DOI 10.15507/2079-6900.21.201904.460-468

*УДК 517.9*

# Энергетическая функция для $\Omega$-устойчивых потоков без предельных циклов на поверхностях

© **А. Е. Колобянина**[1], **В. Е. Круглов**[2]

**Аннотация.** Настоящая работа посвящена исследованию класса $\Omega$-устойчивых потоков без предельных циклов на поверхностях, то есть потоков на поверхностях с неблуждающим множеством, состоящим из конечного числа гиперболических неподвижных точек. Данный класс является обобщением класса градиентно-подобных потоков, для потоков которого запрещены седловые точки, соединённые сепаратрисами. Результатами работы являются доказательство существования у любого потока рассматриваемого класса энергетической функции Морса и построение такой функции для произвольного потока рассматриваемого класса. Поскольку результаты являются обобщением соответствующих результатов К. Мейера для потоков Морса-Смейла и, в частности, для градиентно-подобных потоков, методы построения энергетической функции для случая данной статьи являются дальнейшей разработкой методов, использованных К. Мейером, с учётом специфики $\Omega$-устойчивых потоков, имеющих более сложную структуру, чем градиентно-подобные потоки, благодаря наличию "цепочек" седловых точек, соединённых седловыми сепаратрисами.

**Ключевые слова:** энергетическая функция, $\Omega$-устойчивый поток, функция Морса, поток без предельных циклов, поток на поверхности

## 1. Введение

В работе [1] А. А. Андронов и Л. С. Понтрягин впервые ввели на плоскости т. н. *потоки Морса-Смейла*, обладающие конечным числом гиперболических неподвижных точек и замкнутых траекторий, составляющих всё неблуждающее множество системы, и не имеющие *связок*, т. е. траекторий, соединяющих седловые точки. С. Смейл в работе [2] показал, что локально градиентный поток Морса-Смейла без предельных циклов (поток Морса-Смейла без предельных циклов называется *градиентно-подобным*) в подходящей метрике является градиентным, порождённым некоторой функцией Морса. В этом случае функция Морса убывает вдоль неособых траекторий потока, а множество неподвижных точек потока совпадает с множеством критических точек функции Морса. Так была впервые построена так называемая *энергетическая функция* для динамических систем, т. е. гладкая функция, убывающая вдоль блуждающих траекторий, чьё множество критических точек дает неблуждающее множество системы.

К. Мейер в работе [3] построил энергетическую функцию для произвольного потока Морса-Смейла, обобщив таким образом результат Смейла. В силу наличия у такого

[1]**Колобянина Анна Евгеньевна**, студентка факультета информационных технологий, математики и механики, стажер-исследователь, лаборатория Топологических методов в динамике, Нижегородский филиал ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печёрская, д. 25/12), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5312-4478, akolobyanina@mail.ru

[2]**Круглов Владислав Евгеньевич**, аспирант кафедры фундаментальной математики, стажер-исследователь, лаборатория Топологических методов в динамике, Нижегородский филиал ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-4661-0288, kruglovslava21@mail.ru

потока в общем случае периодических траекторий энергетическая функция уже не могла быть функцией Морса, а являлась её обобщением — функцией Морса-Ботта, имеющей точки первой степени вырождения вдоль предельных циклов.

В работе [4] был сделан первый шаг в обобщении результатов С. Смейла, а именно была постоена энергетическая функция для $\Omega$-устойчивого потока с одной седловой связкой на сфере.

В настоящей работе мы продолжаем обобщать результаты С. Смейла на класс $G$ $\Omega$-устойчивых потоков без предельных циклов на поверхностях.

**Теорема 1.1** *Для любого потока в классе $G$ существует энергетическая функция Морса.*

В следующих параграфах изложено доказательство теоремы 1.1.

## 2. Вспомогательные факты и определения

*Гладким потоком* на многообразии $M$ называется гладкое отображение

$$f\colon M \times \mathbb{R} \to M$$

со свойствами

$$1) f(x,0) = x,\ x \in M;$$

$$2) f(f(x,t),s) = f(x,t+s),\ x \in M, t \in \mathbb{R};$$

обозначим его $f(x,t) = f^t(x)$.

