МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.22.202001.13-23

*УДК 517.984.5*

# О разрешимости смешанной задачи для уравнения с частными производными дробного порядка с запаздывающим аргументом по времени и операторами Лапласа с нелокальными краевыми условиями в классах Соболева

© **М. М. Бабаев**[1]

**Аннотация.** В данной работе изучена задача с начальными функциями и граничными условиями для дифференциальных уравнений дробного порядка в частных производных с запаздывающим аргументом по времени, с операторами Лапласа с пространственными переменными и нелокальными граничными условиями в классах Соболева. Решения начально-граничной задачи построено в виде суммы ряда по системе собственных функций многомерной спектральной задачи. У спектральной задачи найдены собственные значения и построена соответствующая система собственных функций. Показано, что эта система собственных функций является полной и образует базис Рисса в подпространствах Соболева. На основании полноты системы собственных функций доказана теорема единственности решения задачи. В подпространствах Соболева доказано существование регулярного решения поставленной начально-граничной задачи.

**Ключевые слова:** дифференциальное уравнение в частных производных с запаздывающим аргументом, дробная производная по времени, начально-граничная задача, спектральный метод, собственные значения, собственные функции, полнота, базис Рисса, единственность, существование, ряд, нелокальные краевые условия, класс Соболева, производная дробного порядка, смешанная задача

## 1. Постановка задачи

Известно, что в физике твердого тела изучаются т. н. фрактальные среды, в частности, явления диффузии в них. В одной из моделей диффузия в сильно пористой среде описывается уравнением типа уравнения теплопроводности, но с дробной производной по временной координате с запаздывающим аргументом. Многие задачи о колебаниях балок и пластин, которые имеют большое значение в строительной механике, приводят к дифференциальным уравнениям [1, с. 141–143], [2, с. 278–280], [3–5].

Отметим также, что к уравнению колебаний балки приходят во многих задачах при расчёте устойчивости вращающихся валов и изучении вибрации кораблей [4–7].

[1]**Бабаев Махкамбек Мадаминович**, докторант кафедры дифференциальных уравнений и математической физики, Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека (100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, д. 4), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1799-0413, babayevm@mail.ru

В данной работе рассматривается дифференциальное уравнение с дробной производной вида

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,t)=a^2\Delta u(x,t)+b^2\Delta u(x,t-\tau)+f(x,t),(x,t)\in\Pi\times(0,T),l-1<\alpha\leq l \quad (1.1)$$

с начальными функциями

$$\begin{cases} D_{0t}^{\alpha-k}u(x,t)\mid_{t=+0}=\varphi_k(x),x=(x_1,...,x_j,...,x_N)\in\Pi, \quad k=1,2,...,l-1, \\ D_{0t}^{\alpha-l}u(x,t)=\varphi_l(x,t),(x,t)=(x_1,...,x_j,...,x_N,t)\in\Pi\times(-\tau,0), \end{cases} \quad (1.2)$$

и краевыми условиями

$$\begin{cases} \alpha_j\cdot u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)\mid_{x_j=0}+\beta_j\cdot u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)\mid_{x_j=\pi}=0, \quad 1\leq j\leq p, \\ \beta_j\cdot\dfrac{\partial u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)}{\partial x_j}\mid_{x_j=0}+\alpha_j\cdot\dfrac{\partial u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)}{\partial x_j}\mid_{x_j=\pi}=0, \quad 1\leq j\leq p, \\ u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)\mid_{x_j=0}=u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)\mid_{x_j=\pi}, \quad p+1\leq j\leq q, \\ \dfrac{\partial u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)}{\partial x_j}\mid_{x_j=0}=\dfrac{\partial u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)}{\partial x_j}\mid_{x_j=\pi}, \quad p+1\leq j\leq q, \\ u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)\mid_{x_j=0}=0, \quad q+1\leq j\leq N, \\ u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)\mid_{x_j=\pi}=0, \quad q+1\leq j\leq N, \\ 1\leq p\leq q\leq N, \end{cases} \quad (1.3)$$

где $a$, $b$, $\tau$, $T>0$ – постоянные; $l\in\mathbb{N}$; $(x,t)=(x_1,...,x_j,...,x_N,t)\in\Pi\times(0,T)$; $\Pi=(0,\pi)\times...\times(0,\pi)$; $\alpha_j=const$; $\beta_j=const$; $|\alpha_j|\neq|\beta_j|$, $\alpha_j\neq0$, $\beta_j\neq0$ при $1\leq j\leq p$ и функции $\{v_n(x),n\in\mathbb{Z}^N\}$ образуют систему собственных функций спектральной задачи:

$$\Delta v(x)+\mu v(x)=0, \quad (1.4)$$

$$\begin{cases} \alpha_j\cdot v(x_1,...,x_j,...,x_N)\mid_{x_j=0}+\beta_j\cdot v(x_1,...,x_j,...,x_N)\mid_{x_j=\pi}=0, \quad 1\leq j\leq p, \\ \beta_j\cdot\dfrac{\partial v(x_1,...,x_j,...,x_N)}{\partial x_j}\mid_{x_j=0}+\alpha_j\cdot\dfrac{\partial v(x_1,...,x_j,...,x_N)}{\partial x_j}\mid_{x_j=\pi}=0, \quad 1\leq j\leq p, \\ v(x_1,...,x_j,...,x_N)\mid_{x_j=0}=v(x_1,...,x_j,...,x_N)\mid_{x_j=\pi}, \quad p+1\leq j\leq q, \\ \dfrac{\partial v(x_1,...,x_j,...,x_N)}{\partial x_j}\mid_{x_j=0}=\dfrac{\partial v(x_1,...,x_j,...,x_N)}{\partial x_j}\mid_{x_j=\pi}, \quad p+1\leq j\leq q, \\ v(x_1,...,x_j,...,x_N)\mid_{x_j=0}=0, \quad q+1\leq j\leq N, \\ v(x_1,...,x_j,...,x_N)\mid_{x_j=\pi}=0, \quad q+1\leq j\leq N, \\ 1\leq p\leq q\leq N. \end{cases} \quad (1.5)$$

