DOI 10.15507/2079-6900.22.202001.38-47

УДК 519.17

Полная классификация сложности задачи о вершинной 3-раскраске для четверок порожденных 5-вершинных запретов

© **Д. С. Малышев**[1]

Аннотация. Задача о вершинной 3-раскраске для заданного графа состоит в том, чтобы проверить, возможно ли множество его вершин разбить на три подмножества попарно несмежных вершин. Наследственный класс графов — множество обыкновенных графов, замкнутое относительно изоморфизма и удаления вершин. Любой такой класс может быть задан множеством своих запрещенных порожденных подграфов. Известен сложностной статус задачи о вершинной 3-раскраске для всех четверок 5-вершинных запрещенных порожденных подграфов, кроме трех из них. Более того, известно, что два из этих трех случаев полиномиально эквивалентны и полиномиально сводятся к третьему. В настоящей работе доказывается, что вычислительная сложность рассматриваемой задачи во всех трех упомянутых классах является полиномиальной. Данный результат вносит вклад в алгоритмическую теорию графов.

Ключевые слова: задача о вершинной 3-раскраске, наследственный класс, полиномиальный алгоритм

1. Введение

В работе рассматриваются только *обыкновенные графы*, т. е. непомеченные, неориентированные графы без петель и кратных ребер. Поэтому полный термин «обыкновенный граф» будет кратко называться «граф».

Правильной вершинной k-раскраской (или просто *k-раскраской*) графа G называется произвольное отображение $c: \ V(G) \longrightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$ такое, что $c(v_1) \neq c(v_2)$ для любых смежных вершин $v_1, v_2 \in V(G)$. Если граф G имеет k-раскраску, то он называется *k-раскрашиваемым. Задача о вершинной k-раскраске* (или, кратко, *задача k-ВР*) для заданного графа G состоит в том, чтобы определить, имеет ли G правильную вершинную k-раскраску. При любом $k \geq 3$ задача k-ВР является классической NP-полной задачей на графах [1].

Класс графов называется *наследственным*, если он замкнут относительно изоморфизма и удаления вершин. Хорошо известно, что любой наследственный класс графов $\mathcal{X}$ может быть задан множеством своих запрещенных порожденных подграфов $\mathcal{Y}$: $\mathcal{X} = Free(\mathcal{Y})$.

Для задачи k-ВР сложностной статус остается открытым даже для некоторых классов, определяемых одним запрещенным порожденным фрагментом. Так, алгоритмическая сложность задачи 3-ВР известна для всех классов вида $Free(\{H\})$, где $|V(H)| \leq 6$

[1]**Малышев Дмитрий Сергеевич**, профессор, кафедра прикладной математики и информатики, ФГАОУ ВО Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), профессор, кафедра алгебры, геометрии и дискретной математики, ФГАОУ ВО Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23); доктор физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-7529-8233, dsmalyshev@rambler.ru

[2]. Подобный результат был получен для задачи 4-ВР и всех классов вида $Free(\{H\})$, где $|V(H)| \leq 5$ [3]. Для каждого фиксированного k задача k-ВР разрешима за полиномиальное время в классе $Free(\{P_5\})$ [4]. Задача 3-ВР полиномиально разрешима в классе $Free(\{P_7\})$ [5]. Задача 4-ВР полиномиально разрешима в классе $Free(\{P_6\})$ [6]. Для каждого фиксированного $k \geq 5$ задача k-ВР является NP-полной в классе $Free(\{P_6\})$ [7]. Задача 4-ВР является NP-полной в классе $Free(\{P_7\})$ [7]. Вычислительный статус задачи k-ВР является открытым для класса $Free(\{P_8\})$ и $k = 3$, а также для класса $Free(\{P_7\})$ и $k = 4$.