Множество $\mathcal{O}_p = \{f^t(x) \mid t \in \mathbb{R}\}$ называется *траекторией*, или *орбитой* точки $x$. Точка $x$ является неподвижной, если её траектория содержит только саму точку $x$. Траектории полагают ориентированными в направлении возрастания параметра $t$.

Неподвижная точка $p$ потока $f^t$ (отображения $f$) является *гиперболической* тогда и только тогда, когда среди собственных чисел матрицы Якоби $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)|_p$ нет чисел с нулевой действительной частью (чисел, равных 1). Если при этом все действительные части собственных чисел матрицы Якоби меньше 0 (меньше 1), то $p$ называется *стоковой точкой*; если больше 0 (больше 1), то *источниковой*. Притягивающая или отталкивающая точка называется *узловой*. Гиперболическая неподвижная точка, не являющаяся *узловой*, называется *седловой точкой, или седлом* (см. Рис. 2.1).

Для гиперболической точки $p$ существуют т. н. *устойчивое* $W^s(p)$ и *неустойчивое* $W^u(p)$ многообразия, которые можно определить как множества точек $y \in M$ таких, что $\varrho_M(f^k x_0, f^k y) \to 0$ при $k \to +\infty$ и $k \to -\infty$, соответственно, где $\varrho_M$ – метрика на $M$. Заметим, что неустойчивое многообразие $W^u(p)$ есть устойчивое многообразие относительно $f^{-1}$.

Для потока $f^t$ точка $x$ называется *блуждающей*, если существует открытая окрестность $U_x$ точки $x$ такая, что $f^t(U_x) \cap U_x = \emptyset$ для всех $t > 1$. В противном случае точка называется *неблуждающей*. Множество всех неблуждающих точек потока $f^t$ называется его *неблуждающим множеством* $\Omega_{f^t}$.

Если для точки $x$ существует значение $t_0 \in \mathbb{R}$ такое, что $f^{t_0}(x) = x$, то траектория точки $x$ называется *замкнутой траекторией*.

*Предельным циклом* $c$ потока $f^t$ называется замкнутая траектория, в некоторой окрестности которой нет других замкнутых траекторий.

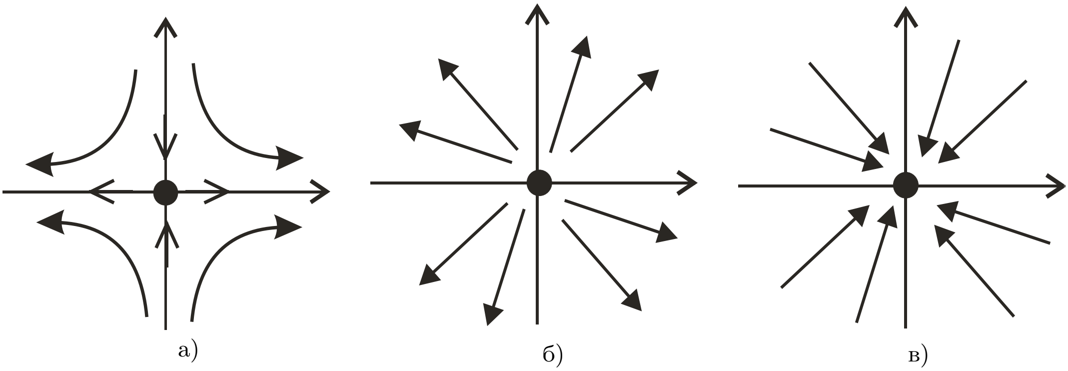

**Рис. 2.1.** Виды гиперболических неподвижных точек: а) седловая точка (седло); б) источниковая точка (источник); в) стоковая точка (сток)

