diffeomorphisms with orientable heteroclinic. // Journal of Dynamical and Control Systems. 2020.

5. Гринес В., Медведев В., Починка О., Жужома Е. Глобальный аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса-Смейла // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 2010. Т. 271, № 1. С. 103–124.

6. Grines V., Pochinka O., Strien S. Van. On 2-diffeomorphisms with one-dimensional basic sets and a finite number of moduli // Moscow Mathematical Journal. 2016. Vol. 16. No. 4. pp. 727–749.

7. Grines V., Medvedev T., Pochinka O. Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds. Switzerland : Springer, 2016. 295 p.

8. Rolfsen D. Knots and links. Math. Lecture Series 7., Vancouver: University of British Columbia, 1990.

9. Hirsch M.W. Differential topology. Switzerland : Springer, 1976. 222 p.

Поступила 25.12.2019

MSC2020 05C62, 14J80, 37D15

Combinatorial invariant of Morse-Smale diffeomorphisms on surfaces with orientable heteroclinic

© **A. I. Morozov**[1], **O. V. Pochinka**[2]

Abstract. In this paper we consider class of orientation-preserving Morse-Smale diffeomorphisms f, given on orientable surface M^2. In their articles A.A. Bezdenezhnich and V.Z. Grines has shown, that such diffeomorfisms contain finite number of heteroclinic orbits. Moreover, the problem of classification for such diffeomorphisms is reduced to the problem of distinguishing orientable graphs with substitutions describing the geometry of heteroclinic intersections. Howewer, these graphs generally do not allow polynomial distinguishing algorithms. In this paper, we propose a new approach to the classification of such cascades. To this end, each considered diffeomorphism f is associated with a graph whose embeddablility in the ambient surface makes it possible to construct an effective algoritm for distinguishing such graphs.

Key Words: Morse-Smale diffeomorphism, orientation-preserving diffeomorphism, topological invariant of diffeomorphism, surface diffeomorphism, orientable heteroclinic

References

1. S. Smale, "Differentiable dynamical systems", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **6**:73 (1967), 747–817.
2. V. Grines, "Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms with finite set of heteroclinic trajectories on surfaces.", *Math. Notes.*, **54**:3 (1993), 881–889.
3. A.N. Bezdenezhnich, *Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms with orientable heteroclinical sets on 2-manifolds : Dissertation.*, Lobachevsky University., Gorkiy, 1985, 124 p.
4. O. Pochinka, A. Morozov, "Morse-Smale surfaced diffeomorphisms with orientable heteroclinic.", *Journal of Dynamical and Control Systems,*, 2020.
5. V. Grines, V. Medvedev, O. Pochinka, E. Zhuzhoma, "Global attractor and repeller of Morse-Smale diffeomorphisms", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics,*, **271**:1 (2010), 103–124 (In Russ.).
6. V. Grines, O. Pochinka,S. Van Strien, "On 2-diffeomorphisms with one-dimensional basic sets and a finite number of moduli", *Moscow Mathematical Journal.*, **16**:4 (2016), 727–749.
7. V. Grines, T. Medvedev, O. Pochinka, *Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds.*, Springer, Switzerland, 2016, 295 p.

[1]**Andrey I. Morozov**, Research Trainee, International Laboratory of Dynamical Systems and Applications, Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhny Novgorod, 603155, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3125-1825, morozov-lux@yandex.ru

[2]**Olga V. Pochinka**, Laboratory Head, International Laboratory of Dynamical Systems and Applications, Higher School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhny Novgorod, 603155, Russia), Dr. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-6587-5305, olga-pochinka@yandex.ru

8. D. Rolfsen, *Knots and links. Mathematics Lecture Series 7.*, University of British Columbia, Vancouver, 1990.

9. M.W. Hirsch,, *Differential topology*, Springer, Switzerland, 1976.

Submitted 25.12.2019