В настоящей работе рассматривается задача 3-ВР. В работе [8] для задачи 3-ВР получена полная сложностная дихотомия в семействе наследственных классов, определяемых парой запрещенных порожденных подграфов, каждый из которых имеет не более 5 вершин. В работе [9] был получен аналогичный результат для всех троек запретов, каждый из которых имеет не более 5 вершин. В статье [10] рассматривались четверки запрещенных порожденных подграфов, каждый из которых имеет не более пяти вершин. В той же работе для всех таких наследственных классов, кроме трех, устанавливается вычислительный статус задачи 3-ВР; для двух из трех оставшихся случаев была доказана их полиномиальная эквивалентность и полиномиальная сводимость к третьему. В данной работе завершается полная классификация сложности задачи 3-ВР для четверок 5-вершинных порожденных запретов установлением полиномиальной разрешимости задачи для трех ранее открытых случаев.

2. Некоторые обозначения, определения и факты

Для графа G через $N_G(x)$ обозначается окрестность вершины x, а через $\deg_G(x)$ – ее степень. Через $\Delta(G)$ обозначается максимальная из степеней вершин G.

Через P_n, C_n, K_n обозначается простой путь, простой цикл и полный граф на n вершинах соответственно. Через F_k $(k \geq 3)$ обозначается граф, получаемый добавлением вершины v к простому пути $(v_1, \ldots, v_k)$ и ребер $vv_1, vv_2, \ldots, vv_k$. *Колесом* W_k $(k \geq 3)$ называется граф, получаемый добавлением вершины v к простому циклу $(v_1, \ldots, v_k)$ и ребер $vv_1, vv_2, \ldots, vv_k$.

Пусть G — граф и $V' \subseteq V(G)$. Тогда $G[V']$ — подграф G, порожденный подмножеством V', а $G \setminus V'$ — результат удаления из G всех элементов V' (вместе со всеми инцидентными им ребрами). Через $G_1 + G_2$ обозначается дизъюнктное объединение графов G_1 и G_2 с непересекающимися множествами вершин.

Графы $bull, cricket, butterfly, crown$ изображены на Рис. 2.1.

Графы $kite, dart, banner, house, sun$ изображены на Рис. 2.2.

В работах [8–10] были рассмотрены следующие 9 наследственных классов и было доказано, что задача 3-ВР является NP-полной в любом наследственном классе с конечным множеством запретов, включающим хотя бы один из данных 9 классов:

- $\mathcal{X}_1^*$ — множество всех лесов;
- $\mathcal{X}_2^*$ — множество реберных графов лесов со степенями всех вершин не более 3;
- $\mathcal{X}_3^*$ — множество графов, в которых любые 5 вершин порождают подграф из

$$\mathcal{X}_1^* \cup \mathcal{X}_2^* \cup \{cricket, kite, F_3 + K_1\};$$

- $\mathcal{X}_4^*$ — множество графов, в которых любые 5 вершин порождают подграф из

$$\mathcal{X}_1^* \cup \mathcal{X}_2^* \cup \{kite, F_3 + K_1, butterfly, crown\};$$