Здесь при $\alpha<0$ дробная интеграл $D^{\alpha}$ имеет вид

$$D_{at}^{\alpha}u(x,t)=\frac{sign(t-a)}{\Gamma(-\alpha)}\int\limits_a^t\frac{u(x,\tau)\cdot d\tau}{|t-\tau|^{\alpha+1}},$$

при $\alpha=0$ – $D_{at}^{\alpha}u(x,t)=u(x,t)$, а при $l-1<\alpha\leq l,l\in\mathbb{N}$, –

$$D_{at}^{\alpha}u(x,t)=sign^l(t-a)\frac{d^l}{dt^l}D_{at}^{\alpha-l}u(x,t)=$$

$$= \frac{sign^{l+1}(t-a)}{\Gamma(l-\alpha)} \frac{d^l}{dt^l} \int\limits_a^t \frac{u(x,\tau)\cdot d\tau}{|t-\tau|^{\alpha-l+1}}.$$

Введем пространство $W_2^s(0,l)$ с нормой

$$\|f\|^2_{W_2^s(0,l)} = \|f\|^2_{L_2(0,l)} + \|D^s f\|^2_{L_2(0,l)},$$

где $s$ – произвольное натуральное число, при этом $W_2^0(0,l) = L_2(0,l)$.

Скалярное произведение в пространстве $W_2^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\Pi)$ вводится следующим образом:

$$(f(x),g(x))_{W_2^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\Pi)} = (f(x),g(x))_{L_2(\Pi)} +$$

$$+\sum_{j_1=1}^{N}(D^{s_{j_1}}_{x_{j_1}} f(x), D^{s_{j_1}}_{x_{j_1}} g(x))_{L_2(\Pi)} + \sum_{1\le j_1<j_2\le N}(D^{s_{j_1}}_{x_{j_1}} D^{s_{j_2}}_{x_{j_2}} f(x), D^{s_{j_1}}_{x_{j_1}} D^{s_{j_2}}_{x_{j_2}} g(x))_{L_2(\Pi)} + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{1\le j_1<j_2<\ldots<j_N\le N}(D^{s_{j_1}}_{x_{j_1}} D^{s_{j_2}}_{x_{j_2}} \ldots D^{s_{j_N}}_{x_{j_N}} f(x), D^{s_{j_1}}_{x_{j_1}} D^{s_{j_2}}_{x_{j_2}} \ldots D^{s_{j_N}}_{x_{j_N}} g(x))_{L_2(\Pi)}.$$

Соответственно норма в пространстве $W_2^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\Pi)$ записывается как

$$\left\|f(x)\right\|^2_{W_2^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\Pi)} = \left\|f(x)\right\|^2_{L_2(\Pi)} + \sum_{j_1=1}^{N}\left\|D^{s_{j_1}}_{x_{j_1}} f(x)\right\|^2_{L_2(\Pi)} +$$

$$+\sum_{1\le j_1<j_2\le N}\left\|D^{s_{j_1}}_{x_{j_1}} D^{s_{j_2}}_{x_{j_2}} f(x)\right\|^2_{L_2(\Pi)} + \ldots + \sum_{1\le j_1<j_2<\ldots<j_N\le N}\left\|D^{s_{j_1}}_{x_{j_1}} D^{s_{j_2}}_{x_{j_2}} \ldots D^{s_{j_N}}_{x_{j_N}} f(x)\right\|^2_{L_2(\Pi)}.$$

## 2. Полнота системы собственных функций в подпространствах Соболева

Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\Pi)$ множество всех функций $f(x) \in W_2^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\Pi)$, удовлетворяющих граничным условиям (1.5).

Справедлива следующая

**Т е о р е м а 2.1** *Пусть* $\alpha_j \ne 0$, $\beta_j \ne 0$, $|\alpha_j| \ne |\beta_j|$ *– действительные числа при каждом* $1 \le j \le p$ *и*

$$\rho = \max_{1\le j\le p}\sqrt{\theta_j^2 + 2\big(\frac{\theta_j}{\sqrt{2}} + (\varphi_j+1)^{s_j} - 1\big)^2}\cdot\sigma(s_j) < 1,$$

