Математика

DOI 10.15507/2079-6900.21.201904.405-412

УДК 517.9

Тензорные поля, ассоциированные с интегрируемыми системами кирального типа

© **А. В. Баландин**[1]

Аннотация. В статье получены необходимые условия для того, чтобы система кирального типа допускала представление Лакса со значениями в простой компактной алгебре Ли. Эти условия заключаются в существовании ковариантно постоянного тензорного поля с некоторым дополнительным условием. Для этого в работе предлагается построение инвариантным образом с помощью представления Лакса некоторого класса тензорных полей. Выбирая произвольную Ad-инвариантную форму на алгебре Ли и подставляя в нее линейные дифференциальные формы со значениями в алгебре Ли, построенные с помощью представления Лакса, получим тензорное поле. В работе доказано, что такие тензорные поля являются полями Киллинга или ковариантно постоянными полями. Найденные необходимые условия существования представления Лакса получены с помощью частного случая таких тензорных полей, построенных для метрики Киллинга на алгебре Ли.

Ключевые слова: системы кирального типа, интегрируемые системы, представление Лакса, ковариантно постоянные поля

1. Введение

Системой кирального типа называется система n дифференциальных уравнений с частными производными следующего вида:

$$\Delta^\alpha \equiv U^\alpha_{xy} + G^\alpha_{\beta\gamma} U^\beta_x U^\gamma_y + Q^\alpha = 0, \tag{1.1}$$

где индексы x, y – частные производные по независимым переменным; U^α – неизвестные функции; греческие индексы принимают значения $\overline{1,n}$. Функции $G^\alpha_{\beta\gamma}$ и Q^α предполагаются гладкими необходимого порядка. Далее также предполагается суммирование по повторяющимся индексам.

Нетрудно видеть, что такие системы сохраняют вид при невырожденных преобразованиях зависимых переменных U^α, при этом коэффициенты $G^\alpha_{\beta\gamma}$ преобразуются как коэффициенты связности, а Q^α как коэффициенты векторного поля. Именно поэтому с геометрической точки зрения задание такой системы эквивалентно заданию аффинной связности и векторного поля на некотором n–мерном многообразии M^n с локальными координатами $U^1, U^2, ..., U^n$. Далее в работе ковариантное дифференцирование подразумевается относительно этой связности.

В работе интегрируемые системы понимаются как системы, допускающие представление Лакса, которое для систем (1.1) определим следующим образом.

[1]**Баландин Александр Владимирович**, доцент кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского» (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), кандидат физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6115-7341, balandin31@rambler.ru

Определение 1.1 *Будем говорить, что система кирального типа допускает представление Лакса со значениями в полупростой вещественной матричной алгебре Ли* $\mathfrak{g}$, *если существуют* $\mathfrak{g}$- *значные функции* A_α, B_α, M, N, *зависящие от неизвестных* $U^1, U^2, ..., U^n$ *и удовлетворяющие следующим условиям:*

$$D_y\widetilde{A} - D_x\widetilde{B} + [\widetilde{A}, \widetilde{B}] = S_\alpha \Delta^\alpha, \tag{1.2}$$

где

$$\widetilde{A} = A_\alpha U_x^\alpha + \lambda M, \quad \widetilde{B} = B_\alpha U_y^\alpha + \frac{1}{\lambda}N, \tag{1.3}$$

$$S_\alpha = A_\alpha - B_\alpha$$

и $S_1, S_2, ..., S_n$ *– линейно независимы;* λ *– некоторый параметр;* $[,]$ *– матричный коммутатор, т. е.* $[A, B] = AB - BA$.

Приводя подобные при разных степенях λ, получим, что для функций M, N, A_α, B_α выполнены следующие соотношения:

$$M_{,\alpha} = [B_\alpha, M], \tag{1.4}$$

$$N_{,\alpha} = [A_\alpha, N]. \tag{1.5}$$

$$Q^\alpha S_\alpha = [M, N], \tag{1.6}$$

$$A_{\alpha,\beta} - B_{\beta,\alpha} + [A_\alpha, B_\beta] - S_\gamma G^\gamma_{\alpha\beta} = 0. \tag{1.7}$$

Здесь и далее запятые обозначают частные производные, т. е. $P_{,\alpha} = \dfrac{\partial P}{\partial U^\alpha}$.