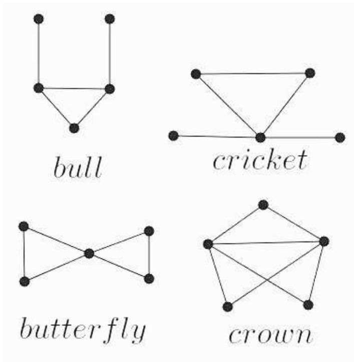

Рис. 2.1. Графы bull, cricket, butterfly, crown

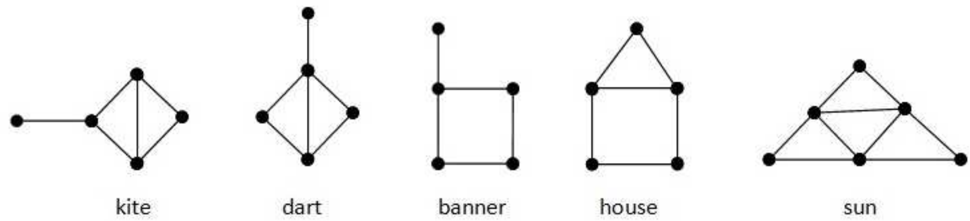

Рис. 2.2. Графы kite, dart, banner, house, sun

- $\mathcal{X}_5^*$ — множество графов, в которых любые 5 вершин порождают подграф из
$$\mathcal{X}_1^* \cup \mathcal{X}_2^* \cup \{kite, F_3 + K_1, house, C_4 + K_1, F_4, W_4, dart, crown\};$$
- $\mathcal{X}_6^*$ — множество графов, в которых любые 5 вершин порождают подграф из
$$\mathcal{X}_1^* \cup \mathcal{X}_2^* \cup \{cricket, house, banner, C_4 + K_1, C_5\};$$
- $\mathcal{X}_7^*$ — множество графов, в которых любые 5 вершин порождают подграф из
$$\mathcal{X}_1^* \cup \mathcal{X}_2^* \cup \{cricket, C_5\};$$
- $\mathcal{X}_8^*$ — множество графов, в которых любые 5 вершин порождают подграф из
$$\mathcal{X}_1^* \cup \mathcal{X}_2^* \cup \{cricket, banner, house, C_4 + K_1\};$$
- $\mathcal{X}_9^*$ — множество графов, в которых любые 5 вершин порождают подграф из
$$\mathcal{X}_1^* \cup \mathcal{X}_2^* \cup \{kite, F_3 + K_1, dart, C_4 + K_1, banner, W_4, C_5\}.$$

В работе [10] была установлена алгоритмическая сложность задачи 3-ВР для всех наследственных классов, определяемых четверкой 5-вершинных запрещенных порожденных фрагментов, кроме классов:

1) $\mathcal{X}'_1 = Free(\{K_{1,4}, butterfly, cricket, C_4\})$;
2) $\mathcal{X}'_2 = Free(\{K_{1,4}, butterfly, cricket, C_4 + K_1\})$;
3) $\mathcal{X}'_3 = Free(\{K_{1,4}, butterfly, cricket, W_4\})$.
Справедливо следующее утверждение.

Л е м м а 2.1 *Пусть $\mathcal{X} \notin \{\mathcal{X}'_1, \mathcal{X}'_2, \mathcal{X}'_3\}$ — наследственный класс, определяемый четверкой запрещенных 5-вершинных порожденных подграфов. Тогда задача 3-ВР является полиномиально разрешимой в $\mathcal{X}$, если $\mathcal{X} \not\supseteq \mathcal{X}^*_i$ для любого $1 \leq i \leq 9$, а иначе она является NP-полной.*

В работе [10] было доказано, что задача 3-ВР в $\mathcal{X}'_1$ полиномиально эквивалентна задаче 3-ВР в $\mathcal{X}'_2$ и полиномиально сводится к задаче 3-ВР в $\mathcal{X}'_3$.

3. Доказательство существования полиномиального алгоритма

В работе [10] было доказано (см. Лемму 7), что задача 3-ВР в $\mathcal{X}'_3$ полиномиально сводится к той же задаче в $\mathcal{X}'_3 \cap Free(\{crown\})$. Поскольку K_4 и W_5 не являются 3-раскрашиваемыми и их принадлежность графу в качестве порожденного подграфа может быть проверена за полиномиальное время, то задача 3-ВР в $\mathcal{X}'_3 \cap Free(\{crown\})$ полиномиально сводится к той же задаче в $\mathcal{X}^* = \mathcal{X}'_3 \cap Free(\{crown, K_4, W_5\})$.

Докажем полиномиальную разрешимость задачи 3-ВР в $\mathcal{X}^*$. Из Леммы 5 работы [10] следует справедливость следующего факта.

Л е м м а 3.1 *Если $G \in \mathcal{X}^*$, то $\Delta(G) \leq 4$. Более того, если $\deg_G(x) = 4$, то $G[N_G(x)] \in \{P_3 + K_1, P_4\}$.*

Напомним, что *2-деревом* называется любой граф, который может быть получен из K_3 путем добавления новой вершины к полученному ранее графу и соединения данной вершины ребрами с двумя смежными вершинами исходного графа. Нетрудно видеть, что любое 2-дерево имеет единственную 3-раскраску, причем она может быть найдена за линейное время. Пусть H — 2-дерево из $\mathcal{X}^*$. Тогда $\Delta(H) \leq 4$ по Лемме 3.1.