*где* $\sigma(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\sigma(s_j) = 1$, *при* $s_j > 0$, $\theta_j = \sqrt{2}\cdot\max\limits_{x\in[0,\pi]}\left|e^{i\varphi_j x} - 1\right|$, $\lambda_{m_j} = 2m_j + \varphi_j$, $\varphi_j = \dfrac{1}{\pi}\arccos\dfrac{-2\alpha_j\beta_j}{\alpha_j^2+\beta_j^2}$. *Тогда система собственных функций*

$$\{v_{m_1\ldots m_N}(x_1,\ldots,x_N)\}_{(m_1,\ldots,m_p)\in Z^p\times(m_{p+1},\ldots,m_q)\in Z^{q-p}\times(m_{q+1},\ldots,m_N)\in N^{N-q}} =$$

$$= \{\prod_{j=1}^{p}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\beta_j\cos\lambda_{m_j}x_j + sign(\beta_j^2-\alpha_j^2)\cdot\alpha_j\sin\lambda_{m_j}x_j}{\sqrt{\alpha_j^2+\beta_j^2}\cdot\sqrt{1+|\lambda_{m_j}|^{2s_j}}}\}_{(m_1,\ldots,m_p)\in Z^p}\times$$

$$\times\{\prod_{j=p+1}^{q}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{1+\mid 2m_j\mid^{2s_j}}}exp(i2m_jx_j)\}_{(m_{p+1},...,m_q)\in Z^{q-p}}\times$$

$$\times\{\prod_{j=q+1}^{N}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{1+\mid m_j\mid^{2s_j}}}sin(m_jx_j)\}_{(m_{q+1},...,m_N)\in N^{N-q}},$$

*спектральной задачи (1.4)–(1.5) образует полную ортонормированную систему в классах Соболева* $\overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2,...,s_N}(\Pi)$.

**Т е о р е м а 2.2** *Пусть* $\alpha_j\neq 0,\quad \beta_j\neq 0,\quad \mid\alpha_j\mid\neq\mid\beta_j\mid$ *– действительные числа при каждом* $1\leq j\leq p$ *и*

$$\rho=\max_{1\leq j\leq p}\sqrt{\theta_j^2+2\Big(\frac{\theta_j}{\sqrt{2}}+(\varphi_j+1)^{s_j}-1\Big)^2}\cdot\sigma(s_j)<1,$$

*где* $\sigma(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\sigma(s_j)=1$, *при* $s_j>0, \theta_j=\sqrt{2}\cdot\max\limits_{x\in[0,\pi]}\left|e^{i\varphi_jx}-1\right|, \lambda_{m_j}=2m_j+\varphi_j$, $\varphi_j=\dfrac{1}{\pi}\arccos\dfrac{-2\alpha_j\beta_j}{\alpha_j^2+\beta_j^2}$, $s_j>k+\frac{N}{2}, k\geq 0,\quad k\in Z$. *Тогда ряд Фурье функции* $f(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2,...,s_N}(\Pi)\cap C^k(\Pi)$ *по ортонормированных собственных функций*

$$\{v_{m_1...m_N}(x_1,...,x_N)\}_{(m_1,...,m_p)\in Z^p\times(m_{p+1},...,m_q)\in Z^{q-p}\times(m_{q+1},...,m_N)\in N^{N-q}}=$$

$$=\{\prod_{j=1}^{p}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\beta_j\cos\lambda_{m_j}x_j+sign(\beta_j^2-\alpha_j^2)\cdot\alpha_j\sin\lambda_{m_j}x_j}{\sqrt{\alpha_j^2+\beta_j^2}\cdot\sqrt{1+\mid\lambda_{m_j}\mid^{2s_j}}}\}_{(m_1,...,m_p)\in Z^p}\times$$

$$\times\{\prod_{j=p+1}^{q}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{1+\mid 2m_j\mid^{2s_j}}}exp(i2m_jx_j)\}_{(m_{p+1},...,m_q)\in Z^{q-p}}\times$$

$$\times\{\prod_{j=q+1}^{N}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{1+\mid m_j\mid^{2s_j}}}sin(m_jx_j)\}_{(m_{q+1},...,m_N)\in N^{N-q}}$$

*спектральной задачи (1.4)–(1.5) сходится по норме пространства* $C^k(\Pi)$ *к функции* $f(x)$.

Доказательство теорем 2.1 и 2.2 можно найти в работе [8].

## 3. Существование и единственность решения начально-граничной задачи

Регулярным решением уравнения (1.1) в области $Q=\Pi\times(0,T)$, $T>0$ назовем функцию $u(x,t)$ из класса $u(x,t)\in C(\overline{Q})$, $D_{0t}^{\alpha-i}u(x,t)\in C(\overline{Q})$, $i=1,2,\ldots,p$, $D_{0t}^{\alpha}u(x,t)\in$ $\in C(Q)$ , $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x_j}\in C(\overline{Q})$, $\dfrac{\partial^2u(x,t)}{\partial x_j^2}\in C(Q)$, $j=1,2,\ldots,N$, и удовлетворяющую уравнению (1.1) во всех точках $(x,t)\in Q$.

Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2,...,s_N;\theta}(Q)$ множество всех функций $u(x,t)\in\in W_2^{s_1,s_2,...,s_N;\theta}(Q)$, удовлетворяющих граничным условиям (1.3).

Функцию $u(x,t)$ назовем регулярным решением задачи (1.1)–(1.3) в области $Q = \Pi \times$ $\times (0,T)$, если функция $u(x,t)$ регулярные решение уравнения (1.1) в области $Q = \Pi \times$ $\times (0,T)$ и удовлетворяет начальным функциям и граничным условиям (1.2) – (1.3).

Пусть функция $u(x,t) \in W_2^{s_1,s_2,...,s_N;\theta}(Q)$ с показателем $s_1 = s_2 = ... = s_N =$ $= 2 + \frac{N}{2}$, $\theta = -[-\alpha]$ удовлетворяет уравнению (1.1) во всех точках $(x,t) \in Q$, а также начальным и граничным условиям (1.2) – (1.3). Тогда функция $u(x,t)$ является регулярным решением задачи (1.1)–(1.3) в области $Q = \Pi \times (0,T)$.