Пусть $q$ – некоторая точка предельного цикла $c$, а $\Sigma_q$ – некоторая гладкая секущая, пересекающая $c$ в точке $q$, трансверсальная к траеториям потока $f^t$ вблизи $q$. Пусть $V_q \subset \Sigma_q$ – некоторая окрестность $q$ такая, что для любой точки $x \in V_q$ существует значение $\tau_x \in \mathbb{R}^+$, удовлетворяющее свойству $f^{\tau_x}(x) \in V_q$ и $f^t(x) \notin V_q$ для $0 < t < \tau_x$. Тогда $\Sigma_q$ – это *сечение Пуанкаре*, а отображение $F_q\colon V_q \to \Sigma_q$, заданное формулой $F_q(x) = f^{\tau_x}(x)$, $x \in V_q$, называется *отображением Пуанкаре*.

Если любая точка $q$ предельного цикла $c$ является гиперболической точкой отображения $F_q$, то цикл $c$ называется *гиперболическим предельным циклом*.

Два потока $f^t\colon M \to M$, $f'^t\colon M' \to M'$ называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h\colon M \to M'$, переводящий траектории $f^t$ в траектории $f'^t$ с сохранением направления движения.

Поток $f^t$ называется *потоком Морса-Смейла*, если его неблуждающее множество $\Omega_{f^t}$ состоит из конечного числа гиперболических неподвижных точек и гиперболических предельных циклов, и инвариантные многообразия $W^s(x)$, $W^u(y)$ пересекаются *трансверсально* для любых точек $x$, $y \in \Omega_{f^t}$. Поток Морса-Смейла является структурно устойчивым в смысле следующего определения.

Поток $f^t$ называется *структурно-устойчивым*, если существует окрестность $U(f^t)$ в $C^1(M \times \mathbb{R}, M)$, в которой все потоки будут топологически эквивалентны $f^t$.

Поток $f^t$ называется *$\Omega$-устойчивым*, если существует окрестность $U(f^t)$ в $C^1(M\times \times\mathbb{R}, M)$ такая, что если некоторый поток $\phi^t \in U(f^t)$, то существует гомеоморфизм $h\colon M \to M$, переводящий *неблуждающие* траектории потока $f^t$ в *неблуждающие* траектории потока $\phi^t$ с сохранением направления движения по траекториям. В силу критерия структурной устойчивости [5–6] это означает, что $\Omega$-устойчивый поток отличается от потока Морса-Смейла тем, что инвариантные многообразия различных седловых точек могут касаться, на поверхности это означает совпадение седловых сепаратрис различных седловых точек, появление сепаратрис, – соединяющих седловые точки.

Обозначим через $S$ замкнутую поверхность, напомним, что $G$ – класс $\Omega$-устойчивых потоков $f^t$ класса гладкости $C^2$ на $S$ без предельных циклов.

Напомним, что мы называем *энергетической функцией потока* $f^t \in G$ функцию $\varphi\colon S \to \mathbb{R}$ со следующими свойствами:

1) $\varphi$ является функцией Морса, т. е. $C^2$-функция с невырожденными критическими

точками;

2) множество критических точек функции $\varphi$ совпадает с $\Omega_{f^t}$;

3) $\varphi(f^t(x)) < \varphi(x)$ для любой $x \notin \Omega_{f^t}$ и любого $t > 0$.

## 3. Построение энергетической функции

Докажем основную теорему.

Положим $f^t \in G$.

Далее будем строить энергетическую функцию $\varphi\colon S \to \mathbb{R}$ в несколько этапов.

1. На неблуждающем множестве $\Omega_{f^t}$ потока $f^t$ вводится отношение Смейла, являющееся отношением частичного порядка: для двух точек $p$ и $q$ положим, что $p < q$ тогда и только тогда, когда $W^s_p \cap W^u_q \neq \varnothing$. Согласно известному факту из дискретной математики – это отношение продолжается до некоторого отношения линейного порядка. Перенумеруем неподвижные точки согласно этому порядку и положим, что $\varphi|_{\Omega_{f^t}}$ принимает значения, равные номерам точек.