Определение 1.2 [1]. *Набор функций* S_α *в уравнениях (1.2) называется характеристическим элементом представления Лакса.*

Далее будет удобно записать соотношение (1.7) в эквивалентном виде

$$\nabla_\beta S_\alpha = S_{\alpha,\beta} - S_\gamma G^\gamma_{\alpha\beta} = [B_\beta, S_\alpha] + D_{\alpha\beta}, \tag{1.8}$$

где

$$D_{\alpha\beta} = [B_\beta, B_\alpha] + 2B_{[\beta,\alpha]}. \tag{1.9}$$

2. Тензорные поля, ассоциированные с представлением Лакса

В работах [2–3] предложена конструкция, позволяющая поставить в соответствие каждому представлению Лакса системы (1.1) бесконечные наборы тензорных полей Киллинга и ковариантно постоянных полей на многообразии M^n.

Оказывается, что указанная конструкция допускает следующее уточнение.

Напомним, что p-линейная форма на алгебре Ли $f : \underbrace{\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times ...\mathfrak{g}}_{p} \mapsto C$ называется ad-инвариантной на $\mathfrak{g}$, если для всех $x_1, x_2, ..., x_p, y \in \mathfrak{g}$ справедливо равенство:

$$f([y, x_1], x_2, ..., x_p) + f(x_1, [y, x_2], x_3, ..., x_p) + ... + f(x_1, x_2, ..., [y, x_p]) = 0.$$

В частности, для $p = 2$ такой формой является метрика Киллига на алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Т е о р е м а 2.1 *Пусть система (1.1) допускает представление Лакса. Определим по индукции на многообразии M^n линейные дифференциальные формы $\omega^0, \omega^k, k \in \mathbb{N}$ со значениями в алгебре $\mathfrak{g}$, полагая:*

$$\omega^0 = S_\alpha dU^\alpha, \omega^k = -(ad_M)^k (S_\alpha) dU^\alpha, \tag{2.1}$$

где $ad_M(X) = [M, X]$.

Сопоставим каждой ad-инвариантной p-форме f на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ ковариантное тензорное поле $T_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_m}(k_1, k_2, ..., k_m)$ на M^n, полагая

$$T_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_m}(k_1, k_2, ..., k_m) dU^{\alpha_1} \otimes dU^{\alpha_2} \otimes ... \otimes dU^{\alpha_m} = f(\omega^{k_1}, \omega^{k_2}, ..., \omega^{k_m}, \underbrace{M, M, ...M}_{p-m}). \tag{2.2}$$

Тогда m раз ковариантное тензорное поле $T_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_m}(k_1, k_2, ..., k_m)$ является полем Киллинга, т. е.

$$\nabla_{(\beta} T_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_m)}(k_1, k_2, ..., k_m) = 0.$$

В частности, если $k_i \neq 0$ при всех i, то поле $T_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_m}(k_1, k_2, ..., k_m)$ является ковариантно постоянным.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцируя уравнения (1.4) по U^β и составляя условия совместности, получим равенства:

$$[2B_{[\alpha,\gamma]}, M] = -[[B_\alpha, B_\gamma], M]. \tag{2.3}$$

Теперь, с учетом (1.9), соотношения (2.3) принимают вид:

$$[D_{\alpha\beta}, M] = 0. \tag{2.4}$$

Далее, принимая во внимание равенства (1.8), находим

$$\nabla_\beta [S_\alpha, M] = [\nabla_\beta S_\alpha, M] + [S_\alpha, M_{,\beta}] = [[B_\beta, S_\alpha], M] + [S_\alpha, [B_\beta, M]] = [B_\beta, [S_\alpha, M]]. \tag{2.5}$$

Преобразуем эти равенства с учетом форм (2.1) к виду

$$\nabla_\beta \omega^1 = [B_\beta, \omega^1]. \tag{2.6}$$

Аналогичным образом получим

$$\nabla_\beta \omega^k = [B_\beta, \omega^k]. \tag{2.7}$$

Вычисляя ковариантную производную

$$\begin{gathered}\nabla_\beta f(\omega^{k_1}, \omega^{k_2}, ..., \omega^{k_m}, \underbrace{M, M, ...M}_{p-m}) = f(\nabla_\beta \omega^{k_1}, \omega^{k_2}, ..., \omega^{k_m}, \underbrace{M, M, ...M}_{p-m}) + \\ + f(\omega^{k_1}, \nabla_\beta \omega^{k_2}, ..., \omega^{k_m}, \underbrace{M, M, ...M}_{p-m}) + ... + f(\omega^{k_1}, \omega^{k_2}, ..., \nabla_\beta \omega^{k_m}, \underbrace{M, M, ...M}_{p-m}) + \\ + (p-m) f(\omega^{k_1}, \omega^{k_2}, ..., \nabla_\beta \omega^{k_m}, [B_\beta, M], \underbrace{M, M, ...M}_{p-m-1})\end{gathered} \tag{2.8}$$