Введем функции

$$T_{m_1...m_N}(t) = \int\limits_{\Pi} u(y,t)\,\widetilde{v}_{m_1...m_N}(y)\,dy, \tag{3.1}$$

где

$$\begin{gathered}\widetilde{v}_{m_1...m_N}(x_1,...,x_N) = \prod_{j=1}^{p}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\beta_j\cos\lambda_{m_j}x_j + sign(\beta_j^2-\alpha_j^2)\cdot\alpha_j\sin\lambda_{m_j}x_j}{\sqrt{\alpha_j^2+\beta_j^2}}\times \\ \times\prod_{j=p+1}^{q}\frac{1}{\sqrt{\pi}}exp(i2m_jx_j)\prod_{j=q+1}^{N}\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}sin(m_jx_j)\end{gathered} \tag{3.2}$$

при $(m_1,...,m_p) \in Z^p$, $(m_{p+1},...,m_q) \in Z^{q-p}$, $(m_{q+1},...,m_N) \in \mathbb{N}^{N-q}$.

В силу (1.1)–(1.3) неизвестные функции $T_{m_1...m_N}(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$D_{0t}^{\alpha}T_{m_1...m_N}(t) + \mu_{m_1...m_N}(a^2T_{m_1...m_N}(t) + b^2T_{m_1...m_N}(t-\tau)) = f_{m_1...m_N}(t \tag{3.3}$$

и начальным функциям

$$\begin{cases} D_{0t}^{\alpha-i}T_{m_1...m_N}(t)\,|_{t=+0} = \varphi_{i,m_1...m_N}, \quad i = 1,2,...,l-1, \\ D_{0t}^{\alpha-l}u(x,t) = \varphi_l(x,t), (x,t) = (x_1,...,x_j,...,x_N,t) \in \Pi\times(-\tau,0), \end{cases}$$

где

$$f_{m_1...m_N}(t) = \int\limits_{\Pi} f(y,t)\,\widetilde{v}_{m_1...m_N}(y)\,dy, \quad \varphi_{j,m_1...m_N} = \int\limits_{\Pi}\varphi_j(y)\,\widetilde{v}_{m_1...m_N}(y)\,dy.$$

Следовательно, применяя метод шагов (см., например, [4]), получим:

$$D_{0t}^{\alpha}T_{m_1...m_N}(t) + \mu_{m_1...m_N}a^2T_{m_1...m_N}(t) = f_{m_1...m_N}(t) - \mu_{m_1...m_N}b^2\left(D_{0t}^{l-\alpha}\varphi_l\right)_{m_1...m_N}(t) \tag{3.4}$$

при $0 \le t \le \tau$ и начальных условиях

$$D_{0t}^{\alpha-i}T_{m_1...m_N}(t)\,|_{t=0} = \varphi_{i,m_1...m_N}, \quad i = 1,2,...,l. \tag{3.5}$$

Решение задачи Коши (3.4)–(3.5) известно (см., например, [6, с. 16–17], [7]) и оно имеет вид

$$\begin{gathered}{}_1T_{m_1...m_N}(t) = \sum_{j=1}^{l}\varphi_{j,m_1...m_N}t^{\alpha-j}E_{\alpha,\alpha-j+1}\left(-\mu_{m_1...m_N}a^2\cdot t^{\alpha}\right) + \\ +\int\limits_0^t (t-\xi)^{\alpha-1}\cdot E_{\alpha,\alpha}\left[-\mu_{m_1...m_N}a^2(t-\xi)^{\alpha}\right]\times \\ \times\left[f_{m_1...m_N}(\xi) - \mu_{m_1...m_N}b^2\left(D_{0t}^{l-\alpha}\varphi_l\right)_{m_1...m_N}(\xi)\right]d\xi\end{gathered} \tag{3.6}$$

при $0 \leq t \leq \tau$, где

$$\mu_{m_1 \ldots m_N} = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{m_j}^2 = \sum_{j=1}^{p} (2m_j + \varphi_j)^2 + \sum_{j=p+1}^{q} (2m_j)^2 + \sum_{j=q+1}^{N} (m_j)^2,$$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{z^q}{\Gamma(\alpha q + \beta)}.$$

Далее для отрезка $\tau \leq t \leq 2\tau$ из уравнения (3.3) получим:

$$\begin{gathered} D_{0t}^{\alpha} T_{m_1 \ldots m_N}(t) + \mu_{m_1 \ldots m_N} a^2 T_{m_1 \ldots m_N}(t) = \\ = f_{m_1 \ldots m_N}(t) - \mu_{m_1 \ldots m_N} b^2 \cdot {}_1T_{m_1 \ldots m_N}(t - \tau). \end{gathered} \tag{3.7}$$

Из решения (3.6) получим начальные условия вида

$$D_{0t}^{\alpha - i} T_{m_1 \ldots m_N}(t) \mid_{t=\tau} = {}_1T_{i, m_1 \ldots m_N}, \quad i = 1, 2, ..., l. \tag{3.8}$$

Решение задачи Коши (3.7)–(3.8) также известно и имеет вид

$$\begin{gathered} {}_2T_{m_1 \ldots m_N}(t) = \sum_{j=1}^{l} \varphi_{j, m_1 \ldots m_N} (t - \tau)^{\alpha - j} E_{\alpha, \alpha - j + 1}\left(-\mu_{m_1 \ldots m_N} a^2 \cdot (t - \tau)^{\alpha}\right) + \\ + \int_{\tau}^{t} (t - \xi)^{\alpha - 1} \cdot E_{\alpha,\alpha}\left[-\mu_{m_1 \ldots m_N} a^2 (t - \xi)^{\alpha}\right] \times \\ \times \left[f_{m_1 \ldots m_N}(\xi) - \mu_{m_1 \ldots m_N} b^2 \cdot {}_1T_{m_1 \ldots m_N}(\xi - \tau)\right] d\xi \end{gathered} \tag{3.9}$$

при $\tau \leq t \leq 2\tau$.