2. Положим $i_{max}$, $j_{max}$, $k_{max}$ – число стоков, сёдел, источников соответственно. После этого для удобства переобозначим неподвижные точки: $\omega_i = \beta_{0,i}$, $\sigma_j = \beta_{1,j}$, $\alpha_k = \beta_{2,k}$, где $i = \overline{1, i_{max}}$, $j = \overline{1, j_{max}}$, $k = \overline{1, k_{max}}$. Также положим $b_{l_1,l_2} = \varphi(\beta_{l_1,l_2})$, где $l_1 = \overline{0,2}$, $l_2$ – номер точки в множестве точек её типа.

Поскольку $\beta_{l_1,l_2}$ — гиперболическая неподвижная точка потока $f^t$, то в локальных координатах $X = (x, y)$ касательное к траекториям потока векторное поле имеет вид

$$\dot{X} = A_{l_1,l_2} X + g_{l_1,l_2}(X),$$

где $A_{l_1,l_2}$ матрица с собственными значениями с ненулевой действительной частью и $g_{l_1,l_2}(0) = dg_{l_1,l_2}(0) = 0$. Согласно теории Ляпунова, существуют симметрические матрицы $B_{l_1,l_2}$ и $C_{l_1,l_2}$ такие, что квадратичная форма $w_{l_1,l_2}(X) = X^T B_{l_1,l_2} X$ положительно определена, а квадратичная форма $v_{l_1,l_2}(X) = X^T C_{l_1,l_2} X$ невырождена, при этом $A^T_{l_1,l_2} C_{l_1,l_2} + C_{l_1,l_2} A_{l_1,l_2} = -B_{l_1,l_2}$. Тогда существует окрестность $U_{l_1,l_2}$ неподвижной точки $\beta_{l_1,l_2}$, в которой функция

$$\varphi_{l_1,l_2}(X) = b_{l_1,l_2} + v_{l_1,l_2}(X)$$

является энергетической функцией Морса для потока $f^t$. Не уменьшая общности, будем считать, что окрестности $U_{l_1,l_2}$ попарно не пересекаются для различных $l_1, l_2$.

3. Выберем около каждой неподвижной точки линеаризующую окрестность удобной для нас формы. Для этого рассмотрим пары соседних седловых точек в различных цепочках и найдём такие две соседние в некоторой цепочке седловые точки, значения функции в которых имеют наименьшую разницу $w$, и положим $r \in (0, \frac{1}{3}w)$. Тогда $[n - r, n] \subset \varphi_{2,k}(U_{2,k})$ для источниковых точек $\beta_{2,k}$, $[0, r] \subset \varphi^{-1}_{0,i}(U_{0,i})$ для стоковых точек $\beta_{0,i}$ и $[b_{1,j} - r, b_{1,j} + r] \subset \varphi_{1,j}(U_{1,j})$ для седловых точек $\beta_{1,j}$, где $k, i, j$ – номера источников, стоков и седел соответственно. Положим $\widetilde{U_{2,k}} = \varphi^{-1}_{2,k}([n - r, n])$ и $\widetilde{U_{0,i}} = \varphi^{-1}_{0,i}([0, r])$. В качестве окрестности $\widetilde{U_{1,j}}$ седловой точки $\beta_{1,j}$ выберем криволинейный восьмиугольник, четыре стороны которого лежат на четырех компонентах связности линий уровня $\varphi^{-1}_{1,j}(b_{1,j} \pm r)$, а остальные четыре – на различных траекториях потока $f^t$ (см. Рис. 3.1).