С использованием этого факта индукцией по количеству вершин нетрудно доказать каждое из следующих трех утверждений. Если $H \notin \{K_3, F_3, F_4, sun\}$, то все его вершины, кроме некоторых четырех, имеют степень 4. Более того, две из вершин-исключений имеют в H степень 2, а другие две – степень 3, причем множество вершин-исключений порождает в H либо $K_2 + K_2$, либо P_4. Раскраска H в 3 цвета определяется единственным образом, причем в ней все 3 цвета встречаются среди цветов вершин-исключений. В любой 3-раскраске F_3 его вершины степени 2 получают одинаковые цвета. В любой 3-раскраске F_4 вершины его пути (v_1, v_2, v_3, v_4) должны быть окрашены в два цвета: v_1 и v_3 получают один цвет, а v_2 и v_4 — другой. В любой 3-раскраске K_3 и sun их вершины степени 2 получают попарно различные цвета.

Пусть $G \in \mathcal{X}^*$. Предположим, что степень каждой вершины G не менее 3. Максимальный по включению подграф G, который является 2-деревом, назовем *2_G-деревом*. Из Леммы 3.1 следует, что любые два 2_G-дерева не пересекаются по вершинам. Из нее же следует, что 2_G-деревья покрывают все вершины степени 4 в G и что каждая вершина, имеющая в 2_G-дереве степень 2 (соответственно, степень 3), имеет в G степень, равную 3 (соответственно, 3 или 4). Следовательно, у каждой вершины любой 2_G-гусеницы имеется не более одного соседа вне ее. Таким образом, любая вершина, либо имеющая не менее двух соседей в некотором 2_G-дереве и не принадлежащая ему, либо имеющая соседей в различных 2_G-гусеницах, должна обладать степенью 3.

Пусть $H \notin \{K_3, F_4, sun\}$ — некоторое 2_G-дерево и x_1, x_2, y_1, y_2 — все вершины, имеющие в H степени 2 или 3, причем в любой 3-раскраске H вершины x_1 и x_2 принимают одинаковые цвета. Предположим, что $x_1x_2 \notin E(G)$.

Л е м м а 3.2 *Заданная 3-раскраска $G \setminus V(H)$ продолжается на весь G тогда и только тогда, когда в ней каждая из троек*

$$(N_G(x_1) \setminus V(H), N_G(y_1) \setminus V(H), N_G(y_2) \setminus V(H)),$$

$$(N_G(y_1) \setminus V(H), N_G(y_2) \setminus V(H), N_G(x_2) \setminus V(H))$$

не окрашена в один цвет.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем считать, что

$$N_G(x_1) \setminus V(H) = \{a\}, N_G(y_1) \setminus V(H) = \{b\}, N_G(y_2) \setminus V(H) = \{c\}, N_G(x_2) \setminus V(H) = \{d\},$$

т. к. остальные случаи рассматриваются аналогично. Поскольку 3-раскраска H определяется единственным образом, то можно считать, что $H = F_3$. Рассмотрим некоторую 3-раскраску $G \setminus V(H)$, в которой цвета вершин b и c совпадают. Тогда вершинам x_1 и x_2 может быть назначен только цвет вершин b и c. Значит, продолжение 3-раскраски $G \setminus V(H)$ существует тогда и только тогда, когда каждая из вершин a и d принимает цвет, отличный от цвета вершин b и c. Предположим, что вершины b и c имеют цвета 1 и 2, соответственно, в некоторой 3-раскраске $G \setminus V(H)$. Если среди цветов вершин a и d не встречается 1 или 2, то окрасим вершины x_1 и x_2 либо в цвет 1, либо в цвет 2. Соответственно, вершины y_1 и y_2 получат цвета 2 и 1 или 1 и 2. Если же множество цветов вершин b и c совпадает с $\{1, 2\}$, то окрасим вершины x_1 и x_2 в цвет 3, вершину y_1 – в цвет 2, а вершину y_2 – в цвет 1.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Л е м м а 3.3 *Задача 3-ВР полиномиально разрешима для графов из $\mathcal{X}^*$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — произвольный граф из класса $\mathcal{X}^*$. Можно считать, что G является связным и не содержит вершин степени ≤ 2, т. к. задача 3-ВР полиномиально сводится к таким графам. Удалим из G все вершины степени 3, окрестности которых порождают пустой подграф. Удалим также все такие ребра ab, что $G[N_G(a)] = K_2 + K_1$, и такие внетреугольные ребра ab, что $G[N_G(a)] = P_3 + K_1$. Нетрудно видеть, что в результате получится дизъюнктное объединение всевозможных 2_G-деревьев, поэтому множество всех 2_G-деревьев может быть найдено за полиномиальное время. Если в G имеется ребро, соединяющее две одноцветные вершины некоторого 2_G-дерева, то G не является 3-раскрашиваемым. Утверждение этой леммы будем доказывать редукцией (сохраняющей 3-раскрашиваемость) к графам из $\mathcal{X}^*$, либо содержащим ребро между одноцветными вершинами их подграфов, являющихся 2-деревьями, либо имеющим максимальную степень вершин 3. Первые не являются 3-раскрашиваемыми, а вторые, согласно известной теореме Брукса [11], являются таковыми.