Далее, применяя метод шагов для каждого отрезка $n\tau \leq t \leq (n+1)\tau$ из уравнения (3.3), получим:

$$\begin{gathered} D_{0t}^{\alpha} T_{m_1 \ldots m_N}(t) + \mu_{m_1 \ldots m_N} a^2 T_{m_1 \ldots m_N}(t) = \\ = f_{m_1 \ldots m_N}(t) - \mu_{m_1 \ldots m_N} b^2 \cdot {}_nT_{m_1 \ldots m_N}(t - n\tau). \end{gathered} \tag{3.10}$$

Соответствующие начальные условия имеют вид

$$D_{0t}^{\alpha - i} T_{m_1 \ldots m_N}(t) \mid_{t=n\tau} = {}_nT_{i, m_1 \ldots m_N}, \quad i = 1, 2, ..., l. \tag{3.11}$$

Решая задачу Коши (3.10)–(3.11), получим:

$$\begin{gathered} {}_{(n+1)}T_{m_1 \ldots m_N}(t) = \sum_{j=1}^{l} \varphi_{j, m_1 \ldots m_N} (t - n\tau)^{\alpha - j} E_{\alpha, \alpha - j + 1}\left(-\mu_{m_1 \ldots m_N} a^2 \cdot (t - n\tau)^{\alpha}\right) + \\ + \int_{n\tau}^{t} (t - \xi)^{\alpha - 1} \cdot E_{\alpha,\alpha}\left[-\mu_{m_1 \ldots m_N} a^2 (t - \xi)^{\alpha}\right] \times \\ \times \left[f_{m_1 \ldots m_N}(\xi) - \mu_{m_1 \ldots m_N} b^2 \cdot {}_nT_{m_1 \ldots m_N}(\xi - n\tau)\right] d\xi \end{gathered} \tag{3.12}$$

при $n\tau \leq t \leq (n+1)\tau$.

Поскольку функции (3.1) при каждом отрезке $n\tau \leq t \leq (n+1)\tau$ построены в явном виде с помощью формул (3.6), (3.9), (3.12), на основании полноты системы собственных функций (3.2) в $L_2(\Pi)$ нетрудно доказать единственность решения задачи (1.1)–(1.3). Пусть $f(x,t) \equiv 0$ и $\varphi_i(x) \equiv 0,\ i = \overline{1,\ l}$.

Тогда из формул (3.6), (3.9), (3.12) и (3.1) следует, что

$$\int\limits_{\Pi} u\left(y,t\right)\widetilde{v}_{m_1\ldots m_N}\left(y\right)dy = 0$$

при всех $m_1,...,m_N \in \mathbb{N}$ и любом $t \in [0,T]$. Отсюда в силу полноты системы собственных функций (3.2) в $L_2(\Pi)$ вытекает, что $u(x,t) = 0$ почти всюду в области $\Pi$ при любом $t \in [0,T]$. Как известно, по теореме вложения Соболева функция $u(x,t)$ непрерывна на $\overline{Q}$, то $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{Q}$. Это доказывает единственность решения задачи (1.1)–(1.3).

При каждом $t > 0$ функция $u(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2,\ldots,s_N;\theta}(Q)$ по переменной $x$ является функцией из класса $\overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\Pi)$. Поэтому рассматривая $t > 0$ как параметр, решение задачи (1.1)–(1.3) будем искать из класса $\overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2,\ldots,s_N;\theta}(Q)$ в виде суммы ряда по системе собственных функций (3.2) спектральной задачи (1.4)–(1.5):

$$u\left(x,t\right) = \sum_{m_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_N=1}^{\infty} T_{m_1\ldots m_N}\left(t\right)\cdot\widetilde{v}_{m_1\ldots m_N}\left(x\right), \tag{3.13}$$

где $\widetilde{v}_{m_1\ldots m_N}(x)$ определяется по формуле (3.2), а $T_{m_1\ldots m_N}(t)$ – по формулам (3.6), (3.9) и (3.12).

После подстановки (3.6) в (3.13) получим единственное решение задачи (1.1)–(1.3) в виде ряда

$$\begin{gathered} u\left(x,t\right) = \sum_{m_1=1}^{\infty}...\sum_{m_N=1}^{\infty}\left[\sum_{j=1}^{l}\varphi_{j,m_1\ldots m_N}t^{\alpha-j}E_{\alpha,\alpha-j+1}\left(-\mu_{m_1\ldots m_N}a^2\cdot t^{\alpha}\right)+\right.\\ +\int\limits_0^t\left(t-\xi\right)^{\alpha-1}\cdot E_{\alpha,\alpha}\left[-\mu_{m_1\ldots m_N}a^2(t-\xi)^{\alpha}\right]\\ \left.\left[f_{m_1\ldots m_N}\left(\xi\right)-\mu_{m_1\ldots m_N}b^2\left(D_{0t}^{l-\alpha}\varphi_l\right)_{m_1\ldots m_N}\left(\xi\right)\right]d\xi\right]\times\\ \times\widetilde{v}_{m_1\ldots m_N}\left(x_1,...,x_N\right) \end{gathered} \tag{3.14}$$