4. Опишем построение глобальных линий уровня, продолжающих отрезки границы окрестности седла $\beta_{1,j}$, не являющиеся отрезками траекторий (см. Рис. 3.2). По построению множество

$$\varphi^{-1}_{1,j}(b_{1,j} \pm r) \cap \partial\widetilde{U_{1,j}}$$

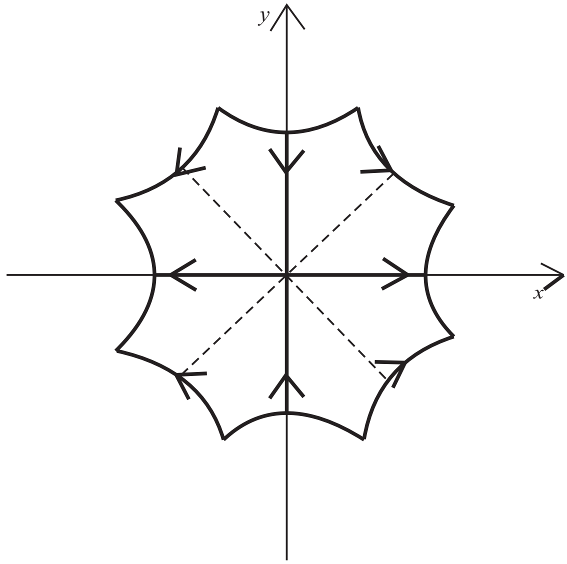


**Рис. 3.1.** Окрестность $U_{\beta_{1,j}}$

состоит из дуг $\delta^1_{j\pm}, \delta^2_{j\pm}$, при этом будем считать, что обозначения выбраны так, что $\delta^1_{j-}$, $\delta^2_{j-} \cap W^s_{\beta_{1,j}}$, $\delta^1_{j+}$, $\delta^2_{j+} \cap W^u_{\beta_{1,j}}$. На множестве $S \setminus (\bigcup\limits_{k=1}^{k_{max}} \widetilde{U_{2,k}} \cup \bigcup\limits_{i=1}^{i_{max}} \widetilde{U_{0,i}})$ продолжим эти дуги до глобальных линий уровня $\gamma^1_{j\pm} \supset \delta^1_{j\pm}$, $\gamma^2_{j\pm} \supset \delta^2_{j\pm}$, где линии с одинаковым знаком могут совпадать. Назовём $\gamma^s_j$, $s = 1, 2$, глобальными седловыми линиями уровня.

Проведем построение фрагмента $\gamma_0$ линии уровня $\gamma^s_{j-}$, где $s = 1, 2$, для остальных случаев построения аналогичные. Данные построения были описаны в статье [4]. Обозначим через $a_1,\ a_2$ граничные точки дуги $\delta^2_{j+}$. Пусть $t_1 > 0$ и $t_2 > 0$ значения времени такие, что $a^0_1 = f^{-t_1}(a_1) \in \partial\widetilde{U_{2,k}}$ и $a^0_2 = f^{-t_2}(a_2) \in \partial\widetilde{U_{2,\bar{k}}}$. Обозначим через $[a^0_1, a^0_2]$ дугу окружности $\partial\widetilde{U_{2,k}}$, ограниченную точками $a^0_1$ и $a^0_2$ и не пересекающую $W^s_{\beta_{1,j}}$. Для любых точек $z_1, z_2 \in [a^0_1, a^0_2]$ обозначим через $[z_1, z_2]$ дугу окружности $\partial\widetilde{U_{2,k}}$. Для любой точки $z \in [a^0_1, a^0_2]$ обозначим через $\ell_z$ длину дуги $[a^0_1, z]$. Положим $L = \ell_{a^0_2}$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что на отрезке $[0, L]$ в односторонних $\varepsilon$-окрестностях точек 0 и $L$ корректно определена $C^2$-гладкая функция $\tau_1$ формулой

$$f^{\tau_1(\ell_z)}(z) \in \delta^2_{k+}.$$

Определим функцию $\tau_2$ на отрезке $[0, L]$ формулой

$$\tau_2(\ell) = t_1 + \frac{t_2 - t_1}{L}\ell.$$

Обозначим через $\psi : [0, L] \to [0, 1]$ $C^2$-гладкую функцию такую, что $\psi = 0$ в $\frac{\varepsilon}{2}$-окрестностях точек 0 и $L$, $\psi = 1$ вне $\varepsilon$-окрестностей этих точек. Определим функцию $\tau_3$ на отрезке $[0, L]$ формулой