Назовем вершину $v \in V(G)$ *избыточной*, если она смежна с двумя вершинами некоторого 2_G-дерева H, которые имеют одинаковые цвета в 3-раскраске H, и не принадлежит ему. Ясно, что $deg_G(v) = 3$. В любой 3-раскраске G имеется не более 2 цветов в $N_G(v)$, и поэтому G является 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда таковым является $G \setminus \{v\}$. Множество всех избыточных вершин G вычисляется за полиномиальное время, поэтому далее будем считать, что G не содержит избыточных вершин.

Пусть $H \notin \{K_3, F_4, sun\}$ — 2_G-дерево и x_1, x_2, y_1, y_2 — все вершины H степени 2 или 3, причем в любой 3-раскраске H вершины x_1 и x_2 окрашены в одинаковый цвет. Предположим, что x_1 и x_2 не смежны, т. к. иначе G не является 3-раскрашиваемым. Если множество $(N_G(y_1) \cup N_G(y_2)) \setminus V(H)$ либо не содержит элементов, либо содержит 1 элемент, смежный только с одной из вершин y_1 и y_2, либо содержит два смежных элемента, то по Лемме 3.2 граф G будет 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда таковым является $G \setminus V(H)$. Будем считать, что $N_G(y_1) \setminus V(H) = \{b\}, N_G(y_2) \setminus V(H) = \{c\}$ и что b и c не смежны. Если $b = c$, то $\deg_G(b) = 3$. Удалим из G все вершины множества $V(H) \setminus \{x_1, x_2, y_1, y_2\}$, а также все ребра между вершинами x_1, x_2, y_1, y_2 и добавим ребра $x_1y_1, x_1y_2, y_1y_2, x_2y_1, x_2y_2$. Нетрудно видеть, что получившийся граф G^* принадлежит множеству $\mathcal{X}'_3$ и что 3-раскрашиваемость G^* эквивалентна 3-раскрашиваемости G. В Лемме 7 из работы [10] было доказано, что в произвольном графе $\tilde{G} \in \mathcal{X}'_3$ стягивание любого его порожденного $crown$ в вершину (с последующим ее удалением, если получившийся граф содержит порожденный W_4) приводит к графу $\hat{G} \in \mathcal{X}'_3$ такому, что $\hat{G}$ является 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда таковым является и $\tilde{G}$. Выполнив достаточное количество раз таких стягиваний, мы получим граф из класса $\mathcal{X}'_3 \cap Free(\{crown\})$, 3-раскрашиваемость которого эквивалентна 3-раскрашиваемости G. Поэтому можно считать, что $b \neq c$. Если $N_G(x_1) \setminus V(H) = \emptyset$ (соответственно, $N_G(x_2) \setminus V(H) = \emptyset$), то удалим из G все вершины из $V(H) \setminus \{x_1, x_2, y_1, y_2\}$, а также x_1 (соответственно, x_2) и добавим ребра y_1y_2, x_2y_1, x_2y_2 (соответственно, ребра y_1y_2, x_1y_1, x_1y_2). Очевидно, что получившийся граф принадлежит $\mathcal{X}^*$ и является 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда таковым является G. Поэтому считаем, что $N_G(x_1) \setminus V(H) = \{a\}, N_G(x_2) \setminus V(H) = \{d\}$. Если $a = d$, то a является избыточной. Поэтому считаем, что $a \neq d$.