и учитывая ad-инвариантность формы f, приходим к соотношению

$$\nabla_\beta f(\omega^{k_1}, \omega^{k_2}, ..., \omega^{k_m}, \underbrace{M, M, ...M}_{p-m}) = \tag{2.9}$$

$$= \sum_{k_i=0} f(\omega^{k_1}, \omega^{k_2}, ..., D_{\alpha_{k_i}\beta} dU^{\alpha_{k_i}}, ..., \omega^{k_m}, \underbrace{M, M, ...M}_{p-m}),$$

где в сумме участвуют только те слагаемые, для которых $k_i = 0$.

Дальнейшее симметрирование поля $\nabla_\beta T_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_m}(k_1, k_2, ..., k_m)$ по всем индексам с учетом кососимметричности тензора $D_{\alpha\beta}$ завершает доказательство для общего случая.

В частном случае, когда все $k_i \neq 0$, равенство (2.9) принимает вид:

$$\nabla_\beta f(\omega^{k_1}, \omega^{k_2}, ..., \omega^{k_m}, \underbrace{M, M, ...M}_{p-m}) = 0.$$

Доказательство завершено.

Замечание 2.1 *Нетрудно видеть, что если в теореме 2.1 везде заменить M на N, то результат также будет справедлив.*

Замечание 2.2 *Формы $\omega^k, k \in \mathbb{N}$ принадлежат некоторому конечномерному подпространству над $\mathbb{R}$, т.к. они являются решениями системы (2.8).*

Пример 2.1 *Рассмотрим систему дифференциальных уравнений*

$$U^1_{xy} - \exp(U^1 + U^2) - \exp(-U^1) = 0, \tag{2.10}$$

$$U^2_{xy} - \exp(U^1 + U^2) - \exp(-U^2) = 0.$$

Как известно [2.10], эта система допускает представление Лакса со значениями в алгебре $sl(4)$ следующего вида:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u^2_x & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}u^2_x & \lambda e^{U^1} & 0 \\ -\frac{\lambda}{2}e^{-U^1} & 0 & \frac{1}{2}u^2_x & \lambda \\ 0 & -\frac{\lambda}{2}e^{-U^1} & 0 & -\frac{1}{2}u^2_x \end{pmatrix}, \ \widetilde{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u^1_y & 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ -\frac{1}{2\lambda}e^{-U^2} & \frac{1}{2}u^1_y & 0 & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & \frac{1}{\lambda}e^{U^2} & -\frac{1}{2}u^1_y & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\lambda}e^{-U^2} & -\frac{1}{2}u^1_y \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что в этом случае S_1, S_2 являются диагональными матрицами следующего вида $S_1 = \frac{1}{2}diag\{-1, -1, 1, 1\}$, $S_2 = \frac{1}{2}diag\{1, -1, 1, -1\}$.

Далее находим:

$$[S_1, M] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2e^{U^1} & 0 \\ -e^{-U^1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-U^1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ [S_2, M] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{U^1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В качестве ad-инвариантной формы выберем форму Киллинга $f(x, y)$ на алгебре $sl(4)$. Тогда непосредственная проверка показывает, что $T_{\alpha\beta}(1, 1) = f([S_\alpha, M], [S_\beta, M]) = 0$. Аналогично проверяется, что $f([S_\alpha, N], [S_\beta, N]) = 0$.

Из предыдущего примера видно, что построенные выше тензорные поля могут обращаться в нуль. Оказывается, что условие компактности алгебры гарантирует, что построенные выше тензорные поля, по крайней мере 2-го порядка, являются ненулевыми.