$$\tau_3(\ell) = \psi(\ell)\tau_2(\ell) + (1 - \psi(\ell))\tau_1(\ell).$$

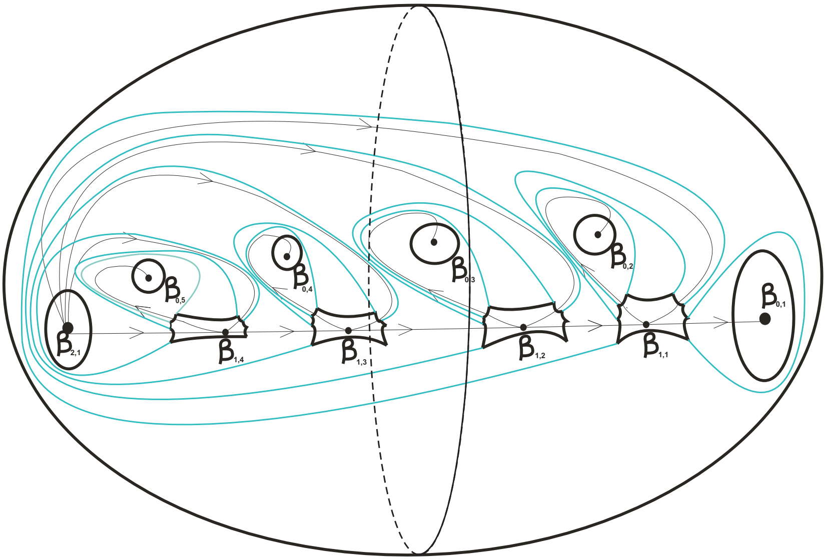


**Рис. 3.2.** Сфера $S^2$, фазовый портрет потока $f^t$, окрестности неподвижных точек и разбиение сферы на области линиями уровня функции $\varphi$

Положим $\gamma_0 = \delta^2_{j+} \cup \{f^{\tau_3(\ell_z)}(z), z \in [a^0_1, a^0_2]\}$.

5. Обозначим все построенные глобальные линии уровня, включая границы узловых окрестностей, через $\gamma_\mu$, $\mu = \overline{1, M}$, где $M$ – их число. Введем следующие обозначения для подмножеств множества $S \setminus (\bigcup\limits_{k=1}^{k_{max}} \widetilde{U_{2,k}} \cup \bigcup\limits_{i=1}^{i_{max}} \widetilde{U_{0,i}} \cup \bigcup\limits_{j=1}^{j_{max}} \widetilde{U_{1,j}})$: положим $V_{\mu_1,\mu_2}$ – множество, ограниченное $\gamma_{\mu_1}$, $\gamma_{\mu_2}$ и, возможно, границей седловой окрестности, при этом траектория идет от $\gamma_{\mu_1}$ к $\gamma_{\mu_2}$, не пересекая других линий уровня (см. Рис. 3.2).

Определим искомую энергетическую функцию $\varphi$ на границах перечисленных множеств следующим образом: $\varphi(\partial\widetilde{U_{0,i}}) = r$, $\varphi(\gamma^s_{j\pm}) = \varphi(\delta^s_{j\pm})$, $\varphi(\partial\widetilde{U_{2,k}}) = n - r$, $s = 1, 2$. Продолжим функцию $\varphi$ внутрь каждого множества по траекториям. Поскольку такие множества могут быть лишь кольцами и дисками, объясним построение на кольце $V_{\mu_1,\mu_2}$ и на диске $V_{\mu_3,\mu_4}$, для остальных колец и дисков построение аналогичное.