Предположим, что $H \notin \{K_3, F_4, sun\}$ — некоторое 2_G-дерево, $x, y \notin V(H)$ — две несмежные вершины, не принадлежащие общему 2_G-дереву и смежные, соответственно, с вершинами $a, b \in V(H)$. Тогда $N(a) \setminus V(H) = \{x\}, N(b) \setminus V(H) = \{y\}$. Удалим ребра xa и yb, а также добавим ребро xy, получившийся граф обозначим через G'. Степени вершин x и y не изменились, поэтому $G' \in Free(\{W_5\})$. Проверим, что $G' \in Free(\{K_{1,4}\})$. Действительно, если это не так, то xy должно быть одним из ребер некоторой порожденной копии $K_{1,4}$, но тогда G содержит порожденный подграф $K_{1,4}$, одним из ребер которого является xa или yb. Очевидно, что $G' \in Free(\{butterfly\}$, т. к. иначе $G \in Free(\{cricket\})$, когда

$$\deg_{butterfly}(x) = \deg_{butterfly}(y) = 2 \text{ или } \max(\deg_{butterfly}(x), \deg_{butterfly}(y)) = 4.$$

Если G' содержит порожденную копию $cricket$, то либо $G \in Free(\{cricket\})$, когда xy инцидентно вершине степени 4 и вершине степени 1 в копии $cricket$, либо $G \in$ $\in Free(\{K_{1,4}\})$.

Если G' содержит порожденный W_4, то можно считать, что $\deg_{W_4}(x) = 3$, $\deg_{W_4}(y) = 4$, т. к. иначе x и y принадлежат общему 2_G-дереву. Тогда x является избыточной. Если G' содержит порожденный $crown$, то $\deg_{crown}(x) = 4, \deg_{crown}(y) = 2$ или наоборот, т. к. если $\deg_{crown}(x) = \deg_{crown}(y) = 4$, то G содержит порожденный $K_{1,4}$. Легко проверить, что $deg_G(x) = 3$, т. к. $G \in Free(\{K_{1,4}, cricket\})$ и $x \notin V(H)$. Рассмотрим граф G'', получающийся из G удалением ребра yb и ребра образовавшегося порожденного подграфа $crown$ графа G, а также добавлением ребра xb. Нетрудно видеть, что из 3-раскрашиваемости G'' следует 3-раскрашиваемость G. Действительно, это следует из того факта, что в любой 3-раскраске G'' вершины x и b имеют различные цвета. Также очевидно, что

$$G'' \in Free(\{K_{1,4}, butterfly, cricket, crown, W_5\}).$$

Вместе с тем, $G'' \in Free(\{K_4, W_4\})$, т. к. иначе $N_{G''}(x) \subseteq V(H)$ и $G''[N_{G''}(x)] \in \{K_3, P_3\}$, что невозможно. Можно рассматривать только случай, когда $N_{G''}(x)$ состоит из трех разноцветных элементов a, v', b множества $V(H)$, т.к. иначе $G'' \in \mathcal{X}^*$ не содержит новых 2-деревьев, в которых ребро не соединяет двух одноцветных вершин, или G содержит избыточную вершину. Тогда вершины x и b должны иметь одинаковые цвета.

В H помимо вершин a, v', b степени 2 или 3 есть еще ровно одна вершина v'' степени 2 или 3. Рассмотрим произвольную 3-раскраску $G \setminus (V(H) \cup \{x\})$ и покажем, что она продолжается до 3-раскраски G. Пусть в 3-раскраске $G \setminus (V(H) \cup \{x\})$ цвета вершин x' и x'' равны 1, где x, x', x'' — все вершины степени 2 порожденного *crown* графа G'. Назначим вершинам x и b цвет 1. Если $deg_G(v'') = 3$, то вершинам a и v' назначим цвета 2 и 3, соответственно. Такая частичная 3-раскраска H, очевидно, продолжается до 3-раскраски графа H. Предположим, что $N_G(v'') \setminus V(H) = \{u\}$.