при $0 \le t \le \tau$. Аналогично, после подстановки (3.9) в (3.13) получим в отрезке $\tau \le t \le 2\tau$ единственное решение задачи (1.1)–(1.3) в виде ряда

$$\begin{gathered} u\left(x,t\right) = \sum_{m_1=1}^{\infty}...\sum_{m_N=1}^{\infty}\left[\sum_{j=1}^{l}\varphi_{j,m_1\ldots m_N}(t-\tau)^{\alpha-j}E_{\alpha,\alpha-j+1}\left(-\mu_{m_1\ldots m_N}a^2\cdot(t-\tau)^{\alpha}\right)+\right.\\ +\int\limits_{\tau}^{t}\left(t-\xi\right)^{\alpha-1}\cdot E_{\alpha,\alpha}\left[-\mu_{m_1\ldots m_N}a^2(t-\xi)^{\alpha}\right]\\ \left.\left[f_{m_1\ldots m_N}\left(\xi\right)-\mu_{m_1\ldots m_N}b^2\cdot{}_1T_{m_1\ldots m_N}\left(\xi-\tau\right)\right]d\xi\right]\times\\ \times\widetilde{v}_{m_1\ldots m_N}\left(x_1,...,x_N\right). \end{gathered} \tag{3.15}$$

Следовательно, после подстановки (3.12) в (3.13) получим в отрезке $n\tau \le t \le (n+1)\tau$ единственное решение задачи (1.1)–(1.3) в виде ряда

$$\begin{gathered} u\left(x,t\right) = \sum_{m_1=1}^{\infty}...\sum_{m_N=1}^{\infty}\left[\sum_{j=1}^{l}\varphi_{j,m_1\ldots m_N}(t-n\tau)^{\alpha-j}E_{\alpha,\alpha-j+1}\left(-\mu_{m_1\ldots m_N}a^2\cdot(t-n\tau)^{\alpha}\right)+\right.\\ +\int\limits_{n\tau}^{t}\left(t-\xi\right)^{\alpha-1}\cdot E_{\alpha,\alpha}\left[-\mu_{m_1\ldots m_N}a^2(t-\xi)^{\alpha}\right]\times\\ \times\left.\left[f_{m_1\ldots m_N}\left(\xi\right)-\mu_{m_1\ldots m_N}b^2\cdot{}_nT_{m_1\ldots m_N}\left(\xi-n\tau\right)\right]d\xi\right]\times\\ \times\widetilde{v}_{m_1\ldots m_N}\left(x_1,...,x_N\right). \end{gathered} \tag{3.16}$$

Поскольку система собственных функций (3.2) спектральной задачи (1.4)–(1.5) образует базис Рисса в пространстве Соболева $\overset{\circ}{H}{}^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\Pi)$, то любая функция из этого класса может быть разложена единственным образом в ряд Фурье, сходящийся по норме пространства $H^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\Pi)$. Поэтому ряды (3.14)–(3.16) сходятся в $H^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\Pi)$ в отрезках $t\in[0,\tau]$, $t\in[\tau,2\tau]$ и $t\in[n\tau,(n+1)\tau]$ соответственно. Выясним условия существования решения из класса $\overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2,\ldots,s_N;\theta}(Q)$. Согласно теореме 2.1, система собственных функций (3.2) спектральной задачи (1.4)–(1.5) образует базис Рисса в пространствах Соболева $\overset{\circ}{H}{}^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\Pi)$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\Pi)$ . Поэтому справедливо неравенство

$$\begin{gathered}
\|u\,(x,t)\,\|^2_{C^{2,2,\ldots,2}(\Pi)}\le c_8\|u\,(x,t)\,\|^2_{H^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\Pi)}\le\\
\le c_9\sum_{m_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{m_N=1}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{l}\varphi_{j,m_1\ldots m_N}t^{\alpha-j}E_{\alpha,\alpha-j+1}\left(-\mu_{m_1\ldots m_N}a^2\cdot t^{\alpha}\right)+\right.\\
+\int_0^t(t-\xi)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[-\mu_{m_1\ldots m_N}a^2(t-\xi)^{\alpha}\right]\times\\
\left.\times\left[f_{m_1\ldots m_N}(\xi)-\mu_{m_1\ldots m_N}b^2\left(D^{l-\alpha}_{0t}\varphi_l\right)_{m_1\ldots m_N}(\xi)\right]d\xi\right|^2\times\\
\times\prod_{k=1}^{N}\left(1+\lambda_{m_k}^{2s_k}\right)<\infty
\end{gathered}\tag{3.17}$$

при $0\le t\le\tau$. Далее

$$\begin{gathered}
\|u\,(x,t)\,\|^2_{C^{2,2,\ldots,2}(\Pi)}\le c_8\|u\,(x,t)\,\|^2_{H^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\Pi)}\le\\
\le c_9\sum_{m_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{m_N=1}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{l}\varphi_{j,m_1\ldots m_N}(t-\tau)^{\alpha-j}E_{\alpha,\alpha-j+1}\left(-\mu_{m_1\ldots m_N}a^2\cdot(t-\tau)^{\alpha}\right)+\right.\\
+\int_\tau^t(t-\xi)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[-\mu_{m_1\ldots m_N}a^2(t-\xi)^{\alpha}\right]\times\\
\left.\times\left[f_{m_1\ldots m_N}(\xi)-\mu_{m_1\ldots m_N}b^2\cdot{}_1T_{m_1\ldots m_N}(\xi-\tau)\right]d\xi\right|^2\times\\
\times\prod_{k=1}^{N}\left(1+\lambda_{m_k}^{2s_k}\right)<\infty
\end{gathered}\tag{3.18}$$