Т е о р е м а 2.2 *Пусть в системе (1.1) по крайней мере один из коэффициентов Q^α отличен от нуля. Для того чтобы эта система допускала представление Лакса со значениями в простой компактной алгебре Ли необходимо, чтобы на многообразии M^n существовало ненулевое ковариантно постоянное тензорное поле $K_{\alpha\beta}$, удовлетворяющее условию*

$$K_{\alpha\beta}V^\alpha V^\beta \geq 0 \qquad (2.11)$$

для всех векторных полей $\overrightarrow{V} = (V^\alpha)$ на многообразии M^n.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Докажем, что в качестве такого поля можно выбрать любое тензорное поле вида

$$T_{\alpha\beta}dU^\alpha \otimes dU^\beta = f(\omega^k, \omega^k), \qquad k \in \mathbb{N}, \qquad (2.12)$$

где f – метрика Киллинга на алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Сначала заметим, что из линейной независимости S_α следует, что $S_\alpha Q^\alpha \neq \neq 0$. Поэтому из (1.6) и компактности алгебры следует, что $f([M,N],[M,N]) \neq 0$. Учитывая ad-инвариантность формы Киллинга f, будем иметь $f([M,N],[M,N]) = -f(N,[M,[M,N]])$, т. е. $[M,[M,N]] \neq 0$. Отсюда получим, что $Q^\alpha[M,S_\alpha] \neq 0$. Таким образом, доказано, что $\omega^1 \neq 0$.

Теперь покажем, что $\omega^k \neq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Действительно, пусть $[M,S_\alpha] \neq 0$. Тогда в силу компактности алгебры Ли $T_{\alpha\alpha} = f([M,S_\alpha],[M,S_\alpha]) \neq 0$. Отсюда, опять учитывая ad-инвариантность формы Киллинга, получим $f([M,S_\alpha],[M,S_\alpha]) = = -f(S_\alpha,[M,[M,S_\alpha]]) \neq 0$. Тем самым доказано, что $\omega^2 \neq 0$. Аналогичным образом проверяется, что $\omega^k \neq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

Теперь осталось использовать знакоопределенность формы Киллинга на компактной алгебре Ли.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

О п р е д е л е н и е 2.1 *Будем говорить, что система (1.1) является системой с неприводимой метрикой, если связность, определенная системой является связностью Леви-Чивита некоторой метрики и, кроме того, все ковариантно постоянные дважды ковариантные тензорные поля отличаются от метрики постоянным множителем.*

С л е д с т в и е 2.1 *Для того, чтобы эта система (1.1) с неприводимой метрикой, в которой по крайней мере один из коэффициентов Q^α отличен от нуля, допускала представление Лакса со значениями в простой компактной алгебре Ли необходимо чтобы метрика была знакоопределенной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

При доказательстве теоремы было доказано, что все формы ω^k ненулевые. Поэтому в данном случае все тензорные поля $T_{\alpha\beta}$ вида (2.12) отличаются от метрики постоянным множителем. Опять использование условия знакоопределенности метрики Киллинга завершает доказательство.

П р и м е р 2.2 *Рассмотрим 3-компонентную вариационную систему*

$$\Delta^1 = U^1_{xy} - aU^2e^{2U^1} + bU^3e^{-2U^1} = 0,$$

$$\Delta^2 = U^2_{xy} - b\psi^{-1}e^{-2U^1} - \psi U^3U^2_xU^2_y = 0,$$

$$\Delta^3 = U^3_{xy} - a\psi^{-1}e^{2U^1} - \psi U^2U^3_xU^3_y = 0,$$

где $\psi = (U^2U^3 + c)^{-1}$ *и* a, b, c *– произвольные константы,* $a^2 + b^2 \neq 0$.

Эта система является системой уравнений Эйлера для лагранжиана

$$L = 2U^1_xU^1_y + \psi(U^2_xU^3_y + U^3_xU^2_y) + 2aU^2e^{2U^1} + 2bU^3e^{-2U^1},$$

и, как известно [5]*, допускает представление Лакса со значениями в алгебре* $sl(3)$*, которое с точностью до калибровочного преобразования имеет вид:*

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -\dfrac{U^2_xU^3}{3(U^2U^3+c)} & -bc^{-1}U^3e^{-2U^1}\lambda & 0 \\ \lambda aU^2e^{2U^1} & -\dfrac{U^2_xU^3}{3(U^2U^3+c)} & \lambda ae^{2U^1} \\ 0 & bc^{-1}e^{-2U^1}(U^2U^3+c)\lambda & \dfrac{2U^2_xU^3}{3(U^2U^3+c)} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{3}\left(2U^1_y + \dfrac{U^2U^3_y}{U^2U^3+c}\right) & \lambda^{-1} & -\dfrac{U^3_y}{U^2U^3+c} \\ -c\lambda^{-1} & \dfrac{1}{3}\left(4U^1_y - \dfrac{U^2U^3_y}{U^2U^3+c}\right) & 0 \\ -U^2_y & 0 & -\dfrac{1}{3}\left(2U^1_y - \dfrac{2U^2U^3_y}{U^2U^3+c}\right) \end{pmatrix}.$$