Если b и c не принадлежат никакому 2_G-дереву или принадлежат некоторому 2_G-дереву и имеют разные цвета в 3-раскраске данного 2_G-дерева, то удалим все вершины из $V(H)$ и добавим ребро bc. По Лемме 3.2 из 3-раскрашиваемости получившегося графа будет следовать 3-раскрашиваемость графа G. Предположим, что b и c принадлежат одному 2_G-дереву H', котором они имеют одинаковые цвета. Очевидно, что если одна из вершин a или d принадлежит H', то ее можно удалить из G без потери свойства 3-раскрашиваемости. Поэтому считаем, что $a \notin V(H'), d \notin V(H')$. Таким образом, вершины b и a не принадлежат общему 2_G-дереву. То же верно и для вершин d и c. Удалим из G все вершины из $V(H)$, а также добавим ребра ab и cd. По Лемме 3.2, из 3-раскрашиваемости получившегося графа, который принадлежит классу $\mathcal{X}^*$, будет следовать 3-раскрашиваемость G.

Итак, из рассуждений предыдущих абзацев следует, что можно рассматривать только случай, когда каждое 2_G-дерево принадлежит $\{K_3, F_4, sun\}$. Для каждого 2_G-дерева удалим его из G, затем добавим треугольник и для любого $i \in \overline{1,3}$ вершину треугольника с номером i соединим в точности с теми вершинами полученного графа, с которыми ранее были смежны вершины цвета i удаленного 2_G-дерева. Треугольник обязательно будет содержать вершину степени 2. После эллиминации всех 2_G-деревьев в получившемся графе мы удаляем все вершины степени 2. Полученный граф обозначим через G^*. Граф G^* не содержит порожденной копии K_4 и имеет максимальную степень вершин не более 3. Ясно, что из 3-раскрашиваемости G^* следует 3-раскрашиваемость G. По теореме Брукса [11], граф G^* является 3-раскрашиваемым. Значит, граф G является 3-раскрашиваемым. Поэтому данная лемма имеет место.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Объединив результаты Лемм 2.1 и 3.3, получим следующее утверждение, которое является основным в данной работе.

Т е о р е м а 3.1 *Пусть $\mathcal{X}$ — наследственный класс, определяемый четверкой запрещенных 5-вершинных порожденных подграфов. Тогда задача 3-ВР является полиномиально разрешимой в классе $\mathcal{X}$, если $\mathcal{X} \not\supseteq \mathcal{X}_i^*$ для любого $1 \leq i \leq 9$, а иначе она является NP-полной.*

Благодарности.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект № 19-71-00005).

Список литературы

1. Garey M. R., Johnson D. S. Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness // NY, W. H. Freeman and Co. 1979. 338 p.

2. Broersma H. J., Golovach P. A., Paulusma D., Song J. Updating the complexity status of coloring graphs without a fixed induced linear forest // Theoretical Computer Science. 2012. Vol. 414, No 1. pp. 9–19.

3. Golovach P.A., Paulusma D., Song J. 4-coloring H-free graphs when H is small // Discrete Applied Mathematics. 2013. Vol. 161, No. 1–2. pp. 140-150.

4. Hoàng C., Kamiński M., Lozin V.V., Sawada J., Shu X. Deciding k-colorability of P_5-free graphs in polynomial time // Algorithmica. 2010. Vol. 57. pp. 74–81.

5. Bonomo F., Chudnovsky M., Maceli P., Schaudt O., Stein M., Zhong M. Three-coloring and list three-coloring of graphs without induced paths on seven vertices // Combinatorica. 2018. Vol. 38, No. 4. pp. 779–801.

6. Spirkl S., Chudnovsky M., Zhong M. Four-coloring P_6-free graphs // Simposium on Discrete Algorithims. 2019. pp. 1239–1256.

7. Huang S. Improved complexity results on k-coloring P_t-free graphs // European Journal of Combinatorics. 2016. Vol. 51. pp. 336–346.

8. Malyshev D.S. The complexity of the 3-colorability problem in the absence of a pair of small forbidden induced subgraphs // Discrete Mathematics. 2015. Vol. 338, No. 11. pp. 1860–1865.