при $\tau\le t\le 2\tau$. Следовательно,

$$\begin{gathered}
\|u\,(x,t)\,\|^2_{C^{2,2,\ldots,2}(\Pi)}\le c_8\|u\,(x,t)\,\|^2_{H^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\Pi)}\le\\
\le c_9\sum_{m_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{m_N=1}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{l}\varphi_{j,m_1\ldots m_N}(t-n\tau)^{\alpha-j}E_{\alpha,\alpha-j+1}\left(-\mu_{m_1\ldots m_N}a^2\cdot(t-n\tau)^{\alpha}\right)+\right.\\
+\int_{n\tau}^t(t-\xi)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[-\mu_{m_1\ldots m_N}a^2(t-\xi)^{\alpha}\right]\times\\
\left.\times\left[f_{m_1\ldots m_N}(\xi)-\mu_{m_1\ldots m_N}b^2\cdot{}_nT_{m_1\ldots m_N}(\xi-n\tau)\right]d\xi\right|^2\times\\
\times\prod_{k=1}^{N}\left(1+\lambda_{m_k}^{2s_k}\right)<\infty
\end{gathered}\tag{3.19}$$

при $n\tau\le t\le(n+1)\tau$.

По теореме вложения Соболева условия (3.17)–(3.19) являются достаточными условиями существования регулярного решения задачи (1.1)–(1.3) из класса $\overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2,\ldots,s_N;\theta}(Q)$ с показателем $s_1=s_2==\ldots=s_N=2+\dfrac{N}{2}$, $\theta=-[-\alpha]$.

Если $0 < \alpha < 2$, то с учетом оценки функции Миттаг-Леффлера (см.,например [7, с. 35])

$$|E_{\alpha,\alpha-j+1}(\mu_{m_1...m_N}t^\alpha)| \leq \frac{C}{1+ \mid \mu_{m_1...m_N}t^\alpha \mid},$$

$$|E_{\alpha,\alpha}(\mu_{m_1...m_N}(t-\tau)^\alpha)| \leq \frac{C}{1+ \mid \mu_{m_1...m_N}(t-\tau)^\alpha \mid}$$

можно упростить достаточные условия (3.17), (3.18) и (3.19) существования регулярного решения задачи (1.1) – (1.3) из класса $\overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2,...,s_N;\theta}(Q)$ с показателем $s_1 = s_2 = ... = s_N = 2 + \frac{N}{2}$, $\theta = -[-\alpha]$.

Если для любого $j = 1, 2, ..., l$ и $0 \leq t \leq \tau$

$$\sum_{m_1=1}^{\infty} ... \sum_{m_N=1}^{\infty} |\varphi_{j,m_1...m_N}|^2 \prod_{k=1}^{N} \left(1 + \lambda_{m_k}^{2s_k}\right) < \infty,$$

$$\sum_{m_1=1}^{\infty} ... \sum_{m_N=1}^{\infty} \left| \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} \left| f_{m_1...m_N}(\xi) - \mu_{m_1...m_N} b^2 \left(D_{0t}^{l-\alpha}\varphi_l\right)_{m_1...m_N}(\xi) \right| d\xi \right|^2 \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{N} \left(1 + \lambda_{m_k}^{2s_k}\right) < \infty,$$

то условие (3.17) будет выполнено.

Далее, если для любого $j = 1, 2, ..., l$ и $\tau \leq t \leq 2\tau$

$$\sum_{m_1=1}^{\infty} ... \sum_{m_N=1}^{\infty} |\varphi_{j,m_1...m_N}|^2 \prod_{k=1}^{N} \left(1 + \lambda_{m_k}^{2s_k}\right) < \infty,$$

$$\sum_{m_1=1}^{\infty} ... \sum_{m_N=1}^{\infty} \left| \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} \left| f_{m_1...m_N}(\xi) - \mu_{m_1...m_N} b^2 \left(D_{0t}^{l-\alpha}\varphi_l\right)_{m_1...m_N}(\xi) \right| d\xi \right|^2 \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{N} \left(1 + \lambda_{m_k}^{2s_k}\right) < \infty,$$

$$\sum_{m_1=1}^{\infty} ... \sum_{m_N=1}^{\infty} \left| \int_\tau^t (t-\xi)^{\alpha-1} \left| f_{m_1...m_N}(\xi) - \mu_{m_1...m_N} b^2 \cdot {}_1T_{m_1...m_N}(\xi-\tau) \right| d\xi \right|^2 \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{N} \left(1 + \lambda_{m_k}^{2s_k}\right) < \infty,$$

то условие (3.18) будет выполнено при $\tau \leq t \leq 2\tau$.