В данном случае матрица S_1 *является диагональной* $S_1 = \dfrac{1}{3}diag\{2, -4, 2\}$,

$$S_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -U^3\psi & 0 & 0 \\ 0 & -U^3\psi & 0 \\ 3 & 0 & 2U^3\psi \end{pmatrix}, \qquad S_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} U^2\psi & 0 & 3\psi \\ 0 & U^2\psi & 0 \\ 0 & 0 & -2U^2\psi \end{pmatrix}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что тензорное поле $T_{\alpha\beta}$*, построенное с помощью метрики Киллинга* f *по формуле* $f(\omega^1, \omega^1)$ *имеет вид:*

$$T_{\alpha\beta} = -ab\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi \\ 0 & \psi & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что поле $T_{\alpha\beta}$ *является ковариантно постоянным и не пропорционально метрике, заданной лагранжианом системы. Это оказывается возможным, т.к. в данном примере метрика не является неприводимой и алгебра* $sl(3)$ *некомпактна.*

Список литературы

1. M. Marvan, "On zero-curvature representations of partial differential equations", *5th International Conference on Differential Geometry and Its Applications*, Opava, 1993, 103–122.

2. A. V. Balandin, "Characteristics of conservation laws of chiral-type systems", *Letters in Mathematical Physics*, **105**:1 (2015), 27–43.

3. A. V. Balandin, “Tensor fields defined by Lax representations”, *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, **23**:3 (2016), 323–334.

4. E. V. Ferapontov, W. K. Schief, “Surfaces of Demoulin: differential geometry, Backlund transformation and integrability”, *Journal of Geometry and Physics*, **30** (1999), 343–363.

5. Д. К. Демской, В. Г. Марихин, А. Г. Мешков, “Представления Лакса для триплетов двумерных скалярных полей кирального типа”, *Теоретическая и математическая физика*, **148**:2 (2006), 189–205.

Поступила 10.09.2019

MSC2010 35Q51, 37K10

Tensor fields associated with integrable systems of chiral type

© **A. V. Balandin**[1]

Abstract. This article describes necessary conditions for chiral-type systems to admit Lax representation with values in simple compact Lie algebras. These conditions state that there exists a covariant constant tensor field with an additional property. It is proposed to construct in an invariant way some covariant tensor fields using the Lax representation of the system under consideration. These fields are constructed by taking linear differential forms with values in the Lie algebra that are constructed using the Lax representation of the system and substituting them into an arbitrary Ad-invariant form on the Lie algebra. The paper proves that such tensor fields are Killing tensor fields or covariant constant fields. The discovered necessary conditions for the existence of the Lax representation are obtained using a special case of such tensor fields associated with the Killing metric of the Lie algebra.

Key Words: chiral-type systems, integrable systems, Lax representation, covariantly constant field

References

1. M. Marvan, “On zero-curvature representations of partial differential equations”, *5th International Conference on Differential Geometry and Its Applications*, Opava, 1993, 103–122.

2. A. V. Balandin, “Characteristics of conservation laws of chiral-type systems”, *Letters in Mathematical Physics*, **105**:1 (2015), 27–43.

3. A. V. Balandin, “Tensor fields defined by Lax representations”, *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, **23**:3 (2016), 323–334.

4. E. V. Ferapontov, W. K. Schief, “Surfaces of Demoulin: differential geometry, Backlund transformation and integrability”, *Journal of Geometry and Physics*, **30** (1999), 343–363.

[1]**Alexander V. Balandin**, Associate Professor, Department of Algebra, Geometry and Descrete Mathematics, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Prospekt Gagarina, Nizhny Novgorod 603950, Russia), Ph.D. (Phys. and Math.), ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6115-7341, balandin31@rambler.ru

5. D. K. Demskoi, V. G. Marikhin, A. G. Meshkov, “[Lax representations for triplets of two-dimensional scalar fields of the chiral type]”, *Theoretical and Mathematical Physics*, **148**:2 (2006), 1034–1048 (In Russ.).

Submitted 10.09.2019