9. Malyshev D.S. The complexity of the vertex 3-colorability problem for some hereditary classes defined by 5-vertex forbidden induced subgraphs // Graphs and Combinatorics. 2017. Vol. 33, No. 4. pp. 1009–1022.

10. Sirotkin D.V., Malyshev D.S. On the complexity of the vertex 3-coloring problem for the hereditary graph classes with forbidden subgraphs of small size // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2018. Vol. 25, No. 4. pp. 759–769.

11. Brooks R.L. On colouring the nodes of a network // Proceedings of Cambridge Philosophical Society, Mathematical and Physical Sciences. 1941. Vol. 37, No. 2. pp. 194–197.

Поступила 4.12.2019

MSC2020 05C15

A complete classification of the complexity of the vertex 3-colourability problem for quadruples of induced 5-vertex prohibitions

© **D. S. Malyshev**[1]

Abstract. The vertex 3-colourability problem for a given graph is to check whether it is possible to split the set of its vertices into three subsets of pairwise non-adjacent vertices or not. A hereditary class of graphs is a set of simple graphs closed under isomorphism and deletion of vertices; the set of its forbidden induced subgraphs defines every such a class. For all but three the quadruples of 5-vertex forbidden induced subgraphs, we know the complexity status of the vertex 3-colourability problem. Additionally, two of these three cases are polynomially equivalent; they also polynomially reduce to the third one. In this paper, we prove that the computational complexity of the considered problem in all of the three mentioned classes is polynomial. This result contributes to the algorithmic graph theory.

Key Words: vertex 3-colourability problem, hereditary graph class, polynomial-time algorithm

References

1. M. R. Garey, D. S. Johnson, *Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness*, NY, W. H. Freeman and Co., 1979, 338 p.
2. H. J. Broersma,P. A. Golovach, D. Paulusma, J. Song, "Updating the complexity status of coloring graphs without a fixed induced linear forest", *Theoretical Computer Science*, **414**:1 (2012), 9–19.
3. P. A. Golovach, D. Paulusma, J. Song, "4-coloring H-free graphs when H is small", *Discrete Applied Mathematics*, **161**:1–2 (2013), 140–150.
4. C. Hoàng, M. Kamiński, V. V. Lozin, J. Sawada, X. Shu, "k-colorability of P_5-free graphs in polynomial time", *Algorithmica*, **57**:1 (2010), 74–81.
5. F. Bonomo, M. Chudnovsky, P. Maceli, O. Schaudt, M. Stein, M. Zhong, "Three-coloring and list three-coloring of graphs without induced paths on seven vertices", *Combinatorica*, **38**:4 (2018), 779–801.
6. S. Spirkl, M. Chudnovsky, M. Zhong, "Four-coloring P_6-free graphs", *Simposium on Discrete Algorithims*, 2019, 1239–1256.
7. S. Huang, "Improved complexity results on k-coloring P_t-free graphs", *European Journal of Combinatorics.*, **51**:1 (2016), 336–346.
8. D. S. Malyshev, "The complexity of the 3-colorability problem in the absence of a pair of small forbidden induced subgraphs", *Discrete Mathematics.*, **338**:11 (2015), 1860–1865.

[1]**Dmitry S. Malyshev**, Professor, Department of Applied Mathematics and Information Science, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), Professor, Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, National Research Lobachevsky University of Nizhny Novgorod (23 Gagarina Avenue, Nizhny Novgorod, 603950, Russia), Dr.Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-7529-8233, dsmalyshev@rambler.ru

9. D. S. Malyshev, “The complexity of the vertex 3-colorability problem for some hereditary classes defined by 5-vertex forbidden induced subgraphs”, *Graphs and Combinatorics.*, **33**:4 (2017), 1009–1022.

10. D. V. Sirotkin, D. S. Malyshev, “On the complexity of the vertex 3-coloring problem for the hereditary graph classes with forbidden subgraphs of small size”, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, **25**:4 (2018), 759–769.

11. R. L. Brooks, “On colouring the nodes of a network”, *Proceedings of Cambridge Philosophical Society, Mathematical and Physical Sciences.*, **37**:2 (1941), 194–197.

Submitted 4.12.2019