Следовательно, если для любого $j = 1, 2, ..., l$ и $n\tau \leq t \leq (n+1)\tau$

$$\sum_{m_1=1}^{\infty} ... \sum_{m_N=1}^{\infty} |\varphi_{j,m_1...m_N}|^2 \prod_{k=1}^{N} \left(1 + \lambda_{m_k}^{2s_k}\right) < \infty,$$

$$\sum_{m_1=1}^{\infty} ... \sum_{m_N=1}^{\infty} \left| \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} \left| f_{m_1...m_N}(\xi) - \mu_{m_1...m_N} b^2 \left(D_{0t}^{l-\alpha}\varphi_l\right)_{m_1...m_N}(\xi) \right| d\xi \right|^2 \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{N} \left(1 + \lambda_{m_k}^{2s_k}\right) < \infty,$$

$$\sum_{m_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{m_N=1}^{\infty}\left|\int_{\tau}^{t}(t-\xi)^{\alpha-1}\left|f_{m_1\ldots m_N}(\xi)-\mu_{m_1\ldots m_N}b^2\cdot{}_1T_{m_1\ldots m_N}(\xi-\tau)\right|d\xi\right|^2\times$$
$$\times\prod_{k=1}^{N}\left(1+\lambda_{m_k}^{2s_k}\right)<\infty,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \tag{3.20}$$
$$\sum_{m_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{m_N=1}^{\infty}\left|\int_{n\tau}^{t}(t-\xi)^{\alpha-1}\left|f_{m_1\ldots m_N}(\xi)-\mu_{m_1\ldots m_N}b^2\cdot{}_nT_{m_1\ldots m_N}(\xi-n\tau)\right|d\xi\right|^2\times$$
$$\times\prod_{k=1}^{N}\left(1+\lambda_{m_k}^{2s_k}\right)<\infty,$$

то условие (3.19) будет выполнено.

Справедлива следующая

**Т е о р е м а 3.1** Пусть начальные функции $\varphi_i(x), i=1,2,...,l$, и правая часть $f(x,t)$ удовлетворяют условию (3.20) при каждом $n\tau\le t\le(n+1)\tau, n=0,1,2,\cdots,[\dfrac{T}{\tau}]$. Тогда регулярное решение задачи (1.1)–(1.3) из класса $\overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2,\ldots,s_N;\theta}(Q)$ с показателем $s_1=s_2=...=s_N=2+\dfrac{N}{2}$, $\theta=-[-\alpha]$ существует, единственно и представимо в виде ряда (3.14)–(3.16), где коэффициенты определяется по формулам (3.6), (3.9) и (3.12).

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке РУзФИ (проект № ОТ-Ф4-(32+36)).

## Список литературы

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. 3-е изд. М.: Наука, 1977. 736 с.

2. Рэлей Л. Теория звука. 2-е изд. М.: 1955. Т. 1. 504 с.

3. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.

4. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.

5. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.

6. Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 200 с.

7. Podlubny I. Fractional differential equations. Academic Press, Vol. 198. 1998. pp. 340.

8. Kasimov Sh. G., Ataev Sh. K. On solvability of the mixed problem for a partial equation of a fractional order with Laplace operators and nonlocal boundary conditions in the Sobolev classes. // Uzbek Mathematical Journal. 2018. No. 1, pp. 73–89.

*Поступила 3.12.2019*

*MSC2020 35K20, 35K51, 35K58*

# On the solvability of a mixed problem for a fractional partial differential equation with delayed time argument and Laplace operators with nonlocal boundary conditions in Sobolev classes

© **M. M. Babayev**[1]

**Abstract.** In this paper, we study a problem with initial functions and boundary conditions for partial differential equations of fractional order with Laplace operators. The boundary conditions of the problem are nonlocal, and the solution is supposed to belong to one of Sobolev classes. The solution of the initial boundary value problem is constructed as the sum of a series of multidimensional spectral problem's eigenfunctions. The eigenvalues of the spectral problem are found and the corresponding system of eigenfunctions is constructed. It is shown that this system is complete and forms a Riesz basis in the subspaces of Sobolev spaces. Basing on the completeness of the eigenfunctions' system, the uniqueness theorem for the solution of the problem is proved. The existence of a regular solution of the initial boundary value problem is proved in Sobolev subspaces.

**Key Words:** partial differential equation with delayed argument, fractional time derivative, initial boundary value problem, spectral method, eigenvalues, eigenfunctions, completeness, Riess basis, uniqueness, existence, series, nonlocal boundary conditions, Sobolev class, fractional derivative, mixed problem

## References

1. A. N. Tikhonov, A. A. Samarskiy, *Equations of Mathematical Physics 3th ed.*, Nauka Publ., Moscow, 1977 (In Russ.).
2. L. Raleigh, *Sound Theory*, **1**, 1955.
3. S.P. Tymoshenko, D.H. Yang, U. Weaver, *Fluctuations in engineering*, Mashinostroenie Publ., Moscow, 1985 (In Russ.), 472 p.
4. L. E. Elsholz, S. B. Norkin, “Introduction to the theory of differential equations with a deviating argument”, *[Applied Mathematics and Mechanics]*, 1971, 296 (In Russ.).
5. M. A. Nimark, *Linear differential operators*, Nauka, Moscow, 1969 (In Russ.).
6. A. V. Pskhu, *Equations in private derivatives fractional order*, Nauka, Moscow, 2005 (In Russ.), 200 p.
7. I. Podlubny, *Academic Press*, 1998, 340 p.
8. S.G. Kasimov, S.K. Atayev, “On the determination of the mixed task for the equation with private derivatives of fractional order with the operators of Laplace with non-local boundary conditions in Sobolev class”, *Uzbek Mathematical Journal*, **1** (2018), 1–16.

*Submitted 3.12.2019*

[1]**Mahkambek M. Babayev**, Doctoral Student, Department of Differential Equations and Mathematical Physics, National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, (4 Universitetskaya St., Tashkent 100174, Uzbekistan), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1799-0413, babayevm@mail.ru