На кольце $V_{\mu_1,\mu_2}$ для любой точки $z \in \gamma_{\mu_1}$ существует время $t_z > 0$ такое, что $f^{t_z}(z) \in \gamma_{\mu_2}$. Для любого $t \in [0, t_z]$ положим

$$\varphi(f^t(z)) = \varphi(\gamma_{\mu_1})(1 - \frac{t}{t_z}) + \frac{t}{t_z}\varphi(\gamma_{\mu_2}).$$

Для диска $V_{\mu_3,\mu_4}$ без уменьшения общности положим, что $\mathcal{O}_{a^0_1} \cap V_{\mu_3,\mu_4} \neq \emptyset$ и $\mathcal{O}_{a^0_2} \cap V_{\mu_3,\mu_4} \neq \emptyset$. Согласно п. 2 определены функции $\tau_4$ и $\tau_5$ (которые строятся аналогично $\tau_3$) на отрезке $[0, L]$ такие, что

$$\gamma_{\mu_3} \cap V_{\mu_3,\mu_4} = \{f^{\tau_4(\ell_z)}(z), z \in [a^0_1, a^0_2]\}, \gamma_{\mu_4} \cap V_{\mu_3,\mu_4} = \{f^{\tau_5(\ell_z)}(z), z \in [a^0_1, a^0_2]\},$$

где $\tau_5(\ell_z) > \tau_4(\ell_z)$ для любого $z \in [a^0_1, a^0_2]$. На криволинейных прямоугольниках $\Pi_1 = \{0 \leq \ell \leq \varepsilon, \tau_4(\ell) \leq t \leq \tau_5(\ell)\}$, $\Pi_2 = \{L - \varepsilon \leq \ell \leq L, \tau_4(\ell) \leq t \leq \tau_5(\ell)\}$ корректно определена $C^2$-гладкая функция $\phi_1$ формулой

$$\phi_1(\ell_z, t) = \varphi_{1,j}(f^t(z)).$$

Определим функцию $\phi_2$ на прямоугольнике $\Pi = \{0 \le \ell \le L, \tau_4(\ell) \le t \le \tau_5(\ell)\}$ формулой

$$\phi_2(\ell, t) = \varphi(\gamma_{\mu_3}) - 2r\frac{t - \tau_4(\ell)}{\tau_5(\ell) - \tau_4(\ell)}.$$

Обозначим через $\Psi : \Pi \to [0, 1]$ $C^2$-гладкую функцию такую, что $\Psi = 0$ на прямоугольниках $\{0 \le \ell \le \frac{\varepsilon}{2}, \tau_4(\ell) \le t \le \tau_5(\ell)\} \cup \{L - \frac{\varepsilon}{2} \le \ell \le L, \tau_4(\ell) \le t \le \tau_5(\ell)\}$ и $\Psi = 1$ вне $\Pi_1 \cup \Pi_2$. Определим функцию $\phi_3$ на $\Pi$ формулой

$$\phi_3(\ell, t) = \Psi(\ell, t)\phi_2(\ell, t) + (1 - \Psi(\ell, t))\phi_1(\ell, t).$$

Положим

$$\varphi(f^t(z)) = \phi_3(\ell_z, t).$$

6. Построенная функция является гладкой всюду, кроме, возможно, на линиях уровня в окрестности границ линеаризующих окрестностей неподвижных точек. Стандартной процедурой переопределения значений функции в некоторой окрестности этих линий уровня (смотрите, например [9]) можно построить $C^2$-гладкую функцию, которая является искомой энергетической функцией.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке гранта РНФ, проект № 17-11-01041, за исключением локальной энергетической функции, которая построена при поддержке ЦФИ НИУ ВШЭ в 2019 г. Авторы благодарят Починку Ольгу Витальевну за внимательное прочтение рукописи.

## Список литературы

1. А. А. Андронов, Л. С. Понтрягин, “Грубые системы”, *Докл. АН СССР*, **14**:5 (1937), 247–250.

2. S. Smale, “On gradient dynamical systems”, *Annals of Mathematics*, **74** (1961), 199–206.

3. K. R. Meyer, “Energy function for Morse-Smale systems”, *American Journal of Mathematics*, **90**:4 (1968), 1031–1040.

4. А. А. Босова, В. Е. Круглов, О. В. Починка, “Энергетическая функция для Ω-устойчивого потока с седловой связкой на поверхности”, *Таврический вестник информатики и математики*, **4(37)** (2017), 51–58.

5. M. Peixoto, “Structural stability on two-dimensional manifolds”, *Topology*, **1** (1962), 101–120.

6. M. Peixoto,“Structural stability on two-dimensional manifolds (a further remarks)”, *Topology*, **2** (1963), 179–180.

7. К. Г. Валеев, Г. С. Финин, *Построение функций Ляпунова*, Наукова думка, Киев, 1981, 411 с.

8. C. Pugh, M. Shub, “The Ω-stability theorem for flows”, *Inventiones Math*, **11** (1970), 150–158.

9. В. З. Гринес, О. В. Починка, “Построение энергетических функций для Ω-устойчивых диффеоморфизмов на 2- и 3- многообразиях”, *Современная математика. Фундаментальные направления*, **63**:2 (2017), 191–222.

*Поступила 8.10.2019*

*MSC2010 37D05*

# Energy function for Ω-stable flows without limit cycles on surfaces

© **A. E. Kolobyanina**[1], **V. E. Kruglov**[2]

**Abstract.** The paper is devoted to the study of the class of Ω-stable flows without limit cycles on surfaces, i.e. flows on surfaces with non-wandering set consisting of a finite number of hyperbolic fixed points. This class is a generalization of the class of gradient-like flows, differing by forbiddance of saddle points connected by separatrices. The results of the work are the proof of the existence of a Morse energy function for any flow from the considered class and the construction of such a function for an arbitrary flow of the class. Since the results are a generalization of the corresponding results of K. Meyer for Morse-Smale flows and, in particular, for gradient-like flows, the methods for constructing the energy function for the case of this article are a further development of the methods used by K. Meyer, taking in sense the specifics of Ω-stable flows having a more complex structure than gradient-like flows due to the presence of the so-called “chains” of saddle points connected by their separatrices.

**Key Words:** energy function, Ω-stable flow, Morse function, a flow without limit cycles, a flow on a surface

## Список литературы

1. A. A. Andronov, L. S. Pontryagin, “Rough systems”, *Doklady Akademii nauk SSSR*, **14**:5 (1937), 247–250 (In Russ.).

2. S. Smale, “On gradient dynamical systems”, *Annals of Mathematics*, **74** (1961), 199–206.

3. K. R. Meyer, “Energy function for Morse-Smale systems”, *American Journal of Mathematics*, **90**:4 (1968), 1031–1040.

4. A. A. Bosova, V. E. Kruglov, O. V. Pochinka, “Energy function for an Ω-stable flow with a saddle connection on a sphere”, *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*, **4(37)** (2017), 51–58 (In Russ.).

[1]**Anna E. Kolobyanina**, Student, Faculty of Informatics, Mathematics and Computer Science, Research Assistant of Laboratory of Topological Methods in Dynamics, National Research University Higher School of Economics in Nizhny Novgorod (25/12, Bolshaya Pecherskaya Str., Nizhny Novgorod, 603155, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5312-4478, akolobyanina@mail.ru

[2]**Vladislav E. Kruglov** Doctoral Student, Department of Fundamental Mathematics, Research Assistant of Laboratory of Topological Methods in Dynamics, National Research University Higher School of Economics in Nizhny Novgorod (25/12, Bolshaya Pecherskaya Str., Nizhny Novgorod, 603155, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-4661-0288, kruglovslava21@mail.ru

5. M. Peixoto,, “Structural stability on two-dimensional manifolds”, *Topology*, **1** (1962), 101–120.

6. M. Peixoto, “Structural stability on two-dimensional manifolds (a further remarks)”, *Topology*, **2** (1963), 179–180.

7. K. G. Valeev, G. S. Finin, *Liapunov functions constructing*, Naukova dumka, Kiev, 1981 (In Russ.), 411 p.

8. C. Pugh, M. Shub, “The Ω-stability theorem for flows”, *Inventiones Math.*, **11** (1970), 150–158.

9. V. Z. Grines, O. V. Pochinka, “Construction of energetic functions for Ω-stable diffeomorphisms on 2- and 3-manifolds”, *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, **63**:2 (2017), 191–222 (In Russ.).

*Submitted 8.10.2019*